

## ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗАМКНЕНИХ 1-ФОРМ НА ПОВЕРХНЯХ З КРАЄМ

The closed 1-forms with isolated zeros on surfaces with edge are considered. A criterion on topological equivalence of closed 1-forms is proved.

Исследуются замкнутые 1-формы с изолированными нулями на поверхностях с краем. Доказан критерий топологической эквивалентности замкнутых 1-форм.

**1. Вступ.** У 1994 р. А. А. Ошемков [1] та в 1996 р. В. В. Шарко [2] отримали топологічну класифікацію функцій Морса на поверхнях. У 1999 р. С. І. Максименко [3] та у 2003 р. О. О. Пришляк [4], узагальнивши ці результати, одержали топологічну класифікацію  $m$ -функцій на поверхнях та на поверхнях з краєм відповідно. Вивченням топологічної класифікації векторних полів (потоків) з незамкненими стійкими за Пуассоном траєкторіями займалися С. Х. Арансон, В. З. Грінес, Е. В. Жужома, І. А. Тельних та ін. Саме ці математики отримали їх топологічну класифікацію у роботах [5–7] і ввели поняття числа обертання Пуанкаре, гомотопічного класу обертання, орбіти гомотопічного класу обертання. О. О. Пришляк та С. В. Білун [8] одержали топологічну класифікацію замкнених 1-форм Морса з замкненими рекурентними інтегральними кривими.

Всі ці роботи пов'язані з питанням топологічної класифікації шарувань з особливостями на многовиді. Під шаруванням з особливостями розуміємо подання многовида у вигляді об'єднання шарів, що є підмноговидами меншої, фіксованої розмірності, і точок, які називаються особливостями. Шарування з особливостями можуть задаватися функціями, векторними полями (або потоками), диференціальними формами та ін.

Оскільки на орієнтованій поверхні роду  $g = 0$  (сфері) не може бути незамкнених рекурентних інтегральних кривих, то, як узагальнення результатів роботи [8], у роботі [9] наведено топологічну класифікацію довільних замкнених 1-форм з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях. У роботах [10, 11] отримано топологічну класифікацію замкнених 1-форм з довільними рекурентними інтегральними кривими на замкнених орієнтованих і неорієнтованих поверхнях відповідно. А саме, з теореми 1 роботи [10] відомо, що якщо на замкненій орієнтованій поверхні  $M$  роду  $g \geq 1$  задано дві замкнені 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , то для того, щоб  $\omega_1$  і  $\omega_2$  були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:

1) для  $G(\omega_i) \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ , існував гомеоморфізм  $f: M \rightarrow M$ , обмеження якого на  $G(\omega_1)$  задає ізоморфізм графів  $G(\omega_1)$  і  $G(\omega_2)$ ; області, що обмежені ребрами графа  $G(\omega_1)$ , переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі  $G(\omega_2)$ ; додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні — у від'ємні;

2) для кожної з областей з  $M \setminus G(\omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , що містить хоча б одну незамкнену рекурентну криву, виконувались умови: для областей роду  $r = 1$  числа обертання півкривих замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$  повинні бути сумірними; для областей роду  $r \geq 2$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , що мають сумірні гомотопічні класи обертання.

З теорем 4.1–4.3 роботи [11] відомо, що якщо на замкненій неорієнтованій поверхні  $M$  роду  $g \geq 1$  задано дві замкнені 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , то для того, щоб  $\omega_1$  і  $\omega_2$  були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб:

1) для  $G(\omega_i) \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ , існував гомеоморфізм  $f: M \rightarrow M$ , обмеження якого на  $G(\omega_1)$  задає ізоморфізм графів  $G(\omega_1)$  і  $G(\omega_2)$ ; області, що обмежені ребрами графа  $G(\omega_1)$ , переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі  $G(\omega_2)$ ; додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні — у від'ємні;

2) для кожної з областей з  $M \setminus G(\omega_i)$ ,  $i = 1, 2$ , що містить хоча б одну незамкнену рекурентну півкриву, виконувались умови: для орієнтованих областей роду  $r = 1$  числа обертання незамкнених рекурентних півкривих замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$  повинні бути сумірними; для орієнтованих областей роду  $r \geq 2$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , що мають сумірні гомотопічні класи обертання; для неорієнтованих областей роду  $r = 3$  числа обертання півкривих замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$  повинні бути сумірними; для неорієнтованих областей роду  $r \geq 4$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , що мають однакові орбіти обертання.

Дану статтю присвячено вивченню топологічної класифікації замкнених 1-форм на компактних поверхнях з краєм. Її метою є знаходження необхідних і достатніх умов топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями на поверхнях з краєм.

