УДК 514. 75

Ю. С. Федченко (Одес. нац. акад. харч. технологій)

НОРМАЛЬНІ ТА ТАНГЕНЦІАЛЬНІ ГЕОДЕЗИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Special infinitesimal geodesic deformations of rotation surfaces in the Euclidean space E^3 are considered.

Рассматриваются специальные инфинитезимальные геодезические деформации поверхностей вращения в евклидовом пространстве E^3.

Є багато відомих типів інфінітезимальних деформацій поверхонь: згинання [1], ареальні [2], конформні [3], поворотні [4] та ін. Серед них особливу роль відіграють геодезичні деформації, які були введені у 1971 р. М. С. Синюковим та М. Л. Гаврильченком [5]. Вони показали, що існує зв'язок між геодезичними деформаціями та геодезичними відображеннями, знайшли необхідну та достатню умову існування таких деформацій. У монографії [6] вказано, що інфінітезимальні геодезичні деформації допускають поверхні Ліувілля і лише вони.

В. Т. Фоменко вивчав нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2 [7] в ізотермічній параметризації і показав, що задачу про існування таких деформацій можна звести до дослідження системи диференціальних рівнянь комплексної змінної і сфера „в цілому” допускає нетривіальні геодезичні деформації. Загалом задача про існування інфінітезимальних геодезичних деформацій є актуальною та малодослідженою. У цій роботі вона розв’язана для поверхонь обертання з деякими додатковими умовами на тип деформації.

Розглянемо поверхню S в евклідовому просторі E^3 з векторно-параметричним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}\left(x^1, x^2\right)$ та її деформацію $\tilde{S}_\varepsilon$: $\bar{r}_\varepsilon = \bar{r}\left(x^1, x^2\right) + \varepsilon\bar{U}\left(x^1, x^2\right)$. Тут $\bar{U}\left(x^1, x^2\right) = u_i\bar{r}^i + \overset{0}{u}\,\bar{n}$ — вектор зміщення, ε — інфінітезимальний параметр, $u_i\left(x^1, x^2\right)$, $\overset{0}{u}\left(x^1, x^2\right)$ —- відповідно тангенціальні та нормальна компоненти вектора зміщення. Геодезична (проективна) деформація (P) за означенням зберігає на деформованій поверхні „в головному” геодезичні криві, тобто для кожної геодезичної кривої поверхні S її образ на $\tilde{S}_\varepsilon$ є кривою, що з точністю до членів другого порядку інфінітезимального параметра ε задовольняє диференціальні рівняння геодезичних кривих [5]. У статті вивчаються інфінітезимальні геодезичні деформації поверхонь обертання, які є нормальними (PN) : $u_i = 0$ або тангенціальними (PT) : $\overset{0}{u} = 0$.

Опишемо коротко будову статті. У першому пункті знайдено основні рівняння нормальних геодезичних деформацій поверхонь; показано, що якщо немінімальна поверхня обертання допускає інфінітезимальну нормальну геодезичну деформацію, то ця поверхня є сферою або прямим круговим циліндром, а деформація — гомотетією; єдині мінімальні поверхні обертання — катеноїди — не допускають інфінітезимальну нормально-геодезичну деформацію.

У другому пункті встановлено основні рівняння тангенціальних геодезичних деформацій поверхонь; знайдено всі поверхні обертання, які допускають нетривіальні афінні тангенціальні геодезичні деформації, і показано, що всі інші поверхні обертання допускають лише тривіальні деформації, які є згинаннями; показано, що торси допускають нетривіальні афінні геодезично-тангенціальні деформації, а поверхні сталої гауссової кривини K допускають інфінітезимальні геодезично-тангенціальні деформації.

1. Геодезичні деформації поверхонь, що є нормальними. ***1.1.*** У цьому підпункті отримаємо основні рівняння інфінітезимальних геодезично-нормальних деформацій (PN-деформацій).

