УДК 517. 9

І. Л. Іванов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
В. І. Слинько (Ін-т механіки НАН України, Київ)

УМОВИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ЧИСТИМ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Necessary and sufficient stability conditions are established for the class of linear differential equations with delay and pulse action.

Установлены необходимые и достаточные условия устойчивости для класса линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и импульсным воздействием.

Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією, включаючи періодичні системи, була предметом вивчення в ряді робіт (див., наприклад, [1 – 3]). У роботах [4 – 6] було досліджено системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією і запізненням. В основу цих досліджень [4, 5] покладено прямий метод Ляпунова в поєднанні з концепцією Б. С. Разуміхіна. Актуальною задачею є побудова аналога теорії Флоке для цього класу диференціальних рівнянь. У даній роботі для скалярного рівняння з чистим запізненням, величина якого збігається з періодом імпульсної дії, при деяких додаткових припущеннях побудовано аналог оператора монодромії у функціональному просторі і встановлено необхідні та достатні умови стійкості лінійного рівняння. В основу методу дослідження покладено принцип порівняння для дискретних відображень [7]. Дослідження стійкості зведено до знаходження дійсних коренів деякого трансцендентного рівняння.

Розглянемо питання про стійкість диференціального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bx(t-\theta), \quad t \neq k\theta, \\ x(t^+) &= cx(t), \quad t = k\theta \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $bc \geq 0$, $\theta > 0$, у просторі функцій $X = C\,[0,\theta) \cap C^1\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigl(k\theta,\,(k+1)\,\theta\bigr)\right)$. Розглядуване припущення $bc \geq 0$ введено з метою гарантування розв'язності на дійсній осі трансцендентного рівняння, яке буде отримано далі.

Зауважимо, що випадок цього рівняння при $b = 0$ є тривіальним. Його ми розглянемо потім, а зараз припустимо, що $b \neq 0$.

Оскільки $bc \geq 0$, то можливі 2 випадки:

1) $b > 0$, $c \geq 0$;

2) $b < 0$, $c \leq 0$.

Далі обмежимося детальним розглядом лише першого випадку, звертаючи увагу на другий випадок лише шляхом ремарок.

Позначимо $\Omega = (0,\, \theta)$ і сформулюємо для (1) початкові умови

$$x(t) = f(t), \quad t \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

де $f(t)$ — неперервна функція.

Візьмемо послідовність $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ функцій $\varphi_n : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ і розглянемо задачу

$$\frac{d\varphi_n(t)}{dt} = b\varphi_{n-1}(t), \quad t \in \bar{\Omega}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\varphi_n(-\theta) = c\varphi_{n-1}(0),$$

$$\varphi_0(t) = f(t), \quad t \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

де функції φ_n, $n \in \mathbb{N}$, неперервно диференційовні в області визначення (φ_0 є неперервною).

Означення 1. *Система* (3) *називається стійкою, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що коли* $\|\varphi_0(t)\|_{C(\bar{\Omega})} < \delta$, *то* $\|\varphi_n(t)\|_{C(\bar{\Omega})} < \varepsilon$ *рівномірно по* n.

Означення 2. *Система* (3) *називається асимптотично стійкою, якщо вона стійка і* $\|\varphi_n(t)\|_{C(\bar{\Omega})} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Легко бачити, що між розв'язками задач (1), (2) та (3), (4) існує зв'язок

$$\varphi_n(t) = x(n\theta + t), \quad t \in (0, \theta], \tag{5}$$

а тому умови стійкості та асимптотичної стійкості системи (1) рівносильні умовам відповідно стійкості та асимптотичної стійкості системи (3).

Означення 3. *Нехай* $\{\varphi_n\}$ *— розв'язок* (3). *Тоді оператор* $T: C(\bar{\Omega}) \to C(\bar{\Omega})$, *означений рівністю* $T\varphi_n = \varphi_{n+1}$ *для довільного* $n \in \mathbb{N}$, *називається оператором монодромії для* (3).

Очевидно, що для цього оператора має місце зображення

$$T\varphi_n(t) = c\varphi_n(0) + b\int_{-\theta}^{t} \varphi_n(s)\,ds. \tag{6}$$

Можна показати лінійність оператора T. Беручи до уваги теорему Банаха – Штейнгауза, а також означення оператора монодромії та стійкостей, легко бачити, що стійкість (3) еквівалентна обмеженості послідовності $\|T^n\|_{C(\bar{\Omega})}$ (взята для оператора норма є звичайною операторною нормою, породженою нормою $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$), а асимптотична стійкість еквівалентна співвідношенню $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|_{C(\bar{\Omega})} = 0$.