**2. Основні означення.** Аналогічно до означень, введених у роботі [8] для замкнених поверхонь, введемо означення для компактних поверхонь з краєм.

Нехай  $F$  — гладка (класу  $C^\infty$ ) поверхня з краєм  $\partial F$  роду  $p$ . Розглянемо на поверхні  $F$  замкнену 1-форму  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , де  $A, B: U \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкі функції,  $U \subset F$  — відкрита множина,  $(x, y)$  — координати в  $U$ .

Нехай  $N(\omega) = \{z \in F: A(z) = B(z) = 0\}$  — множину нулів 1-форми  $\omega$ .

**Означення 2.1.** Крива  $\gamma \subset F$ , що не містить нулів, називається інтегральною кривою 1-форми  $\omega$ , якщо локально вона є рівнем функції  $f$  такої, що  $\omega = df$ .

Ми будемо розглядати тільки максимальні інтегральні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і називати їх просто кривими чи траєкторіями.

Для кожного досить малого околу  $U(z)$  точки  $z \in M \setminus N(\omega)$  крива, що проходить через  $z$ , розбиває  $U(z)$  на дві частини: додатну  $\{v: f(v) - f(z) > 0\}$  і від'ємну  $\{v: f(v) - f(z) < 0\}$ .

**Означення 2.2.** Диференціальні 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$  на  $F$  називаються траєкторно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм  $h: F \rightarrow F$ , що відображає нулі в нулі, а криві на криві. При цьому  $h$  називається траєкторною еквівалентністю. Якщо, крім того,  $h$  зберігає розбиття кожного малого околу точки  $z \in F \setminus N(\omega)$  на додатну і від'ємну частини, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні 1-форми — топологічно еквівалентними.

Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, а від'ємних — від'ємною підобластю.

**Означення 2.3.** Нуль 1-форми називається ізольованим, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.

Нехай інтегральні криві  $\omega$ , що з'єднують нулі, розбивають поверхню  $F$  на скінченне число областей, в кожній з яких визначено свою координатну систему  $(x, y)$ . Тоді в кожній області подамо інтегральну криву  $\gamma$  у вигляді  $x = x(t)$ ,

$y = y(t)$ . Введемо на  $F$  таку ріманову метрику, що диференціал дуги інтегральної кривої  $\gamma: x = x(t), y = y(t)$  задовольняє умову  $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ , де  $E, G, F$  — коефіцієнти першої квадратичної форми при деякому вкладенні в  $\mathbb{R}^n$ .

Нехай  $z_0 \notin \partial F$  — нуль замкненої 1-форми  $\omega$ , тобто  $A(z_0) = B(z_0) = 0$ . Оскільки 1-форма  $\omega$  є замкненою, то локально існує функція  $f: \omega = df$  і  $A(z_0) = B(z_0) = \frac{\partial f(z_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(z_0)}{\partial y}$ , тобто  $z_0$  — критична точка функції  $f$ . Відомо [12], що для кожної критичної точки  $z_0$  (крім локального мінімуму і максимуму) існує окіл, у якому функція  $f$  спряжена з функцією  $\operatorname{Re}(x + iy)^k$  для деякого числа  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Можливі лише два види ізольованих точок: сідло і центр. Далі в роботі будемо розглядати замкнені 1-форми лише з ізольованими нулями, інтегральні криві яких мають скінченне число сідел і сепаратрис. Відомо, що інтегральні криві не мають джерел (витоків), стоків і траєкторій,  $\omega$ - або  $\alpha$ -граничними множинами яких є криві, гомеоморфні колу  $S^1$ .

**Означення 2.4.** Інтегральна крива  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow F$  називається рекурентною, якщо  $\gamma \subset \{z \in F: \exists \{t_n\} \rightarrow \pm\infty, \gamma(t_n) \rightarrow z, n \rightarrow \infty\}$ .

З означення випливає, що якщо інтегральна крива є замкненою або скрізь щільною на  $F$ , то вона є рекурентною.

У кожній точці інтегральної кривої  $\gamma$  задамо єдиний вектор  $\bar{p} = (A; B) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ .

**Означення 2.5.** Будемо вважати, що в кожній точці кривої  $\gamma$  вектор  $\bar{p} = (A, B) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$  направлений від інтегральної кривої з меншим значенням рівня (з від'ємної частини околу) до інтегральної кривої з більшим значенням рівня (в додатну частину околу), тобто вектор  $\bar{p}$  локально порівнює дві сусідні інтегральні криві замкненої 1-форми  $\omega$ , і називатимемо його порівнюючим напрямком у точці.