Для інфінітезимальних геодезичних деформацій [5]

$$P_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h, \tag{1}$$

де δ_j^i — символ Кронекера, $P_{ij}^h \equiv \delta\Gamma_{ij}^h$ — варіація символів Кристоффеля, ψ_i — деякий градієнтний ковектор, тобто $\psi_i = \partial_i \psi$ (ψ — деяка (опорна) функція ковектора).

Геодезичні деформації, для яких $\psi_i = 0$, називають афінними (PA-деформації); вважатимемо їх тривіальними геодезичними деформаціями. Вони зберігають „в головному" афінну зв'язність поверхні: $\delta\Gamma_{ij}^h = 0$.

За означенням деформація називається нормальною, якщо

$$u_i = 0. \tag{2}$$

Варіації метрики і афінної зв'язності при будь-якій деформації мають вигляд

$$\delta g_{ij} \equiv 2\varepsilon_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2\overset{0}{u} b_{ij}, \tag{3}$$

$$\delta\Gamma_{ij}^h \equiv P_{ij}^h = g^{ah}\left(\nabla_j \varepsilon_{ia} + \nabla_i \varepsilon_{ja} - \nabla_a \varepsilon_{ij}\right), \tag{4}$$

де $g_{ij} = \overline{r}_i \overline{r}_j$, $b_{ij} = \overline{r}_{ij} \overline{n}$ — коефіцієнти першої та другої фундаментальних форм поверхні відповідно, ∇_j — коваріантна похідна по змінній x^j.

На основі (1) – (4) для геодезичної деформації маємо

$$\psi_i g_{kj} + \psi_j g_{ki} = \overset{0}{u}_k b_{ij} - \overset{0}{u}_i b_{kj} - \overset{0}{u}_j b_{ik} - \overset{0}{u} \nabla_k b_{ij}, \quad \overset{0}{u}_k = \partial_k \overset{0}{u}. \tag{5}$$

Альтернацією (5) по індексах i, k отримаємо

$$2\overset{0}{u}_k b_{ij} - 2\overset{0}{u}_i b_{kj} = \psi_i g_{kj} - \psi_k g_{ij}. \tag{6}$$

Внаслідок (6) рівняння (5) набирають вигляду

$$-2\overset{0}{u}_j b_{ik} = 2\overset{0}{u}\nabla_k b_{ij} + \psi_i g_{kj} + \psi_k g_{ij} + 2\psi_j g_{ki}.$$

Розмірковуючи у зворотному напрямку, неважко переконатись, що останні рівняння еквівалентні (1). Отже, система рівнянь

$$\begin{aligned} \psi_i &= \partial_i \psi, \\ -2\overset{0}{u}_j b_{ik} &= 2\overset{0}{u}\nabla_k b_{ij} + \psi_i g_{kj} + \psi_k g_{ij} + 2\psi_j g_{ki}, \end{aligned} \tag{7}$$

є основною для дослідження інфінітезимальних PN-деформацій.

1.2. Дослідимо інфінітезимальні PN-деформації на поверхнях обертання.

Теорема 1. *Якщо немінімальна поверхня обертання допускає інфінітезимальну нормальну геодезичну деформацію, то ця поверхня є сферою або прямим круговим циліндром, а деформація — гомотетією.*

Доведення. Після згортки (7_2) з g^{ik} маємо

$$-H\overset{0}{u}_j = \overset{0}{u}H_j + \frac{3}{2}\psi_j ,$$

де $H_i = \partial_i H$, H — середня кривина поверхні.