Введений оператор монодромії має вигляд

$$T\varphi_n(t) = c\varphi_n(\theta) + b\int_{0}^{t} \varphi_n(s)\,ds. \tag{7}$$

Розглянемо питання про відшукання загального вигляду виразу $T^n 1$.

Дослідимо $T^n 1$, взявши декілька початкових значень n:

$$T^0 1 = 1 \quad \text{на} \quad \bar{\Omega},$$

$$T1 = c \cdot 1 + b\int_0^t 1\,ds = c + bt \quad \text{на} \quad \bar{\Omega},$$

$$T^2 1 = T(T(1)) = c(c + b\theta) + b\int_0^t (c + bt)\,ds =$$

$$= c^2 + cb\theta + b\left(ct + \frac{1}{2}bt^2\right) \quad \text{на} \quad \bar{\Omega}.$$

Звідси видно, що $T^n 1$ має загальний вигляд $T^n 1 = P_n(t)$, де $P_n(t)$ — многочлен степеня n.

Можна показати, що $Tt^k = c\theta^k + \frac{1}{k+1} bt^{k+1}$, а тому, позначивши для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ через b_n вільний член полінома $P_n(t)$, для многочлена $P_n(t)$ отримаємо зображення

$$P_n(t) = b_0 \frac{b^n}{n!} t^n + b_1 \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + b_2 \frac{b^{n-2}}{(n-2)!} t^{n-2} + \ldots + b_{n-1} bt + b_n. \tag{8}$$

Але тоді

$$P_{n+1}(t) = TP_n(t) = b_0 \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} + b_1 \frac{b^n}{n!} t^n + b_2 \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + b_n t + cP_n(\theta),$$

звідки

$$b_{n+1} = cP_n(\theta) = c\left(b_n + \beta b_{n-1} + \frac{\beta^2}{2!} b_{n-2} + \ldots + \frac{\beta^n}{n!} b_0\right), \tag{9}$$

де $\beta = b\theta$.

Рівність (9) є рекурентним співвідношенням, яке дає змогу знайти b_{n+1}, коли відомі $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Паралельно з цим співвідношенням будемо розглядати також співвідношення

$$\tilde{b}_{n+1} = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{b}_{n-k} \beta^k \tag{10}$$

для деякої послідовності $\{\tilde{b}_n\}$. Оскільки, як легко бачити, $b_0 = 1$, то покладемо $\tilde{b}_0 = 1$.

Будемо шукати розв'язок (10) у вигляді $\tilde{b}_n = q^n$ (причини, через які розв'язок шукається у такому специфічному вигляді, полягають у тому, що довільний розв'язок системи (10) завжди може мажоруватись при $n \to +\infty$ розв'язком у запропонованому вигляді, помноженому на деяку константу; нас тут цікавить послідовність із найшвидшим зростанням). Тоді співвідношення (10) набере вигляду

$$q^{n+1} = c \sum_{k=0}^{\infty} q^{n-k} \frac{\beta^k}{k!},$$

або, після спрощення та відшукання суми ряду,

$$q = ce^{\beta/q}. \tag{11}$$

Можна показати, що при $b > 0$, $c > 0$ (випадок $c = 0$ відповідає рівнянню з тривіально стійким нульовим розв'язком) трансцендентне рівняння (11) має єдиний дійсний корінь, до того ж додатний. Це видно з того, що функція правої частини рівняння набуває лише додатних значень, а на правій півосі монотонно спадає від $+\infty$ до одиниці. Подібними міркуваннями можна встановити, що у випадку, коли $b < 0$ і $c < 0$, це рівняння матиме єдиний дійсний розв'язок, до того ж від'ємний. Отже, нехай q задовольняє (11), тоді для $\tilde{b}_n = q^n$, $n \in \mathbb{Z}$, буде виконуватись співвідношення (10).

Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ позначимо

$$\theta_n = \frac{b_n}{\tilde{b}_n}. \tag{12}$$

Можна переконатись, що θ_n задовольняє співвідношення

$$\theta_{n+1} = e^{-\frac{\beta}{q}}\left(\theta_n + \frac{\beta}{q}\theta_{n-1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\beta}{q}\right)^2\theta_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\beta}{q}\right)^n\theta_0\right). \tag{13}$$

Якщо позначити $\beta_1 = \dfrac{\beta}{q}$, то отримаємо

$$\theta_{n+1} = e^{-\beta_1}\left(\theta_n + \beta_1\theta_{n-1} + \frac{\beta_1^2}{2!}\theta_{n-2} + \ldots + \frac{\beta_1^n}{n!}\theta_0\right).$$

Використавши заміну $A_k = e^{-\beta_1(\beta^k/k!)}$, будемо мати

$$\theta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k\theta_{n-k}. \tag{14}$$

Позначимо $S_n = \sum_{k=0}^{n} A_k$ та $r_n = 1 - S_n$.