**Означення 2.6.** Нехай точка  $z \in \gamma$ ,  $(a(z); b(z))$  — вектор у точці  $z$ . Будемо говорити, що у точці  $z$  вектор  $(b(z); -a(z))$  утворений поворотом вектора  $(a(z); b(z))$  за годинниковою стрілкою, а вектор  $(-b(z); a(z))$  — проти годинникової стрілки.

**Означення 2.7.** Компонентою краю  $\partial F$  будемо називати підмножину з  $\partial F$ , яка гомеоморфна  $S^1$ , і позначатимемо її через  $K$ .

**3. Поведінка інтегральних кривих в околі компоненти краю  $K$ .** Дослідимо наступні варіанти поведінки інтегральних кривих в околі компоненти краю  $K$ :

1)  $K \subseteq \partial F$  належить об'єднанню інтегральних кривих  $\omega$ :

а) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить хоча б одне сідло;

б) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  не містить жодного сідла;

2) інтегральні криві  $\omega$  знаходяться в загальному положенні до компоненти краю  $K \subseteq \partial F$  (означення загального положення кривих, множин  $N^+$  і  $N^-$  наведено у пп. 3.2):

а) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить лише точки  $N^+$ ;

б) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить лише точки  $N^-$ ;

в) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить точки  $N^+$  і  $N^-$ ;

3) інтегральні криві  $\omega$  всюди трансверсально перетинають  $K \subseteq \partial F$ .

Розглянемо детальніше кожен із цих випадків.

**3.1.  $K \subseteq \partial F$  належить об'єднанню інтегральних кривих  $\omega$ .** а) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить хоча б одне сідло. Відомо [12], що інтегральні криві замкненої 1-форми мають лише сідла парної валентності, але у даній роботі розглядалися замкнені 1-форми на замкнених поверхнях і, відповідно, сідла не знаходилися на межі. Аналогічно до роботи [12] у випадку поверхні з краєм  $F$  сідла у  $\text{int } F$  мають лише парну валентність, а на межі можливі сідла різної валентності. Тому розглянемо такі випадки:

а<sub>1</sub>) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить лише сідла парної валентності.

**Лема 3.1.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм  $\partial F$  і  $K \subseteq \partial F$  — компонента краю, яка містить лише сідла парної валентності. Тоді на  $K$  кількість таких сідел може бути як парною, так і непарною.

**Доведення.** Позначимо через  $y_i \in K$  довільне сідло парної валентності, через  $U(y_i)$  його оточення. Розглянемо ліву крайню точку перетину  $\partial U(y_i) \cap K$ , і від цієї точки почнемо рухатися у  $\text{int } F$  по  $\partial U(y_i)$  до правої крайньої точки перетину  $\partial U(y_i) \cap K$ . Рухаючись по  $\partial U(y_i)$ , при перетині з кожною наступною сепаратрисою сідла  $y_i$  порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний. Оскільки валентність сідла  $y_i$  є парною, то порівнюючий напрямок буде змінюватися парну кількість разів, а тому напрямки порівнюючих напрямків у лівій і правій крайніх точках перетину  $\partial U(y_i) \cap K$  будуть однаковими по відношенню до  $K$  (тобто або будуть одночасно направлені до  $K$ , або від  $K$ ). Тому при проходженні через оточення сідла довільної парної валентності, яке знаходиться на компоненті краю  $K$ , порівнюючі напрямки не змінюють напрямку (зокрема це видно з рис. 1, а для сідла валентності 4).

Отже, незалежно від кількості сідел парної валентності порівнюючі напрямки будуть узгодженими в околі  $K$ .

Лему доведено.

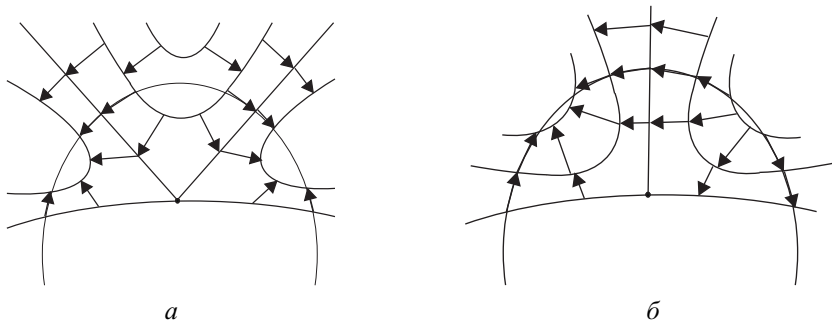


Рис. 1

У цьому випадку заклеїмо дану компоненту  $K$  диском  $D^2$ , в середину диска помістимо центр, який будемо називати „0”-центром, а навколо нього побудуємо регулярні рівні. Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної компоненти  $K$  і продовживши їх у  $\text{int } D^2$  до „0”-центра через порівняння регулярних рівнів, легко бачити, що нові побудовані регулярні рівні будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ . Після приклеювання диска новоутворену поверхню будемо позначати через  $\tilde{F}$  і ставити на ній біля нового центра „0”.

