УДК 517.51

О. Б. Панасенко (Вінниц. пед. ун-т)

РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА – БЕЗИКОВИЧА ГРАФІКА ОДНІЄЇ НЕПЕРЕРВНОЇ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ

We investigate fractal properties of the graph of function

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

where

$$\beta_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha_1(x) = 0, \\ 1 & \text{if } \alpha_1(x) \neq 0, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1} & \text{if } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1 - \beta_{k-1} & \text{if } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1, \end{cases}$$

$\alpha_k(x)$ is a ternary digit of x in k-position. In particular, we prove that this graph is a fractal set with the Hausdorff – Besicovitch dimension $\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2\left(1 + 2^{\log_3 2}\right)$ and the box-counting dimension $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_3 2$.

Исследуются фрактальные свойства графика функции

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

где

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_1(x) = 0, \\ 1, & \text{если } \alpha_1(x) \neq 0, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{если } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1 - \beta_{k-1}, & \text{если } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1, \end{cases}$$

$\alpha_k(x)$ — k-я троичная цифра x. В частности, доказано, что он является фрактальным множеством с размерностью Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2\left(1 + 2^{\log_3 2}\right)$ и клеточной размерностью $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_3 2$.

Вступ. У роботах [1, 2] досліджуються властивості одного класу функцій, які формально просто задаються за допомогою перетворень цифр аргументу у цифри значень функції. Такі функції названо канторівськими проекторами. У вказаних роботах більшу увагу приділено неперервним функціям з цього класу, а в роботі [3] досліджуються диференціальні і фрактальні властивості однієї такої функції. Її, за словами М. В. Працьовитого, можна вважати найпростішим прикладом неперервної та ніде не диференційовної функції. Обчисленню фрактальної розмірності графіка цієї функції, зокрема розмірності Хаусдорфа – Безиковича, і присвячено дану роботу.

Отже, розглянемо функцію

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \tag{1}$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1 - \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1, \end{cases} \tag{3}$$

$\alpha_k(x)$ — k-та трійкова цифра x. Окрім неперервності і ніде не диференційовності цієї функції в роботі [3] досліджено деякі фрактальні властивості її графіка, зокрема встановлено наступне твердження.

Теорема [3]. 1. *Якщо y_0 — двійково-раціональне число відрізка $[0,1]$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною, і, отже, її фрактальна розмірність дорівнює* 0.

2. *Фрактальна розмірність множини прообразів двійково-ірраціонального значення y_0 обчислюється за формулою*

$$\alpha_0\left(f^{-1}(y_0)\right) = B \log_3 2,$$

де $B = \varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{d_k}{k}$, d_k — кількість пар послідовних двійкових цифр y_0 (до k-го місця включно), в яких компоненти є різними.

Деякі інші властивості цієї функції досліджувались в роботі [4]. Зокрема, доведено, що функція $f(x)$ є N-самоафінною кривою (за Мандельбротом), а також обґрунтовано, що $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{4}{7}$.

Основним результатом цієї роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції* (1) *дорівнює*

$$\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2\left(1 + 2^{\log_3 2}\right) \approx 1{,}34968. \tag{4}$$

Крім цього, ми досліджуємо самоафінні властивості графіка функції в п. 3, а також аналізуємо результат роботи [3] про фрактальну клітинкову розмірність графіка функції в п. 4. Узагальнення одержаних результатів на специфічний клас неперервних канторівських проекторів розглянуто в п. 5.

1. Короткі теоретичні відомості. Нехай (M,ρ) — метричний простір, E — деяка обмежена його підмножина. Сім'я підмножин (E_i) називається *ε-покриттям* множини E, якщо $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ і діаметр $|E_i| \leqslant \varepsilon$ для всіх i. Сім'я підмножин Φ_M простору M називається *покриттям Віталі* для M, якщо для довільної множини $E \subset M$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття $\{E_i\}$ $(E_i \in \Phi_M)$ множини E.

Для заданої множини E та довільних $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ означимо функцію

$$m_\varepsilon^\alpha(E,\Phi_M) = \inf\left\{\sum_i |E_i|^\alpha : \bigcup_i E_i \supset E\right\},$$

де інфімум береться за всіма можливими не більш ніж зчисленними ε-покриттями множини E, $E_i \in \Phi_M$.

Число

$$H^\alpha(E,\Phi_M) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} m_\varepsilon^\alpha(E,\Phi_M)$$

називається *α-мірною мірою* (α*-мірою*) *Хаусдорфа множини* E *відносно сім'ї покриттів* Φ_M. У випадку, коли Φ_M є множиною всіх підмножин простору M, число $H^\alpha(E,\Phi_M)$ називається *α-мірною мірою* (α*-мірою*) *Хаусдорфа множини* E і позначається $H^\alpha(E)$.

Якщо Φ_M — множина всіх замкнених (відкритих) куль в M, то $H^\alpha(E,\Phi_M)$ називається *сферичною α-мірою Хаусдорфа*. У випадку, коли покриття здійснюється кулями однакового діаметра, таку міру називають *ентропійною*. Остання може бути означена рівністю

$$\bar{H}^\alpha(E)=\varliminf_{\varepsilon\to 0} N_E(\varepsilon)\varepsilon^\alpha,$$

де $N_E(\varepsilon)$ — найменша кількість куль діаметра ε, необхідна для покриття E.

Міра $H^\alpha(E,\Phi_M)$, взагалі кажучи, може бути нулем, нескінченністю або додатним числом. Число

$$\alpha_0(E,\Phi_M)=\sup\{\alpha\colon H^\alpha(E,\Phi_M)\neq 0\}=\inf\{\alpha\colon H^\alpha(E,\Phi_M)=0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа – Безиковича множини* E *відносно сім'ї покриттів* Φ_M. У випадку, коли Φ_M є множиною всіх підмножин простору M, число $\alpha_0(E,\Phi_M)$ називається *розмірністю Хаусдорфа – Безиковича множини* E і позначається $\alpha_0(E)$.