Інтегруючи це рівняння, одержуємо розв'язок $\frac{3}{2}\psi = -H\overset{0}{u} + C_2$, C_2 — стала. Звідси (7_2) набере вигляду

$$-3\overset{0}{u}_j b_{ik} + Hg_{ij}\overset{0}{u}_k + Hg_{kj}\overset{0}{u}_i + 2\,Hg_{ki}\overset{0}{u}_j =$$

$$= \overset{0}{u}(3\nabla_k b_{ij} - H_i g_{kj} - H_k g_{ij} - 2\,H_j g_{ki}). \tag{8}$$

У свою чергу, після згортки (8) з g^{ij} отримаємо

$$-3\overset{0}{u}_j b_k^j + 5\,H\overset{0}{u}_k = H_k\overset{0}{u}. \tag{9}$$

Проведемо дослідження рівнянь (8) та (9) у стандартній параметризації поверхні обертання $r = \big(\psi(\rho)\cos\theta,\ \psi(\rho)\sin\theta,\ \varphi(\rho)\big)$, $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$. Оскільки для взятої параметризації $g_{12} = b_{12} = 0$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$, $H_2 = 0$, то з означення коваріантної похідної $\nabla_1 b_{12} = \partial_1 b_{12} + \Gamma_{11}^{\alpha} b_{\alpha 2} + \Gamma_{21}^{\alpha} b_{1\alpha}$ випливає $\nabla_1 b_{12} = 0$. Беручи до уваги рівняння Петерсона – Майнарді – Кодацці, маємо $\nabla_2 b_{11} = \nabla_1 b_{21} = 0$. Аналогічно отримуємо $\nabla_2 b_{22} = 0$. Тепер з системи рівнянь (8) за умови $H \neq 0$ знаходимо $\overset{0}{u}_2 = 0$. Внаслідок цього сама система набирає вигляду

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{u}_2 = 0, \\
&-3\overset{0}{u}_1 b_{11} + 4\,H\overset{0}{u}_1 g_{11} = \overset{0}{u}(3\nabla_1 b_{11} - 4\,H_1 g_{11}), \\
&\overset{0}{u}_1 Hg_{22} = \overset{0}{u}(3\nabla_2 b_{12} - H_1 g_{22}), \\
&-3\overset{0}{u}_1 b_{22} + 2\,H\overset{0}{u}_1 g_{22} = \overset{0}{u}(3\nabla_2 b_{21} - 2\,H_1 g_{22}),
\end{aligned} \tag{10}$$

а з системи (9) маємо $\overset{0}{u}_1\big(-3b_1^1 + 5\,H\big) = H_1\overset{0}{u}$. Інтегруючи останнє рівняння, отримуємо вираз для нормальної компоненти вектора зміщення:

$$\overset{0}{u} = C_3 e^{\int \frac{H_1}{5H - 3b_1^1} d\rho}, \tag{11}$$

де C_3 — число, відмінне від нуля.

Підставляючи $\overset{0}{u}$ в (10), знаходимо обмеження на вибір поверхні:

$$\frac{H_1}{5H - 3b_1^1}\big(-3b_1^1 + 4H\big) = 3\nabla_1 b_1^1 - 4H_1,$$

$$\frac{H_1}{5H - 3\,b_1^1}Hg_{22} = 3\nabla_2 b_{12} - H_1 g_{22}, \tag{12}$$

$$\frac{H_1}{5H - 3b_1^1}\left(-3b_{22} + 2Hg_{22}\right) = 3\nabla_2 b_{21} - 2H_1 g_{22}. \qquad (13)$$

З рівнянь (12) та (13) дістаємо

$$H_1\left(-3\frac{b_{22}}{5H - 3b_1^1} + \frac{Hg_{22}}{5H - 3b_1^1} + g_{22}\right) = 0.$$

Можливі два випадки:

1) $-3\dfrac{b_{22}}{5H - 3b_1^1} + \dfrac{Hg_{22}}{5H - 3b_1^1} + g_{22} = 0.$

Оскільки $b_{ij} = b_i^s g_{sj}$, $g_{12} = 0$, $b_{22} = b_2^2 g_{22}$, $H = b_1^1 + b_2^2$, то $H = 0$, що неможливо за умовою теореми.