Лема 1. *Нехай послідовність* θ_n *означена рівністю* (12). *Тоді існує* θ^* *таке, що рівномірно по* n *виконується співвідношення* $\theta^* \le \theta_n \le 1$.

Доведення. Отже, $\theta_{n+1} = \nu_n(1 - r_n)$, де ν_n — „зважене середнє", $\nu_n = \sum_{k=0}^{n} A_k\theta_{n-k} \Big/ \sum_{k=0}^{n} A_k$.

Покажемо спочатку, що має місце права нерівність твердження леми. Доведемо її методом математичної індукції.

При $n = 0$ нерівність виконується, $\theta_0 \le 1$. Припустимо її виконання для довільного $k \le n$ ($\theta_k \le 1$) та встановимо її для $n + 1$. Дійсно,

$$\theta_{n+1} = \nu_n(1 - r_n) \le \nu_n \le \max_k\{\theta_k\} \le 1,$$

що й потрібно було довести.

Перейдемо до лівої нерівності. Розглянемо ще одну послідовність, задану рекурентно:

$$\tilde{\theta}_{n+1} = \tilde{\theta}_l(1 - r_n),$$

де l таке, що для довільного $k \le n$, $k \ne l$ буде $\tilde{\theta}_l < \tilde{\theta}_k$, а $\tilde{\theta}_0 = 1$. З допомогою методу математичної індукції легко довести, що $l = n$, тобто $\{\tilde{\theta}_n\}$ монотонно спадає (бо $1 - \tilde{r}_n < 1$).

Покажемо, що для довільного n $\theta_n \ge \tilde{\theta}_n$ (методом математичної індукції).

При $n = 0$ $\theta_0 \ge \tilde{\theta}_0$. Припустимо виконання нерівності при $l \le n$ (тобто $\theta_l \ge \tilde{\theta}_l$) та доведемо, що $\theta_{n+1} \ge \tilde{\theta}_{n+1}$. Дійсно,

$$\theta_{n+1} = \nu_n(1 - r_n) \geq \min_i \{\theta_i\}(1 - r_n) \geq \min_i \{\tilde{\theta}_i\}(1 - r_n) =$$

$$= \tilde{\theta}_n(1 - r_n) = \tilde{\theta}_{n+1},$$

що й потрібно було довести.

Покажемо, що $\tilde{\theta}_n$ обмежена знизу додатним числом.

Дійсно,

$$\tilde{\theta}_{n+1} = \tilde{\theta}_n(1 - r_n) = \tilde{\theta}_{n-1}(1 - r_n)(1 - r_{n-1}) = \ldots = \tilde{\theta}_0 \sum_{k=0}^{n} (1 - r_k).$$

Отже, питання про обмеженість $\tilde{\theta}_n$ еквівалентне питанню про збіжність (до ненульового значення) добутку $\prod_{n=0}^{\infty}(1 - r_n)$. Останній збігається тоді і лише тоді, коли існує сума ряду $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$ [8]. Але

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_1^k \frac{1}{k!}.$$

Візьмемо мінімальне $l \geq n$ таке, що $l > \beta_1$, і продовжимо:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_1^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{l} \beta_1^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=l+1}^{\infty} \beta_1^k \frac{1}{k!} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{l} \beta_1^k \frac{1}{k!} + \frac{\beta_1^l}{l!} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\beta_1^{k-l}}{(l+1)(l+2)\ldots k} <$$

$$< \sum_{k=n+1}^{l} \beta_1^k \frac{1}{k!} + \frac{\beta_1^l}{l!} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{\beta_1^{k-l}}{(l+1)^{k-l}} = \sum_{k=n+1}^{l} \frac{\beta_1^k}{k!} + \frac{\beta_1^l}{l!} \frac{\beta_1}{l+1} \frac{1}{1 - \dfrac{\beta_1}{l+1}} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{l} \frac{\beta_1^k}{k!} + \frac{\beta_1^{l+1}}{l!} \frac{1}{l + 1 - \beta_1}.$$