Якщо $\bar{H}^\alpha(E)$ — ентропійна α-мірна міра Хаусдорфа, то число

$$\alpha^e(E)=\sup\{\alpha\colon \bar{H}^\alpha(E)\neq 0\}=\inf\{\alpha\colon \bar{H}^\alpha(E)=0\}$$

називається *ентропійною розмірністю множини* E.

В [5, с. 41 – 43] обгрунтовано можливість такого означення клітинкової розмірності множини, яке близьке до поняття ентропійної розмірності. *Нижньою і верхньою клітинковими розмірностями* множини $E\subset\mathbb{R}^n$ називають відповідно

$$\underline{\alpha}^K(E)=\varliminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg\varepsilon}\quad\text{та}\quad \overline{\alpha}^K(E)=\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg\varepsilon},$$

а *клітинковою розмірністю* множини E —

$$\alpha^K(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg\varepsilon} \tag{5}$$

(якщо остання границя існує), де $N(\varepsilon)$ — число „кубів” виду $[m_1\varepsilon,(m_1+1)\varepsilon]\ldots$ $\ldots[m_n\varepsilon,(m_n+1)\varepsilon]$, $m_i\in\mathbb{Z}$, які перетинає множина E.

Нагадаємо також деякі відомості з теорії систематичних дробів [6, с. 21]. Кожне число $x\in[0,1]$ розкладається в ряд

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{s^k}\equiv\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\alpha_k\in\mathbb{N}^0_{s-1}=\{0,1,\ldots,s-1\}$, який називається *$s$-адичним дробом числа* x. При цьому α_k називається *k-ю s-адичною цифрою* x. Для деяких чисел такий розклад єдиний, і вони називаються *s-адично ірраціональними*, а деякі мають рівно два різних розклади — ці числа називають *s-адично раціональними*. Множина всіх чисел з $[0,1]$, які мають перші k s-адичні цифри відповідно $c_1, c_2, \ldots, c_k$, утворюють відрізок, який називається *s-адичним відрізком* (*циліндричною множиною*) *з основою* $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *рангу* k і позначається через $\Delta^s_{c_1 c_2 \ldots c_k}$.

2. Доведення основного результату. Насамперед зауважимо, що графік функції (1) не належить класу множин, фрактальні властивості яких досліджував К. МакМаллен в роботі [7], хоча в дечому є схожим на множини того типу. Однак метод доведення теореми 1 подібний тому методу, який запропонував МакМаллен у своїй роботі.

Доведення проводитимемо таким чином:

1) виділимо клас покриттів графіка і покажемо, що з його допомогою можна обчислити розмірність Хаусдорфа – Безиковича (лема 1);

2) здійснимо покриття відрізка $[0,1]$ множинами, які в певному розумінні відповідають виокремленому класу покриттів графіка функції, і сформулюємо умови тривіальності міри Хаусдорфа графіка функції в термінах покриттів відрізка $[0,1]$ (лема 3);

3) означимо спеціальну ймовірнісну міру на відрізку $[0,1]$, введемо у розгляд додаткові функції та з їх допомогою оцінимо розмірність Хаусдорфа – Безиковича графіка функції спочатку зверху, а потім знизу (леми 7 та 8).

Далі функцію $f(x)$ сприйматимемо як графік, тобто як підмножину Γ_f одиничного квадрату.

Множини виду

$$\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \times \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} = \left\{(x,y)\colon x \in \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}, y \in \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\right\}, \tag{6}$$

$$\alpha_i \in \{0,1,2\}, \quad \beta_i \in \{0,1\},$$

називатимемо *циліндрами* (*циліндричними множинами*) *рангу* $m \times n$, *що відповідають трійковому і двійковому зображенням*.

Зафіксуємо деяке натуральне число k і нехай $l = [k \log_3 2]$ (тут і далі під $[x]$ розуміємо найбільше ціле число, яке не перевищує x). Далі для покриття графіка функції (1) обмежимось циліндрами рангів $l \times k$, $k \in \mathbb{N}$, що відповідають трійковому і двійковому зображенням. Нехай $W = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$, $\alpha_i = \overline{0,2}$, $\beta_i = \overline{0,1}$.

Очевидно, що W є покриттям Віталі одиничного квадрату, оскільки усі циліндри $\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ однакового рангу його покривають, а отже, покривають і довільну його підмножину, а також $\left|\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}\right| \to 0$, $k \to \infty$.

Циліндричні множини з W мають наступні властивості:

1) $\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\beta_{k+1}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{[(k+1)\log_3 2]}} \subset \square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$;

2) кожний циліндр $\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ рангу $l \times k$ містить або два, або шість циліндрів рангу $l^* \times k^*$, $k^* = k+1$, оскільки

$$l^* = [(k+1)\log_3 2] = [k \log_3 2 + \log_3 2] =$$

$$= \begin{cases} l, & \text{якщо } 1 - \{k\log_3 2\} > \log_3 2, \\ l+1, & \text{якщо } 1 - \{k\log_3 2\} \leqslant \log_3 2. \end{cases}$$

Під *покриттям виду* $\mathcal{C}$ графіка функції (1) розумітимемо покриття сукупністю прямокутників, що мають вигляд $\Box^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ (не обов'язково однакових рангів). Кожному покриттю виду $\mathcal{C}$ поставимо у відповідність числову послідовність $(N_k)_{k=1}^{\infty}$, де N_{k_0} — кількість прямокутників виду $\Box^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k_0}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l_0}}$, $l_0 = [k_0 \log_3 2]$, які належать заданому покриттю C виду $\mathcal{C}$.

Лема 1. *Для обчислення розмірності Хаусдорфа – Безиковича довільної множини* $E \subset \mathbb{R}^2$ *можна обмежитись покриттями виду* $\mathcal{C}$.