а<sub>2</sub>) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить лише сідла непарної валентності.

**Лема 3.2.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм  $\partial F$  і  $K \subseteq \partial F$  — компонента краю, яка містить лише сідла непарної валентності. Тоді кількість таких сідел на  $K$  є парною.

**Доведення.** Позначимо через  $y_i \in K$  довільне сідло непарної валентності, через  $U(y_i)$  його оточення. Розглянемо ліву крайню точку перетину  $\partial U(y_i) \cap K$ , і від цієї точки почнемо рухатися у  $\text{int } F$  по  $\partial U(y_i)$  до правої крайньої точки перетину  $\partial U(y_i) \cap K$ . Рухаючись по  $\partial U(y_i)$ , при перетині з кожною наступною сепаратрисою сідла  $y_i$  порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний. Оскільки валентність сідла  $y_i$  є непарною, то порівнюючий напрямок буде змінюватися непарну кількість разів, а тому напрямки порівнюючих напрямків у лівій і правій крайніх точках перетину  $\partial U(y_i) \cap K$  будуть різними по відношенню до  $K$ . Тому при проходженні через оточення сідла довільної парної валентності, яке знаходиться на компоненті краю  $K$ , порівнюючі напрямки змінюють напрямок (зокрема це видно з рис. 1, б для сідла валентності 3). Але порівнюючі напрямки мають бути узгодженими в околі  $K$ , тому кількість сідел непарної валентності має бути парною на  $K$ .

Лему доведено.

Нехай  $y_i, i = \overline{1, k}$ , — сідла непарної валентності на  $K$ . В цьому випадку заклеїмо дану компоненту  $K$  диском  $D^2$ , в середину диска помістимо сідло, яке будемо називати „ $k$ ”-сідлом, і з’єднаємо його сепаратрисами з сідлами на  $K$ . Зауважимо, що якщо на  $K$  є лише два сідла непарної валентності, то „2”-сідла не буде, а сідла  $y_1$  і  $y_2$  будуть з’єднуватися лише однією сепаратрисою. Новоутворені сепаратриси розбивають  $D^2$  на  $k$  областей, в кожну з яких помістимо центр із концентричними колами навколо. Для новоутворених центрів нові позначення вводити не будемо, оскільки всі центри однозначно задаються „ $k$ ”-сідлом.

Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної  $K$  і продовживши їх у  $\text{int } D^2$  до „ $k$ ”-сідла (або до сепаратриси у випадку  $k = 2$ ) через порівняння регулярних рівнів, легко бачити, що нові побудовані регулярні рівні будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ . Після приклеювання диска новоутворену поверхню будемо позначати через  $\tilde{F}$  і ставити на ній біля нового сідла „ $k$ ”.

а<sub>3</sub>) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить сідла і парної, і непарної валентності.

**Лема 3.3.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм  $\partial F$  і  $K \subseteq \partial F$  — компонента краю, яка містить сідла і парної, і непарної валентності. Тоді кількість сідел парної валентності є довільною, а непарної валентності — парною.

Доведення безпосередньо випливає з лем 3.1, 3.2.

У даному випадку, не беручи до уваги сідла парної валентності, проводимо описані вище міркування для сідел з непарною валентністю. Утворюємо „ $k$ ”-сідло (чи при  $k = 2$  сепаратрису), центри з концентричними колами, як показано на рис. 2, і продовжуємо порівнюючі напрямки у  $\text{int } D^2$ .

б) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  не містить жодного сідла. У цьому випадку  $K$  є регулярним рівнем. Заклеїмо дану компоненту  $K$  диском  $D^2$  і в середину диска помістимо центр, який також будемо називати „0”-центром. Аналогічно, розставивши порівнюючі напрямки в околі даної  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  до „0”-центра через порівняння регулярних рівнів, легко бачити, що нові побудовані регулярні рівні будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на

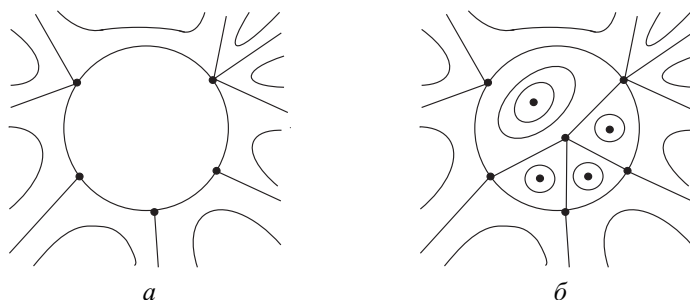


Рис. 2

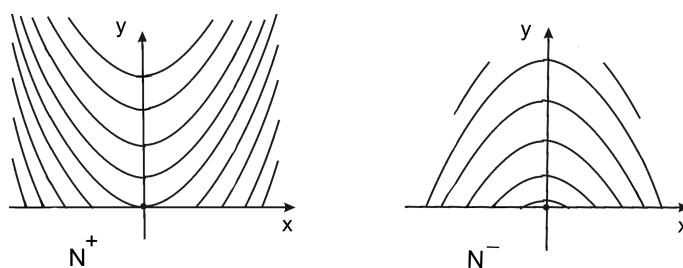


Рис. 3

приклеєний диск  $D^2$ . Після приклеювання диска новоутворену поверхню будемо позначати через  $\tilde{F}$  і ставити на ній біля нового центра „0”.

Далі компоненти краю, описані у цій частині, будемо називати компонентами краю варіанта 1.

**3.2. Інтегральні криві  $\omega$  знаходяться в загальному положенні до компоненти краю  $K \subseteq \partial F$ .** Розглянемо точку  $z_0 \in K \subseteq \partial F$ , і нехай в околі точки  $z_0$  задано карту з координатами  $(x, y)$ ,  $y \geq 0$  таку, що  $z_0 = (x_0, 0)$ . У карті  $(x, y)$  подамо криву  $\gamma$  у вигляді  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , тоді  $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  — дотичний вектор до  $\gamma$  у точці  $z_0$ . Якщо  $y'(t_0) \neq 0$ , то інтегральні криві замкненої 1-форми  $\omega$  трансверсальні до краю  $K \subseteq \partial F$  у точці  $z_0$ , а якщо  $y'(t_0) = 0$ , то інтегральні криві  $\omega$  дотичні до  $K \subseteq \partial F$  у точці  $z_0$ . Позначимо через  $N \subset \partial F$  множину точок, у яких інтегральні криві  $\omega$  дотикаються краю  $\partial F$ .

**Означення 3.1.** Точку  $z_0 \in N$  будемо називати невідродженою, якщо в системі координат  $(x, y)$ , яку вибрано, як описано вище,  $y'(t_0) = 0$  і  $y''(t_0) \neq 0$ .

Множину  $N$  назвемо невідродженою, якщо всі її точки невідроджені.

Приклеїмо до даної компоненти краю  $K$  комір  $S^1 \times [0; 1]$  і продовжимо інтегральні криві на нього. Таким чином ми продовжимо криві  $\omega$  за  $K$ .

**Означення 3.2.** Позначимо точки множини  $N$ , у яких  $y''(t_0) > 0$ , через  $N^+$ , а точки, в яких  $y''(t_0) < 0$ , через  $N^-$ .

Можливу поведінку інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  у невідродженій точці (початок координат) зображено на рис. 3.

**Означення 3.3.** Будемо говорити, що інтегральні криві замкненої 1-форми  $\omega$  знаходяться в загальному положенні до компоненти краю  $K \subseteq \partial M$ , якщо во-

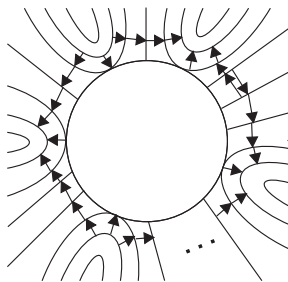


Рис. 4

ни дотикаються до  $K$  в не вироджених точках множини  $N$  і перетинають  $K$  трансверсально в усіх інших точках.

а) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить лише точки  $N^+$ .

**Лема 3.4.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм  $\partial F$  і  $K \subseteq \partial F$  — компонента краю, яка містить лише точки  $N^+$ . Тоді кількість точок  $N^+$  буде парною на  $K$ .