Відкинемо ті r_n, у яких $l > n$. Це не вплине на збіжність ряду. Нехай тепер $n = l$, тоді

$$r_n < \frac{\beta_1^{n+1}}{n!} \frac{1}{n + 1 - \beta_1} < \beta_1 \frac{\beta_1^n}{n!} = \beta_1 \frac{\beta_1^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n}},$$

де $\delta_n \in \left(0, \dfrac{1}{12n}\right)$ [9], і продовжимо

$$\beta_1 \frac{\beta_1^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\delta_n}} = \beta_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\beta_1 e}\right)^n e^{\delta_n}} < \beta_1 \frac{1}{\left(\dfrac{n}{\beta_1 e}\right)^n} < \frac{\beta_1}{2^n},$$

якщо взяти n таке, щоб $\dfrac{n}{\beta_1 e} > 2$. Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\beta_1}{2^n} = \beta_1$, тому збіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$, добуток $\prod_{n=0}^{\infty}(1 - r_n)$, а тому існує таке θ^*, що $\theta_n > \theta^*$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Лему 1 доведено.

З леми випливає очевидний наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* b_n — *послідовність вільних членів* $P_n(t) = T^n(1)$, *де* T — *оператор монодромії для* (4) *при* $b > 0$, $c \geq 0$, q — *розв'язок рівняння* $q = ce^{\beta/q}$. *Тоді*:

1) *якщо* $q < 1$, *то* $b_n \to 0, n \to \infty$;

2) *якщо* $q = 1$, *то існують* n^*, c_1, c_2, $0 < c_1 < c_2$, *такі, що для всіх* $n > n^*$ $c_1 < b_n < c_2$;

3) *якщо* $q > 1$, *то* $b_n \to \infty, n \to \infty$.

Лема 2. *Нехай* $P_n(t) = T^n(1)$, *де* T — *оператор монодромії для* (3), $b > 0$, $c \geq 0$, *а* $b_n > 0$ — *вільні члени* $P_n(t)$. *Тоді*:

1) *якщо* $b_n \to \infty, n \to \infty$, *то* $\|P_n\|_{C(\bar{\Omega})} \to \infty, n \to \infty$;

2) *якщо існує* $n^* \in \mathbb{N}$ *таке, що для всіх* $n > n^*$ $0 < c_1 < b_n < c_2$, *то існує* n^{**} *таке, що для всіх* $n > n^{**}$ $\gamma_1 < \|P_n\|_{C(\bar{\Omega})} < \gamma_2$;

3) *якщо* $b_n \to 0, n \to \infty$, *то* $\|P_n\|_{C(\bar{\Omega})} \to 0, n \to \infty$.

Доведення. 1. Нехай $b_n \to \infty$, але

$$\|P_n\|_{C(\bar{\Omega})} = \left\| \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} t^{n-k} \right\|_{C(\bar{\Omega})} \geq |P_n(0)| = b_n,$$

тому $\|P_n\|_{C(\bar{\Omega})} \to \infty$, $n \to \infty$.

2. Нехай існує $n^* \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n^*$ $0 < c_1 < b_n < c_2$. Тоді

$$\|P_n\|_{C(\bar{\Omega}_1)} = \left\| \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} t^{n-k} \right\|_{C(\bar{\Omega}_1)} \geq |P_n(0)| = b_n > c_1.$$

З іншого боку,

$$\|P_n\|_{C(\bar{\Omega}_1)} = \left\| \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} t^{n-k} \right\|_{C(\bar{\Omega}_1)} = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \theta^{n-k} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} \frac{(b\theta)^k}{k!} \right| = \frac{1}{c} b_{n+1} < \frac{1}{c} c_2.$$

Отже, при $n > n^*$ $c_1 < \|P_n\|_{C(\bar{\Omega}_1)} < \dfrac{c_2}{c}$.

3. Нехай $b_n \to 0$, $n \to \infty$, тоді $\|P_n\|_{C(\bar{\Omega}_1)} = \dfrac{b_{n+1}}{c} \to 0$, $n \to \infty$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай* T — *оператор монодромії для* (3), $b > 0$, $c \geq 0$. *Тоді для довільного* n $\left\|T^n f\right\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|f\|_{C(\bar{\Omega})} \left\|T^n(1)\right\|_{C(\bar{\Omega})}$.

Доведення. Достатньо показати, що $\left|T^n f(t)\right| \le \|f\|_{C(\bar{\Omega})}\left|T^n(1)(t)\right|$.