Доведення. Покажемо, що

$$H^{\alpha}(E) \leqslant H^{\alpha}(E,\mathcal{C}) \leqslant 24(\sqrt{2})^{\alpha} H^{\alpha}(E) \tag{7}$$

для довільної множини $E \subset [0,1]\times[0,1]$ і довільного $\alpha > 0$. Ліва частина останньої подвійної нерівності є очевидною. Доведемо праву частину. Нехай $\varepsilon > 0$ — фіксоване додатне число, E_i — довільне ε-покриття множини E. Для кожної множини E_i існує такий найменший номер k_i, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{k_i} \leqslant |E_i| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k_i-1}$. Тоді за властивістю 2 циліндричних множин кожна множина E_i може бути покрита не більше ніж $4\cdot 6 = 24$ циліндрами $\Box^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k_i}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l_i}}$, а тому, покриваючи відповідним чином множини E_i, ми можемо побудувати ε-покриття виду $\mathcal{C}$ множини E. Маємо

$$\sum_i \left(2^{-k_i}\right)^{\alpha} \leqslant \sum_i |E_i|^{\alpha},$$

$$\sum_i 24\left(2^{-k_i}\right)^{\alpha} \leqslant \sum_i 24\,|E_i|^{\alpha},$$

$$\sum_i 24\left(2^{-k_i}\sqrt{2}\right)^{\alpha} \leqslant 24(\sqrt{2})^{\alpha}\cdot\sum_i |E_i|^{\alpha}.$$

Перейдемо до інфімуму за всіма покриттями E_i, врахувавши, що $\left|\Box^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}\right| \leqslant$ $\leqslant 2^{-k}\sqrt{2}$:

$$m^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\mathcal{C}) \leqslant \inf\left\{\sum_i 24\left|\Box^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k_i}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l_i}}\right|^{\alpha}\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_i 24\left(2^{-k_i}\sqrt{2}\right)^{\alpha}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 24(\sqrt{2})^{\alpha}\inf\left\{\sum_i |E_i|^{\alpha}\right\} \leqslant 24(\sqrt{2})^{\alpha} m^{\alpha}_{\varepsilon}(E).$$

Переходячи в останніх нерівностях до границі при $\varepsilon \to 0$, знаходимо (7). Це означає, що $H^{\alpha}(E,\mathcal{C})$ і $H^{\alpha}(E)$ набувають значень 0 та ∞ одночасно, тобто $\alpha_0(E,\mathcal{C}) =$ $= \alpha_0(E)$.

Лему доведено.

Лема 2. *Міра Хаусдорфа* $H^{\alpha}(\Gamma_f) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує покриття виду* $\mathcal{C}$ *множини* Γ_f, *для якого*

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-\alpha k} < \varepsilon.$$

Доведення. Безпосередньо з означення α-мірної міри Хаусдорфа і леми 1 випливає наступне твердження: α-мірна міра Хаусдорфа $H^{\alpha}(\Gamma_f) = 0$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}$, існує покриття C виду $\mathcal{C}$ множини Γ_f, для якого $\sum_{k=1}^{\infty} N_k \left|\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right|^{\alpha} < \varepsilon\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}$. Маємо

$$\varepsilon\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha} > \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left|\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right|^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\sqrt{2^{-2k}+3^{-2l}}\right)^{\alpha} >$$

$$> \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(\sqrt{2^{-2k}+3^{-2k\log_3 2+2}}\right)^{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(2^{-2k}+9\cdot 2^{-2k}\right)^{\alpha/2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[N_k\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}\cdot 2^{-\alpha k}\right],$$

звідки й одержуємо твердження леми.

Лему доведено.

Функція (1) встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами $[0,1]$ і Γ_f. Побудуємо покриття усіх чисел відрізка $[0,1]$, яке приблизно відповідатиме покриттю множинами $\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ графіка Γ_f.

Позначимо через $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ об'єднання усіх тих циліндричних множин (трійкових відрізків) $\Delta^3_{i_1i_2\ldots i_k}$ з основою $i_1i_2\ldots i_k$ рангу k, для яких виконуються такі співвідношення:

$i_j = \alpha_j$ для $j = 1,\ldots,l$,

$i_j = i_{j-1}$, якщо $\beta_j = \beta_{j-1}$, $j = \overline{l+1,k}$,

$i_j \neq i_{j-1}$, якщо $\beta_j \neq \beta_{j-1}$, $j = \overline{l+1,k}$.

Під покриттям виду $\mathcal{C}$ чисел відрізка $[0,1]$ ми розумітимемо його покриття множинами $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$, де, як і раніше, $l = [k\log_3 2]$. Кожному покриттю C виду $\mathcal{C}$ відрізка $[0,1]$ поставимо у відповідність числову послідовність $(N_k)_{k=1}^{\infty}$, де N_{k_0} — кількість множин $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k_0}}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{l_0}}$ у покритті C, $l_0 = [k_0\log_3 2]$.

Безпосередньо з означення множин $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ випливає, що для фіксованих $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$, $\beta_1,\ldots,\beta_k$ множина $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ складається з $2^{d_k-d_l}$ циліндричних множин $\Delta^3_{i_1i_2\ldots i_k}$ рангу k, де d_k — кількість таких j, що $\beta_j \neq \beta_{j+1}$, $j = \overline{1,k-1}$.

Оскільки кожному покриттю виду $\mathcal{C}$ множини Γ_f відповідає покриття виду $\mathcal{C}$ відрізка $[0,1]$ і навпаки, до того ж відповідні числові послідовності (N_k) тотожно рівні, то з леми 2 випливає таке твердження.