**Доведення** проведемо від супротивного. Нехай інтегральні криві замкненої 1-форми  $\omega$  на  $K$  мають  $k = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , точок  $N^+$ . Позначимо ці точки через  $y_1, \dots, y_k \in N^+$ , рухаючись по  $K$ . Розпочавши з області, що знаходиться в околі  $K$  між точками  $y_i$  і  $y_{i+1}$ , розставимо порівнюючі стрілки між інтегральними кривими  $\omega$  в околі  $K$ . При переході через окіл кожної точки  $y_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , порівнюючі напрямки змінюють напрямком на протилежний, як показано на рис. 4.

Оскільки число точок  $y_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , є непарним, то початкові порівнюючі напрямки змінюватимуть напрямком непарну кількість разів. Тому після розставлення порівнюючих напрямків у всьому околі  $K$  між інтегральними кривими, з яких було почато розставлення порівнюючих стрілок, будуть існувати два протилежно напрямлені напрямки. Тоді дані криві не будуть задавати інтегральні криві замкненої 1-форми. Отримали суперечність, що й завершує доведення леми.

Заклеїмо дану компоненту  $K$  диском  $D^2$  і продовжимо інтегральні криві  $\omega$  на  $D^2$  таким чином.

При  $|N^+| = 2$  можливий лише один варіант, показаний на рис. 5, а. Нехай  $N^+ = \{y_1, y_2\}$ , тоді точки  $y_1, y_2$  розбивають  $K$  на дві частини:  $(y_1, y_2)$  і  $(y_2, y_1)$ . Кожну криву з  $(y_1, y_2)$  неперервно з'єднаємо з деякою кривою з  $(y_2, y_1)$  так, щоб між різними кривими не виникало перетинів (рис. 5, б). Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної компоненти  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  через порівняння нових кривих, що не перетинаються, легко бачити, що ці нові криві будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ .

При  $|N^+| > 2$ , як показано на рис. 6, помістимо сідло в центр  $D^2$ , яке буде нулем замкненої 1-форми  $\omega$ , а кожна сепаратриса, що виходить з нього, буде проходити між двома сусідніми точками  $y_i$  і  $y_{i+1}$ . Оскільки кількість точок  $y_1, \dots, y_k$  є парною, то і кількість сепаратрис також буде парною. Новоутворене сідло будемо називати „+”-сідлом, а на новоутвореній поверхні будемо ставити біля цього сідла „+”. Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної компоненти  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  через порівняння нових кривих і сепаратрис, легко бачити, що ці нові

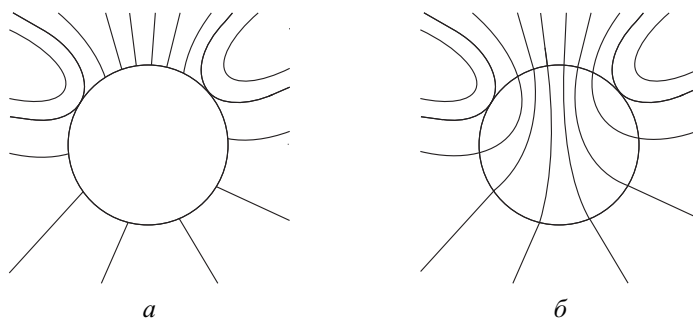


Рис. 5

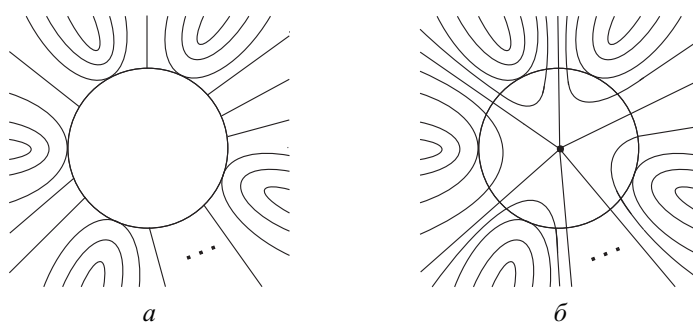


Рис. 6

криві і сепаратриса будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ .

Отже, продовжуючи інтегральні криві замкненої 1-форми з компоненти краю  $K \subseteq \partial F$  на приклеєний до  $K$  диск  $D^2$ , отримуємо новоутворену поверхню  $\tilde{F}$  і при  $|N^+| = 2$  випадок без особливостей або при  $|N^+| > 2$  „+”-сідло парної валентності  $|N^+|$ .

б) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить лише точки  $N^-$ .

**Лема 3.5.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм  $\partial F$  і  $K \subseteq \partial F$  — компонента краю, яка містить лише точки  $N^-$ . Тоді кількість точок  $N^-$  буде парною на  $K$ .