Покажемо це методом математичної індукції. При $n = 0$ твердження є правильним, оскільки $\left|T^0 f(t)\right| = |f(t)| \le \|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})}\left|T^0(1)\right|$. Припустимо, що $\left|T^n f(t)\right| \le \|f\|_{C(\bar{\Omega})}\left|T^n(1)(t)\right|$, і розглянемо

$$\left|T^{n+1} f(t)\right| = \left|TT^n f(t)\right| = \left|bT^n f(\theta) + c\int_0^t T^n f(s)\,ds\right| \le$$

$$\le b\left|T^n f(\theta)\right| + c\left|\int_0^t T^n f(s)\,ds\right| \le$$

$$\le b\left|T^n(1)(\theta)\right|\|f\|_{C(\bar{\Omega})} + c\left|\int_0^t T^n(1)(s)\,ds\right|\|f\|_{C(\bar{\Omega})} =$$

$$= \|f\|_{C(\bar{\Omega})}\left|bT^n(1)(\theta) + c\int_0^t T^n(1)(s)\,ds\right| = \|f\|_{C(\bar{\Omega})}\left|T^{n+1}(1)(t)\right|.$$

Лему доведено.

Отже, було встановлено, що якщо q — розв'язок рівняння $q = ce^{\beta\theta/q}$, то поведінка послідовності b_n визначається розташуванням q по відношенню до одиниці (наслідок 1), поведінка $\left\|T^n 1\right\|_{C(\bar{\Omega})}$ — поведінкою послідовності b_n (лема 2), а поведінка $\left\|T^n f\right\|_{C(\bar{\Omega})}$ — поведінкою $\left\|T^n 1\right\|_{C(\bar{\Omega})}$. Тому можна сформулювати такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай q — розв'язок рівняння $q = ce^{\beta\theta/q}$, а система* (3) *така, що в ній $b > 0$, $c \ge 0$. Тоді*:

1) *якщо $q < 1$, то рівняння* (1) *асимптотично стійке*;
2) *якщо $q = 1$, то рівняння* (1) *стійке*;
3) *якщо $q > 1$, то рівняння* (1) *нестійке*.

Зазначимо, що якщо $b = 0$, то стійкість (3) визначається розташуванням модуля параметра c по відношенню до одиниці, оскільки розв'язок цієї системи допускає аналітичне зображення

$$\varphi_n(t) = c^n f(\theta), \quad t \in \bar{\Omega}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У випадку, коли $b < 0$ та $c \le 0$, розв'язок задачі (3), (4) можна подати у вигляді $\varphi_n = (-1)^n \tilde{\varphi}_n$, де $\tilde{\varphi}_n$ — розв'язок задачі (3), (4), в якій коефіцієнти b та c замінено їх модулями. Тому питання про стійкість φ_n та $\tilde{\varphi}_n$ є еквівалентними.

У зв'язку з цим, враховуючи, що розв'язок системи (1) має зв'язок з розв'язком системи (3), що виражається рівністю (5), можна сформулювати таку теорему.

Теорема. *Нехай q — розв'язок рівняння $q = ce^{\beta\theta/q}$, а система* (1) *така, що $bc \ge 0$. Тоді*:

1) *якщо $|q| < 1$, то система* (1) *асимптотично стійка*;
2) *якщо $|q| = 1$, то система* (1) *стійка*;
3) *якщо $|q| > 1$, то система* (1) *нестійка*.

Таким чином, питання про стійкість розв'язків розглядуваного рівняння зводиться до визначення розташування по відношенню до одиниці розв'язку трансцендентного рівняння (11), взятого за модулем.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 282 с.
2. *Перестюк М. О., Чернікова О. С.* Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 1. – С. 81 – 94.
3. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1516 – 1521.
4. *Martynyuk A. A., Shen J. H., Stavroulakis I. P.* Stability theorems in impulsive functional differential equations with infinite delay // Adv. Stabil. Theory. Stability and Control: Theory, Meth. and Appl. – London: Taylor & Francis, 2003. – **13**. – P. 153 – 174.
5. *Слынько В. И.* Об условиях устойчивости движения линейных импульсных систем с запаздыванием // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 6. – С. 130 – 138.
6. *Перестюк М. О., Слюсарчук В. Ю.* Умови існування неколивних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсним збуренням у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 790 – 798.
7. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
8. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 1, часть 2. Разложение в ряды. Геометрические приложения. – М., Л.: Гостехтеориздат, 1933. – 235 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Одержано 11.09.08,
після доопрацювання — 06.04.09