Лема 3. *$H^{\alpha}(\Gamma_f) = 0$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує покриття C виду $\mathcal{C}$ чисел відрізка $[0,1]$, для якого*

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-\alpha k} < \varepsilon.$$

Наслідок 1. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f) \leqslant \alpha$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує покриття виду $\mathcal{C}$ відрізка $[0,1]$, для якого $\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-\alpha k} < \varepsilon$.*

Наслідок 2. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f) \geqslant \alpha$ тоді і тільки тоді, коли існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільного покриття виду $\mathcal{C}$ відрізка $[0,1]$ виконується нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-\alpha k} > \varepsilon$.*

Нехай $\delta = \log_2\left(1+2^{\log_3 2}\right)$ — число, проголошене в умові теореми як розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції (1). Зазначимо, що $2^{\delta} = 1+2^{\log_3 2}$.

Нехай

$$p_0 = \frac{1}{2^\delta},$$

$$p_1 = \frac{2^{\log_3 2 - 1}}{2^\delta}.$$

Тоді очевидно, що $p_0 + 2p_1 = 1$. Означимо на відрізку $[0,1]$ імовірнісну міру μ таким чином. Нехай

$$\mu(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}, \tag{8}$$

де $i_1 = \beta_1$; $i_k = 0$, якщо $\alpha_k = \alpha_{k-1}$; $i_k = 1$, якщо $\alpha_k \neq \alpha_{k-1}$, $k > 1$. Покажемо, що так означена функція μ є мірою на $[0,1]$. Справді,

$$\mu(\Delta_0) + \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2) = p_0 + p_1 + p_1 = 1,$$

$$\mu(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0}) + \mu(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1}) + \mu(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 2}) =$$

$$= p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}(p_0 + p_1 + p_1) = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k} = \mu(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}).$$

Для кожного значення $x \in [0,1]$ означимо додаткові функції $g_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, таким чином. Нехай $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$, тоді

$$g_k(x) = \left(2^{d_k \log_3 2 - d_l}\right)^{1/k},$$

де d_k — кількість таких j, що $\beta_j \neq \beta_{j+1}$, $j = \overline{1, k-1}$.

Лема 4. *Має місце рівність*

$$\mu(\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}) = \left[g_k(x)\cdot 2^{-\delta}\right]^k,$$

де $x \in \Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$.

Доведення. Нехай $x \in \Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$. Беручи до уваги (8), одержуємо

$$\mu(\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}) = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}\cdot 2^{d_k - d_l} = \frac{\left(2^{\log_3 2 - 1}\right)^{s_k}}{2^{\delta k}}\cdot 2^{d_k - d_l} =$$

$$= \left(2^{(\log_3 2 - 1)s_k + d_k - d_l}\right)\cdot 2^{-\delta k},$$

де s_k — кількість таких j, що $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$, $j = \overline{1, k-1}$. Проте із означення функції (1) випливає, що $d_k \equiv s_k$ для кожного k, тому

$$\mu(\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}) = \left(2^{d_k \log_3 2 - d_l}\right)\cdot 2^{-\delta k} = \left[g_k(x)\cdot 2^{-\delta}\right]^k.$$

Лема 5. *Для кожного* $x \in [0,1]$ *вірним є хоча б одне з наступних тверджень*:

1) *існує нескінченна кількість таких* k, *що* $g_k(x) \geqslant 1$, *тобто* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_k(x) \geqslant 1$;

2) *існує така підпослідовність* $(g_{k_i}(x))$ *послідовності* $(g_k(x))$, *для якої* $\lim\limits_{i\to\infty} g_{k_i}(x) = 1$.

Доведення. Нехай $x \in [0,1]$. Тоді

$$g_k(x) = \left(2^{d_k \log_3 2 - d_l}\right)^{1/k} = 2^{(d_k/k)\log_3 2 - d_l/k} = 2^{(d_k/k)\log_3 2 - (d_l/l)(l/k)}.$$

Якщо існує нескінченна кількість таких k, для яких $\frac{d_k}{k} \geqslant \frac{d_l}{l}$, то лема має місце, оскільки виконується її перше твердження. Справді, з того, що $\frac{d_k}{k} \geqslant \frac{d_l}{l}$ і $\log_3 2 \geqslant$ $\geqslant \frac{[k \log_3 2]}{k}$, випливає $\varlimsup_{k\to\infty} g_k(x) \geqslant 1$.

Припустимо, що нерівність $\frac{d_k}{k} \geqslant \frac{d_l}{l}$ виконується лише для скінченного числа k. Це означає, що існує номер k_0 такий, що для всіх $k \geqslant k_0$ виконується нерівність $\frac{d_k}{k} < \frac{d_l}{l}$. Розглянемо підпослідовність $\left(\frac{d_{k_i}}{k_i}\right)$, $i \in \mathbb{N}$, $k_1 > k_0$, $k_i = [k_{i+1} \log_3 2]$. Ця послідовність є спадною і обмеженою знизу, а тому є збіжною за теоремою Вейєрштрасса. Нехай $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{d_{k_i}}{k_i} = L$. Тоді

$$\lim_{i\to\infty} g_{k_i}(x) = 2^{L\left(\log_3 2 - \lim\limits_{i\to\infty} \frac{[k_i \cdot \log_3 2]}{k_i}\right)} = 1.$$

Лему доведено.

Лема 6. *Для майже всіх* $x \in [0,1]$ (*відносно міри* μ) $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 1$.

Доведення. З означення міри μ випливає, що кожне число $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in$ $\in [0,1]$ породжує послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин (p_{i_n}), $n = 1, 2, \ldots$, члени якої набувають значень $\frac{1}{2^\delta}$ і $\frac{2^{\log_3 2 - 1}}{2^\delta}$ з імовірностями $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$ відповідно. Тоді за посиленим законом великих чисел Колмогорова послідовність $(p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k})^{1/k}$ збігається для майже всіх x (відносно міри μ). Але збіжність останньої послідовності рівносильна збіжності послідовності $\left(\frac{d_k}{k}\right)$, оскільки

$$(p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k})^{1/k} = \frac{\left(2^{\log_3 2 - 1}\right)^{d_k/k}}{2^\delta}.$$

Таким чином, для майже всіх x існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{d_k}{k} = L$. Тоді для цих x

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = 2^{L\left(\log_3 2 - \lim\limits_{k\to\infty} \frac{[k \cdot \log_3 2]}{k}\right)} = 1.$$

Лему доведено.