**Доведення** проведемо від супротивного. Нехай, як і для точок  $N^+$ , інтегральні криві  $\omega$  мають на  $K$  непарну кількість точок  $y_1, \dots, y_k \in N^-, k = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Розставляємо порівнюючі напрямки між інтегральними кривими  $\omega$  в околі  $K$ . При переході через окіл кожної точки  $y_i, i = \overline{1, k}$ , порівнюючі напрямки змінюють напрямок на протилежний, як показано на рис. 7.

Оскільки число точок  $y_i, i = \overline{1, k}$ , є непарним, то початкові порівнюючі напрямки змінюватимуть напрямок непарну кількість разів. Тому після розставлення порівнюючих напрямків у всьому околі  $K$  між інтегральними кривими, з яких було почато розставлення порівнюючих стрілок, будуть існувати два протилежно напрямлених напрямки. Тоді дані криві не будуть задавати інтегральні криві замкненої 1-форми. Отримали суперечність, що й завершує доведення леми.

Заклеїмо дану компоненту  $K$  диском  $D^2$  і продовжимо інтегральні криві  $\omega$  на  $D^2$  таким чином.



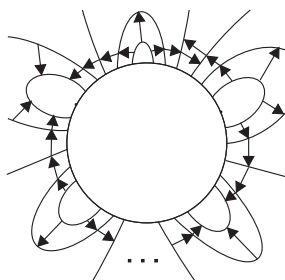


Рис. 7

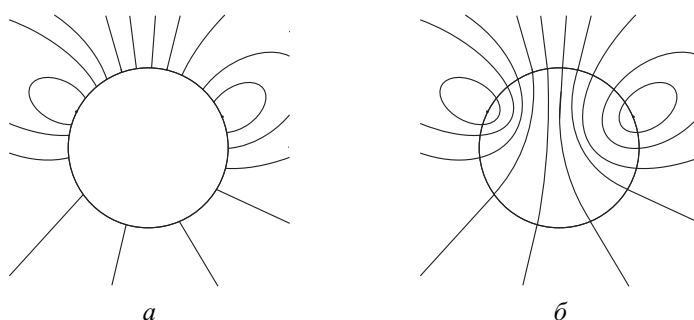


Рис. 8

При  $|N^-| = 2$  можливий лише один варіант, показаний на рис. 8, *a*. Нехай  $N^- = \{y_1, y_2\}$ , тоді точки  $y_1, y_2$  розбивають  $K$  на дві частини:  $(y_1, y_2)$  і  $(y_2, y_1)$ . Кожну криву з  $(y_1, y_2)$  неперервно з'єднуємо з деякою кривою з  $(y_2, y_1)$  так, щоб між різними кривими не виникало перетинів (рис. 8, *б*). Таким чином отримуємо два центри  $y_1$  і  $y_2$ , навколо яких розташовані замкнені криві. Новоутворені центри будемо позначати „01” і „02”. Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної компоненти  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  через порівняння частин кіл навколо „01”- і „02”-центрів, легко бачити, що ці нові криві будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ .

При  $|N^-| > 2$ , як показано на рис. 9, помістимо сідло в центр  $D^2$ , яке буде нулем замкненої 1-форми  $\omega$ , а кожна сепаратриса, що виходить з нього, буде проходити між двома сусідніми точками  $y_i$  і  $y_{i+1}$ . Оскільки кількість точок  $y_1, \dots, y_k$  є парною, то і кількість сепаратрис також буде парною. Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  через порівняння нових кривих і сепаратрис, легко бачити, що ці нові криві і сепаратриса будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ . Новоутворене сідло будемо називати „-”-сідлом, а на новоутвореній поверхні будемо ставити біля сідла „-”. Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної компоненти  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  через порівняння нових кривих і сепаратрис, легко бачити, що ці нові криві і сепаратриса будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ .

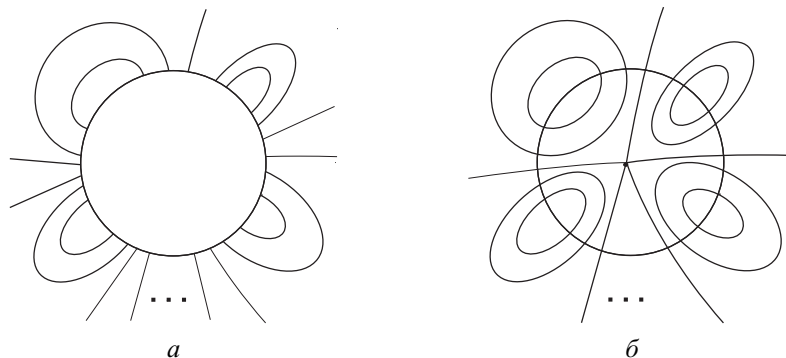


Рис. 9

Отже, продовжуючи інтегральні криві замкненої 1-форми з компоненти краю  $K \subseteq \partial F$  на приклеєний до  $K$  диск  $D^2$ , отримуємо новоутворену поверхню  $\tilde{F}$  і при  $|N^-| = 2$  два центри або при  $|N^-| > 2$  „-”-сідло парної валентності  $|N^-|$ .