2) H — стала. Тоді з (11) маємо, що $\overset{0}{u} = \text{const}$, а з системи рівнянь (10) бачимо, що $\nabla_2 b_{21} = \nabla_1 b_{22} = \nabla_2 b_{12} = 0$, $\nabla_1 b_{11} = 0$. Отже, $\nabla_k b_{ij} = 0$. Позаяк $\frac{3}{2}\psi = -H\overset{0}{u} + C_2$, H — стала та $\overset{0}{u} = \text{const}$, то і $\psi = \text{const}$.

Оскільки немінімальні поверхні, про які йдеться в теоремі, повинні мати коваріантно сталий другий фундаментальний тензор, то, як відомо, це можуть бути лише сфери, площини та прямі кругові циліндри [8]. Площини виключено з розгляду. Внаслідок того, що $\overset{0}{u}$ — стала, інфінітезимальні нормальні геодезичні деформації для сфери та циліндра є гомотетіями ($\delta g_{ij} = cg_{ij}$, c — стала).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Катеноїд не допускає інфінітезимальну нормальну геодезичну деформацію.*

Доведення. Відомо, що мінімальними поверхнями обертання є лише катеноїди. Тому у випадку мінімальних поверхонь з умови $\frac{3}{2}\psi = -H\overset{0}{u} + C_2$ випливає, що $\psi = \text{const}$. З рівняння (9) отримали $\overset{0}{u}_j b_k^j = 0$. Оскільки $K \neq 0$, то з останнього рівняння маємо $\overset{0}{u} = \text{const}$, а (8) виконується за умови $\nabla_k b_{ij} = 0$. Відомо, що остання умова виконується лише на сфері, прямому круговому циліндрі, площині [8] та не виконується на катеноїді.

Теорему доведено.

2. Геодезичні деформації поверхонь, що є тангенціальними. ***2.1.*** Розглянемо тепер тангенціальні деформації (T-деформації). За означенням T-деформація визначається умовою $\overset{0}{u} = 0$, і тоді варіація метрики набере вигляду $2\varepsilon_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j$. Диференціюючи останню рівність коваріантно по змінній x^k, отримуємо

$$2\nabla_k \varepsilon_{ij} = \nabla_{jk} u_i + \nabla_{ik} u_j, \quad \text{де} \quad \nabla_{jk} = \nabla_k \nabla_j.$$

Переставляючи індекси, одержуємо ще два набори $2\nabla_i \varepsilon_{jk}$, $2\nabla_j \varepsilon_{ik}$, і, враховуючи (4), умову тангенціальної деформації та тотожність Річчі $\nabla_{kj} u_i - \nabla_{jk} u_i = K(u_k g_{ij} - u_j g_{ik})$, отримуємо рівняння (1) у вигляді $\nabla_{ij} u_k = K\left[u_i g_{jk} - u_k g_{ij}\right] + \psi_i g_{kj} + \psi_j g_{ki}$.

Розмірковуючи у зворотному напрямку, бачимо, що від останнього рівняння легко перейти до рівняння (1). Отже, система

$$\begin{aligned}\psi_i &= \partial_i \psi,\\ \nabla_i u_k &= u_{ki},\\ \nabla_j u_{ki} &= K\left[u_i g_{jk} - u_k g_{ij}\right] + \psi_i g_{kj} + \psi_j g_{ki}\end{aligned} \tag{14}$$

є основною системою для PT-деформацій.