Лема 7. *Має місце наступна оцінка розмірності Хаусдорфа – Безиковича графіка функції* (1): $\alpha_0(\Gamma_f) \leqslant \delta$.

Доведення. Побудуємо відповідне покриття відрізка $[0,1]$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нехай C_k складається з таких непорожніх множин $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$, що для $x \in \Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ виконується нерівність $g_k(x) > 2^{-\varepsilon}$. Такі множини не перекриваються і задовольняють нерівність

$$\mu(\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}) = \left[g_k(x) \cdot 2^{-\delta}\right]^k > 2^{-(\delta+\varepsilon)k}$$

за лемою 4. Нехай M_k — кількість елементів покриття C_k, тоді $M_k < 2^{(\delta+\varepsilon)k}$.

Зазначимо, що кожне $x \in [0,1]$ покривається покриттям C_k для нескінченного числа k, оскільки згідно з лемою 5 або $\varlimsup\limits_{k\to\infty} g_k(x) \geqslant 1 > 2^{-\varepsilon}$, або $\lim\limits_{i\to\infty} g_{k_i}(x) = 1$

для деякої підпослідовності $(g_{k_i}(x))$ $\Big($тоді те, що $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g_k(x) > 2^{-\varepsilon}$, випливає з означення границі послідовності$\Big)$. Це означає, що

$$C = \bigcup_{k\geqslant k_0} C_k$$

є покриттям $[0,1]$ для довільного вибору k_0. Виберемо k_0 достатньо великим, таким, щоб $\sum_{k\geqslant k_0} 2^{-\varepsilon k} < \varepsilon$; тоді число N_k, пов'язане з C, задовольняє співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-(\delta+2\varepsilon)k} = \sum_{k\geqslant k_0} M_k 2^{-(\delta+2\varepsilon)k} < \sum_{k\geqslant k_0} 2^{-\varepsilon k} < \varepsilon.$$

Згідно з наслідком 1 леми 3 одержуємо $\alpha_0(\Gamma_f) \leqslant \delta$.

Лему доведено.

Лема 8. *Має місце наступна оцінка розмірності Хаусдорфа – Безиковича графіка функції* (1): $\alpha_0(\Gamma_f) \geqslant \delta$.

Доведення. Зафіксуємо $\gamma < \delta$. Покажемо, що існує таке $\varepsilon > 0$, що $\sum_{k=1}^{\infty} N_k \times 2^{-\gamma k} > \varepsilon$ для довільного покриття виду $\mathcal{C}$ відрізка $[0,1]$; оцінка розмірності тоді безпосередньо випливатиме з наслідку 2 леми 3.

Нехай

$$E_{k_0} = \Big\{x \in [0,1]\colon g_k(x) < 2^{\delta-\gamma} \ \text{ для всіх } \ k \geqslant k_0\Big\}.$$

Ми довели, що $g_k(x)$ прямує до одиниці для майже всіх x і $2^{\delta-\gamma} > 1$, тому можна підібрати k_0 так, щоб $\mu(E_{k_0}) > 0$. Нехай $\varepsilon = \min\{\mu(E_{k_0}), 2^{-\gamma k_0}\}$.

Тепер нехай C — довільне, але фіксоване покриття виду $\mathcal{C}$ відрізка $[0,1]$. Якщо $N_i \neq 0$ для деякого $i < k_0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-\gamma k} > N_i 2^{-\gamma i} > 2^{-\gamma k_0} \geqslant \varepsilon.$$

Тому припустимо, що $N_k = 0$ для всіх $k < k_0$.

Зафіксуємо $k \geqslant k_0$. Тоді для елементів покриття C таких, що $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l} \bigcap E_{k_0} \neq \varnothing$, матимемо

$$\mu\left(\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}\right) = \left[g_k(x)2^{-\delta}\right]^k < \left[2^{\delta-\gamma}\cdot 2^{-\delta}\right]^k = 2^{-\gamma k},$$

$$\mu(E_{k_0}) < \sum_{k\geqslant k_0} M_k \mu\left(\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}\right) < \sum_{k\geqslant k_0} M_k \cdot 2^{-\gamma k},$$

де обране x лежить на перетині обох множин, $M_k \leqslant N_k$ — кількість множин виду $\Delta^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$, які покривають E_{k_0}. Оскільки C покриває E_{k_0}, то одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k 2^{-\gamma k} = \sum_{k\geqslant k_0} N_k 2^{-\gamma k} \geqslant \sum_{k\geqslant k_0} M_k 2^{-\gamma k} > \mu(E_{k_0}) \geqslant \varepsilon.$$

Згідно з наслідком 2 леми 3 $H^{\gamma}(\Gamma_f) \neq 0$, а оскільки $\gamma < \delta$, то з цього і випливає, що $\alpha_0(\Gamma_f) \geqslant \delta$.

Лему доведено.

Попередні дві леми і доводять теорему 1.

3. Самоафінність функції за Каме. Графік функції (1) має цікаві самоафінні властивості.

Доведемо, що для кожного $x \in [0,1]$ виконується рівність

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} f(x). \tag{9}$$

Справді, нехай $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $f(x) = \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$. Тоді

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = f(\Delta^3_{0\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^2_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} = \Delta^2_{0\beta_1\beta_2\ldots},$$

оскільки з (2) маємо $\gamma_1 = 0$; якщо $\alpha_1 = 0$, то $\gamma_2 = \beta_1 = 0$, а якщо $\alpha_1 \neq 0$, то $\gamma_2 = \beta_1 = 1$; з (3) випливає, що $\gamma_k = \beta_{k-1}$, $k > 2$. Таким чином,

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\beta_1}{2^2} + \frac{\beta_2}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2}\Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots} = \frac{1}{2} f(x).$$

З геометричної точки зору доведена рівність означає, що на циліндричному відрізку Δ^3_0 графік функції $f(x)$ є „зменшеною афінною копією” самого себе на $[0,1]$.

Введемо параметри $p \in \{0,1\}$ та $r \in \{0,1,2\}$ і розглянемо шість функцій:

$$f_{p,r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} p, & \text{якщо } \alpha_1(x) = r, \\ 1-p, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq r, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1-\beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1, \end{cases}$$

$\alpha_k(x)$ — k-та цифра у трійковому зображенні x. Очевидно, що $f_{0,0}(x)$ є функцією (1). Як і при доведенні рівності (9), можна показати, що для всіх $x \in [0,1]$ виконуються рівності

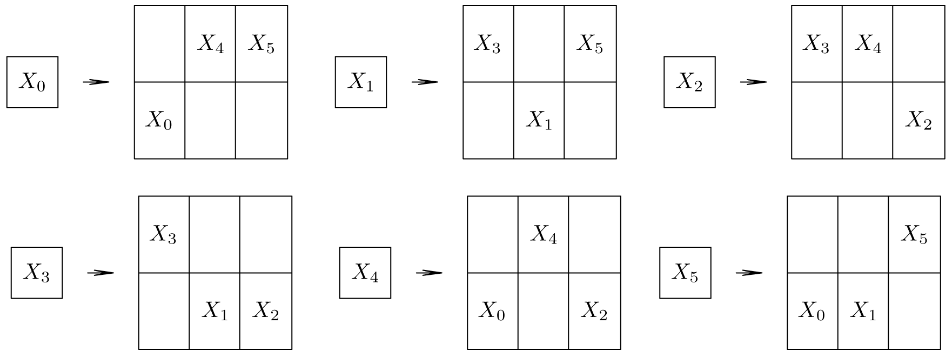
$$f\left(\frac{x+1}{3}\right) = \frac{f_{1,1}(x)}{2} + \frac{1}{2},$$

$$f\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{f_{1,2}(x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

З геометричної точки зору це означає, що на циліндричних відрізках Δ^3_1, Δ^3_2 графік функції $f(x)$ є „зменшеною копією” графіків функцій $f_{1,1}(x)$ та $f_{1,2}(x)$ відповідно.

Отже, приходимо до такого геометричного тлумачення графіка функції (1).

Позначимо графік функції $f(x)$ через X_0. Його структуру зображено на рисунку. Він складається з трьох частин, кожна з яких міститься у прямокутниках шириною $\frac{1}{3}$ і висотою $\frac{1}{2}$, до того ж перша з них є афінним відображенням самого графіка X_0 в такий прямокутник, друга — множини X_4, а третя — X_5. Структура множин X_4, X_5 та інших, що пов'язані з ними, також показана на рисунку.



Розглянемо наступну систему функціональних рівнянь (для зручності запису вона поділена на шість підсистем):

$$\begin{cases} f_0\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f_0(x)}{2}, \\ f_0\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{f_4(x)}{2} + \dfrac{1}{2}, \\ f_0\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = \dfrac{f_5(x)}{2} + \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f_3(x)}{2}, \\ f_1\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{f_1(x)}{2} - \dfrac{1}{2}, \\ f_1\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = \dfrac{f_5(x)}{2} - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f_3(x)}{2}, \\ f_2\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{f_4(x)}{2} - \dfrac{1}{2}, \\ f_2\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = \dfrac{f_2(x)}{2} - \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_3\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f_3(x)}{2}, \\ f_3\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{f_1(x)}{2} - \dfrac{1}{2}, \\ f_3\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = \dfrac{f_2(x)}{2} - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_4\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f_0(x)}{2}, \\ f_4\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{f_4(x)}{2} + \dfrac{1}{2}, \\ f_4\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = \dfrac{f_2(x)}{2} + \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_5\left(\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{f_0(x)}{2}, \\ f_5\left(\dfrac{x+1}{3}\right) = \dfrac{f_1(x)}{2} + \dfrac{1}{2}, \\ f_5\left(\dfrac{x+2}{3}\right) = \dfrac{f_5(x)}{2} + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи, зокрема, є шість неперервних функцій $f_i(x)$, для яких $f_i(0) = 0$, $i = \overline{0,5}$, де f_0 — досліджувана функція (1). Графіки функцій f_0, f_4, f_5 належать квадрату $[0,1] \times [0,1]$, а графіки f_1, f_2, f_3 — квадрату $[0,1] \times [-1,0]$, до того ж під дією певного афінного перетворення кожний з них є неперервною підмножиною іншого графіка (і свого в тому числі). Це свідчить про те, що функція (1) є самоафінною за Каме [8].

Функція $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ називається *самоафінною за Каме*, якщо виконуються такі умови:

1) існує скінченне число неперервних функцій $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_i(0) = 0$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, N-1$ і $f_0 = f$;

2) існують натуральні $m, n > 1$ такі, що для кожного $l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ і кожного $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ існує відповідне $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ і виконується рівність

$$f_l\left(\frac{x+j}{n}\right)-f_l\left(\frac{j}{n}\right)=\frac{f_k(x)}{m},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Р. Кеньйон та Ю. Перес [9], а також С. Такахаші [10] вивчали специфічні класи самоафінних множин, які тісно пов’язані з самоафінними функціями за Каме. Обидві роботи містять формули для обчислення розмірності Хаусдорфа – Безиковича таких множин. Ми дотримуватимемось роботи [10].