2.2. Дослідимо, які поверхні обертання допускають тривіальні геодезично-тангенціальні деформації (PTA-деформації). У цьому випадку система (14) набирає вигляду

$$\begin{aligned}\nabla_i u_k &= u_{ki},\\ \nabla_j u_{ki} &= K\left[u_i g_{jk} - u_k g_{ij}\right].\end{aligned} \tag{15}$$

Внаслідок тотожності Річчі умова інтегровності для (15_1) виконується на підставі (15_2). В свою чергу, умова інтегровності для (15_2) має вигляд

$$K\left[u_{ji} g_{kl} - u_{li} g_{kj} - u_{il} g_{kj} + u_{ij} g_{kl}\right] =$$

$$= \nabla_l K\left[u_i g_{kj} - u_k g_{ij}\right] - \nabla_j K\left[u_i g_{kl} - u_k g_{il}\right].$$

Згорнемо останню рівність з g^{ij}. Тоді отримаємо, що при $K \neq 0$

$$u_{lk} + u_{kl} = b g_{kl}.$$

Здиференціюємо останню рівність по x^m та скористаємося (15). Маємо $\partial_m b = b_m = 0$, $b = \text{const} = 2A$. Звідси

$$u_{lk} + u_{kl} = 2A g_{kl}. \tag{16}$$

Рівняння (16) показують, що PTA-деформації поверхні обертання можуть бути лише інфінітезимальними гомотетіями, які є спеціальними конформними деформаціями.

Теорема 3. *Серед поверхонь обертання* $(K \neq 0)$ $r = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \varphi(\rho))$ *лише поверхня з меридіаном* $\sqrt{1+\varphi'^2} = C_6\,\rho^{\frac{C_5}{A-C_5}}$ *допускає* PTA-*деформацію з вектором зміщення*

$$\bar{U} = C_6^2 (A - C_5)\,\rho^{\frac{A+C_5}{A-C_5}}\,\bar{r}^{\,1} + (C_5\theta + C_4)\,\rho^2\,\bar{r}^{\,2},$$

де C_4, C_5, C_6, A — *сталі. На всіх інших поверхнях обертання* PTA-*деформації є лише згинанням.*

Доведення. Розглянемо рівняння (16) у розгорнутому вигляді. Враховуючи, що при взятій параметризації $g_{12} = b_{12} = 0$, маємо

$$\begin{aligned}u_{11} &= A\,g_{11},\\ u_{12} + u_{21} &= 0,\\ u_{22} &= A\,g_{22}.\end{aligned}$$

Отримані рівняння досліджено в [9]. Тут можливі такі випадки:

1) $u_1 = 0$, $u_2 = C_4\rho^2$, $A = 0$ (деформація є згинанням);

2) поверхні сталої кривини: сфера, псевдосфера, $A = 0$ (деформація є згинанням);

3) $u_1 = A F \int F \, d\rho$, $u_2 = (C_5\theta + C_4)\rho^2$, $F = \sqrt{1 + \varphi'^2} = C_6 \rho^{\frac{C_5}{A - C_5}}$, C_4, C_5, C_6 — сталі. У цьому випадку вектор зміщення має вигляд

$$\bar{U} = C_6^2(A - C_5)\rho^{\frac{A + C_5}{A - C_5}} \bar{r}^{\,1} + (C_5\theta + C_4)\rho^2 \bar{r}^{\,2}.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що знайдені компоненти вектора зміщення задовольняють систему (15).

Теорему доведено.

2.3. Для торсів ($K = 0$) система (15) набирає вигляду

$$\nabla_i u_k = u_{ki},$$
$$\nabla_j u_{ki} = 0.$$

Врахуємо специфіку поверхонь і проведемо дослідження даної системи рівнянь в афінній системі координат з символами Кристоффеля другого роду $\Gamma_{ij}^k = 0$. За останньої умови система легко інтегрується, і ми переконуємось, що компоненти вектора зміщення при PTA-деформації торсів мають вигляд $u_1 = c_7 u + c_8 v + c_9$, $u_2 = c_{10} v + c_{11} u + c_{12}$, де $c_i = \text{const}$, $i = 7, 8, \ldots, 12$.

2.4. Дослідимо систему (14) для неафінних інфінітезимальних PT-деформацій, тобто у випадку $\psi_i \neq 0$.