Нехай $1<m\leqslant n$ — цілі числа. Проведемо $n-1$ вертикальні та $m-1$ горизонтальні прямі і розіб’ємо одиничний квадрат на mn рівних прямокутників. Розглянемо відображення

$$\psi_{i,j}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n^{-1}&0\\0&m^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}i/n\\j/m\end{pmatrix},$$

$0\leqslant i<n$, $0\leqslant j<m$ — цілі. Нехай g_l — деяке відображення $\{0,1,\ldots,n-1\}\times\times\{0,1,\ldots,m-1\}$ в $\{0,1,\ldots,N\}$, $l=1,2,\ldots,N$.

Крім того, нехай $X_0=\varnothing$ і $\{X_1,X_2,\ldots,X_N\}$ — сім’я непорожніх компактних множин, які задовольняють рівність

$$X_l=\bigcup_{i,j}\psi_{i,j}\left(X_{g_l(i,j)}\right),\quad l=1,\ldots,N.$$

Покладемо $X\equiv X_1$ і припустимо, що $\{X_1,X_2,\ldots,X_N\}$ є *неспрощуваною* сукупністю множин в тому розумінні, що для кожної пари індексів (l,l') X_l містить афінне стиснуте відображення множини $X_{l'}$. Нехай

$$N(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)=\left|\left\{\Delta^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 00\ldots}:\Delta^n_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\times\Delta^m_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}\bigcap X\neq\varnothing\right\}\right|,$$

тобто $N(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)$ — кількість афінних відображень $X_1,X_2,\ldots,X_N$ у множині X, що містяться у „рядку” $[0,1]\times\Delta^m_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}$. Тоді

$$\alpha_0(X)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log_m\left(\sum_{\substack{\beta_i=\overline{0,m-1}\\ i=\overline{1,k}}}N(\beta_1,\ldots,\beta_k)^{\log_n m}\right).\tag{10}$$

У загальному випадку обчислення границі в останній формулі може бути досить складним. Доведемо, що формула (10) для функції (1) дає результат (4).

Лема 9. *Для функції* (1) *має місце рівність*

$$\sum_{\substack{\beta_i=\overline{0,m-1}\\ i=\overline{1,k}}}N(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)^{\log_3 2}=\left(1+2^{\log_3 2}\right)^k.$$

Доведення. Зафіксуємо номер k і розглянемо довільну, але фіксовану послідовність $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$, $\beta_i\in\{0,1\}$. Позначимо через $t(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)\equiv t$ число змін цифр у послідовності $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k$, де $\beta_0=0$. Доведемо, що $N(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)==2^t$. Дійсно, якщо $\beta_i\neq\beta_{i+1}$, то згідно з (3) $\alpha_i\neq\alpha_{i+1}$, тобто α_{i+1} може набувати двох значень, а якщо $\beta_1=1$, то згідно з (2) і α_1 може набувати двох значень (саме цим пояснюється наявність додаткового першого члена послідовності β_0).

Очевидно, що всього існує C_k^t різних послідовностей $0,\beta_1,\ldots,\beta_k$, число змін цифр яких дорівнює t. Таким чином,

$$\sum_{\substack{\beta_i=\overline{0,m-1}\\ i=\overline{1,k}}} N\left(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k\right)^{\log_3 2} = \sum_{t=0}^{k}\left(C_k^t\cdot 2^{t\log_3 2}\right) = \left(1+2^{\log_3 2}\right)^k.$$

Лему доведено.

Враховуючи, що графік функції (1) є самоафінним за Каме, та використовуючи лему 9 і формулу (10), одержуємо, що розмірність Хаусдорфа – Безиковича функції (1)

$$\alpha_0(X) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log_2\left(\left(1+2^{\log_3 2}\right)^k\right) = \log_2\left(1+2^{\log_3 2}\right).$$

4. Фрактальна клітинкова розмірність графіка досліджуваної функції. В роботі [3] обґрунтовано оцінку зверху фрактальної клітинкової розмірності графіка функції (1) числом $\log_2 3$. Для цього використовувалось покриття графіка функції прямокутниками виду

$$\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\times\Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k} = \left\{(x,y)\colon x\in\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}, y\in\Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}\right\}.$$

Значення $\log_2 3$ не може бути прийняте за клітинкову розмірність графіка функції (1). Ми доведемо, що за допомогою покриття графіка функції циліндрами рангу $l\times k$, що відповідають трійковому і двійковому зображенням (6), де $l=[k\log_3 2]$, можна дати більш ефективне покриття графіка функції однаковими прямокутниками.

Теорема 2. *Фрактальна клітинкова розмірність графіка функції* (1) *дорівнює*

$$\alpha^K\left(\Gamma_f\right) = 2-\log_3 2 \approx 1{,}36907.$$

Доведення. Здійснимо відповідне покриття графіка функції прямокутниками однакового рангу, а саме, покриватимемо графік функції циліндричними множинами рангу $l\times k$, що відповідають трійковому та двійковому зображенням $\square^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l}$ (6), де $l=[k\log_3 2]$. Нехай N_k — найменша кількість прямокутників, які необхідні для цього.