На основі тотожності Річчі умова інтегровності для (14_2) виконується внаслідок (14_3). Умова інтегровності для (14_3) набирає вигляду

$$K\left[u_{ji}g_{kl} - u_{li}g_{kj} - u_{il}g_{kj} + u_{ij}g_{kl}\right] =$$
$$= \nabla_l K\left[u_i g_{kj} - u_k g_{ij}\right] - \nabla_j K\left[u_i g_{kl} - u_k g_{il}\right] + \nabla_l \psi_i g_{kj} - \nabla_j \psi_i g_{kl}. \quad (17)$$

Згорнемо (17) з g^{ij}:

$$\nabla_l \psi_k = -K(u_{lk} + u_{kl}) + b_1 g_{kl}. \quad (18)$$

У свою чергу, умова інтегровності для (18) має вигляд

$$\nabla_m b_1 g_{kl} - \nabla_l b_1 g_{km} = \nabla_m K(u_{lk} + u_{kl}) - \nabla_l K(u_{mk} + u_{km}). \quad (19)$$

Теорема 4. *Поверхні сталої гауссової кривини K допускають інфінітезимальні неафінні PT-деформації, при цьому тангенціальні компоненти вектора зміщення та опорна функція знаходяться з довільністю в 9 констант.*

Доведення. Дійсно, з рівнянь (17) та (18) випливає, що для поверхонь сталої кривини ($K = \text{const}$) $b_1 = 0$ і рівність (19) виконується. В цьому випадку маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \nabla_i u_k &= u_{ki}, \\ \nabla_j u_{ki} &= K\left[u_i g_{jk} - u_k g_{ij}\right] + \psi_i g_{kj} + \psi_j g_{ki}, \\ \nabla_l \psi_k &= -K(u_{lk} + u_{kl}), \\ \psi_i &= \partial_i \psi, \end{aligned} \quad (20)$$

яка є замкненою системою Коші і при виборі 9 початкових даних має єдиний розв'язок [10].

Теорему доведено.

У випадку торсів можна вибрати нормальну афінну систему координат, в якій $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$. За цих умов (20) легко інтегрується, і ми знаходимо компоненти вектора зміщення при РТ-деформації торсів: $u_1 = \tilde{c}_1 u^2 + \tilde{c}_2 u\nu + \tilde{c}_3 u + \tilde{c}_4 \nu + \tilde{c}_5$, $u_2 = \tilde{c}_2 \nu^2 + \tilde{c}_1 u\nu + \tilde{c}_6 u + \tilde{c}_7 \nu + \tilde{c}_8$, $\psi = \tilde{c}_1 u + \tilde{c}_2 \nu + \tilde{c}_9$, де $\tilde{c}_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots, 9$.

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
2. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки: Навч. пос. – Одеса: Астропринт, 1999. – 168 с.
3. *Фесенко Е. Д.* Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 3 (82).
4. *Лейко С. Г.* Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидового пространства // Докл. РАН. – 1994. – **344**, № 2. – С. 162 – 164.
5. *Синюков Н.С., Гаврильченко М. Л.* Бесконечно малые геодезические деформации поверхностей // Третья респ. конф. математиков Белоруссии. – Минск, 1971.
6. *Радулович Ж., Микеш Й., Гаврильченко М. Л.* Геодезические отображения и деформации римановых пространств. – Одесса: Оломоуц, 1997.
7. *Фоменко В. Т.* Об однозначной определенности замкнутых поверхностей относительно геодезических отображений // Докл. АН. – 2006. – **407**, № 4. – С. 453 – 456.
8. *Кованцов Н. И.* Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ: сб. задач. – Киев, 1989.
9. *Лейко С.Г., Федченко Ю. С.* Вектори зміщень для поворотно-конформних деформацій поверхонь обертання // Вісн. Одес. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2003. – **8**, вип. 2. – С. 50 – 54.
10. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Одержано 29.01.08,
після доопрацювання — 14.10.08