Оскільки кожне α_i, $i=\overline{1,l}$, не залежить від значень β_j, $j=\overline{l+1,k}$, то N_k знаходиться як добуток найменшої кількості прямокутників рангу $l\times l$, що покривають графік функції, на 2^{k-l} — кількість різних послідовностей $\beta_{l+1}\ldots\beta_k$. Очевидно, що при $l=k$ $N_k=3^l$. Таким чином, найменша кількість циліндрів рангу $l\times k$, що відповідають трійковому і двійковому зображенням і покривають графік функції (1), дорівнює $N_k=3^l\cdot 2^{k-l}$. Тоді

$$\alpha^K\left(\Gamma_f\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{\lg N_k}{-\lg 2^{-k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\lg 3^l 2^{k-l}}{-\lg 2^{-k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\lg\left(\dfrac{3}{2}\right)^l+\lg 2^k}{\lg 2^k} =$$

$$= 1+\lim_{k\to\infty}\frac{\lg\left(\dfrac{3}{2}\right)^l}{\lg 2^k} = 1+\lim_{k\to\infty}\frac{l}{k}\log_2\frac{3}{2} = 1+\log_3 2\cdot\log_2\frac{3}{2} =$$

$$= 1+\log_3\frac{3}{2} = 2-\log_3 2$$

$\left(\text{тут ми врахували, що } \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{l}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{[k\log_3 2]}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k\log_3 2}{k} - \dfrac{\{k\log_3 2\}}{k}\right) = \right.$
$\left. = \log_3 2\right)$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Таке ж саме значення клітинкової розмірності одержимо, якщо покриватимемо графік функції квадратами зі стороною 3^{-k}, $k \in \mathbb{N}$. Справді, як показано в [3], найменша кількість прямокутників зі сторонами 3^{-k} та 2^{-k}, які покривають графік функції (1), дорівнює 3^k. Кожний з цих прямокутників в свою чергу може бути покритий $\left[\dfrac{3^k}{2^k}\right] + 1$ квадратами зі стороною 3^{-k}. Таким чином, число N_k квадратів зі стороною 3^{-k}, які покривають графік функції (1), дорівнює $3^k \cdot \left(\left[\dfrac{3^k}{2^k}\right] + 1\right)$. Тоді, з одного боку,

$$\alpha^K(\Gamma_f) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lg N_k}{-\lg 3^{-k}} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\lg\left(3^k \cdot \dfrac{3^k}{2^k}\right)}{-\lg 3^{-k}} = \log_3 \frac{9}{2},$$

а з іншого —

$$\alpha^K(\Gamma_f) \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{\lg 3^k\left(\dfrac{3^k}{2^k} + 1\right)}{-\lg 3^{-k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\lg\left(\dfrac{9^k}{2^k} + 3^k\right)}{-\lg 3^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lg\left(\dfrac{9^k}{2^k}\left(1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right)\right)}{\lg 3^k} =$$

$$= \log_3 \frac{9}{2} + \lim_{k\to\infty} \frac{\lg\left(1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right)}{\lg 3^k} = \log_3 \frac{9}{2},$$

з чого і випливає, що $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_3 2$.

***Зауваження* 2.** Покриття прямокутниками з довжинами сторін 3^{-k} і 2^{-k} неефективне тому, що при $k \to \infty$ вони стають дуже „вузькими”, і для покриття графіка функції квадратами такого ж діаметра потрібна „набагато менша” їх кількість. Покриття, яке використовувалось в доведенні теореми 2, є ефективним тому, що прямокутники, якими покривається графік функції, при $k \to \infty$ є близькими до квадратів, і мінімальна необхідна для покриття їх кількість оцінюється точним виразом. Покриття, яке використовується в зауваженні 1, також приводить до значення клітинкової розмірності, оскільки воно здійснюється квадратами, а їх кількість оцінюється зверху і знизу точними виразами.

5. Фрактальні властивості неперервних канторівських проекторів. Одержані результати з допомогою аналогічних міркувань можна узагальнити на клас функцій, які входять до неперервних канторівських проекторів [1, 2].

Нехай $x = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{s^k} \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ — s-адичний розклад дійсного числа x. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \tag{11}$$

де для фіксованого елемента $i \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) = i, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq i, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1 - \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1. \end{cases}$$

У роботах [1, 2] доведено наступні твердження.

Теорема. *Функція* $f(x)$, *визначена формулою* (11), *є ніде не диференційовною.*

Теорема. 1. *Кожне двійково-раціональне значення* $y_0 = \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k(0)}$ *функції* $f(x)$ *є образом скінченного числа точок.*

2. *Кожне значення* y_1 *функції* (11), *яке містить у двійковому розкладі період* (10), *є образом фрактальної множини точок з розмірністю Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0 = \log_n(n-1)$, *яке лише зчисленним числом точок відрізняється від свого замикання, що є множиною канторівського типу.*

3. *Якщо значення* y_2 *функції* $f(x)$ *у двійкому зображенні містить період* $(i_1 i_2 \ldots \ldots i_k)$, *то*

$$\alpha_0\left(f^{-1}(y_2)\right) = \frac{s \ln(n-1)}{k \ln n}, \quad s = |i_k - i_1| + \sum_{j=1}^{k-1} |i_j - i_{j+1}|.$$

Мають місце наступні теореми (доведення проводиться аналогічно, як і для функції (1)).

Теорема 3. *Фрактальна клітинкова розмірність графіка функції* (11) *дорівнює* $2 - \log_s 2$.

Теорема 4. *Розмірність Хаусдорфа – Безиковича графіка функції* (11) *обчислюється за формулою*

$$\alpha_0\left(\Gamma_f\right) = \log_2\left(1 + (s-1)^{\log_s 2}\right).$$

1. *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – Киев: КГПИ, 1989. – С. 78 – 90.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
3. *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості неперервної ніде не диференційовної функції // Наук. зап. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2002. – № 3. – С. 327 – 338.
4. *Коваль В.* Самоафінні графіки функцій // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2004.— № 4. – С. 292 – 299.
5. *Falconer K. J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. – Second edition.— Chichester, Wiley, 2003.— 338 p.
6. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
7. *McMullen C.* The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets // Nagoya Math. J. – 1984. – **96**. – P. 1 – 9.
8. *Kamae T.* A characterization of self-affine functions // Jap. J. Appl. Math. – 1986. – **3**. – P. 217 – 280.
9. *Kenyon R., Peres Y.* Hausdorff dimensions of sofic affine-invariant sets // Isr. J. Math. – 1996. – **94**. – P. 157 – 178.
10. *Takahashi S.* Dimension spectra of self-affine sets // Ibid. – 2002. – **127**. – P. 1 – 18.

Одержано 12.03.08