в) компонента краю  $K \subseteq \partial F$  містить точки  $N^+$  і  $N^-$ .

**Лема 3.6.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм  $\partial F$  і  $K \subseteq \partial F$  — компонента краю, яка містить лише точки  $N^+$  і  $N^-$ . Тоді кількість точок  $N^+$  і  $N^-$  буде парною на  $K$ .

*Доведення* проведемо від супротивного. Нехай, як і для точок  $N^+$  і  $N^-$ , інтегральні криві  $\omega$  мають на  $K$  непарну кількість точок  $y_1, \dots, y_k \in N^+ \cup N^-$ ,  $k = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Розставляємо порівнюючі напрямки між інтегральними кривими  $\omega$  в околі  $K$ . При переході через окіл точки  $y_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , порівнюючі напрямки змінюють напрямок на протилежний. Оскільки число точок  $y_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , є непарним, то початкові порівнюючі напрямки змінюватимуть напрямок непарну кількість разів, тому між інтегральними кривими, з яких було почато розставлення порівнюючих стрілок, будуть існувати два протилежно напрямлених напрямки. Тоді дані криві не будуть задавати інтегральні криві замкненої 1-форми. Отримали суперечність, що й завершує доведення леми.

Розглянемо для прикладу випадок, зображений на рис. 10. Заклеїмо дану компоненту  $K$  диском  $D^2$  і продовжимо інтегральні криві  $\omega$  на  $D^2$  таким чином: помістимо сідло в центр  $D^2$ , яке буде нулем замкненої 1-форми  $\omega$ , а кожна сепаратриса, що виходить з нього, буде проходити між двома сусідніми точками  $y_i$  і  $y_{i+1}$ . При цьому якщо сепаратриса проходить між двома точками, одна з яких належить  $N^+$ , а інша —  $N^-$ , то вона утворює петлю і знову повертається в те ж сідло. Оскільки кількість точок  $y_1, \dots, y_k$  є парною, то і кількість сепаратрис також буде парною. Новоутворене сідло будемо називати „±”-сідлом, а на новоутвореній поверхні будемо ставити біля цього сідла „±”. Розставивши порівнюючі напрямки в околі даної компоненти  $K$  і продовживши їх в  $\text{int } D^2$  через порівняння нових кривих і сепаратрис, легко бачити, що ці нові криві і сепаратриса будуть продовженням інтегральних кривих замкненої 1-форми  $\omega$  на приклеєний диск  $D^2$ .

Отже, продовжуючи інтегральні криві замкненої 1-форми з компоненти краю  $K \subseteq \partial F$  на приклеєний до  $K$  диск  $D^2$ , отримуємо новоутворену поверхню  $\tilde{F}$  і „±”-сідло парної валентності  $|N^+ \cup N^-|$ .

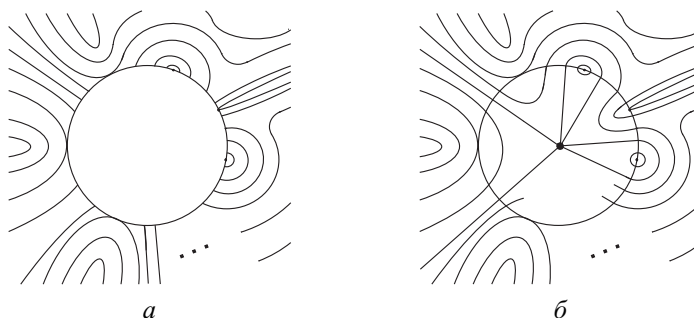


Рис. 10

Далі компоненти краю, описані у цій частині, будемо називати компонентами краю варіанта 2.

**3.3. Інтегральні криві  $\omega$  скрізь трансверсально перетинають  $K \subseteq \partial F$ .** Нехай поверхня  $F$  має  $n \geq 1$  компонент краю  $K \subseteq \partial F$ , кожен з яких інтегральні криві  $\omega$  перетинають трансверсально в кожній точці. Далі у цьому підпункті дані компоненти краю будемо називати компонентами краю варіанта 3. При деякому вкладенні поверхні  $F$  в  $\mathbb{R}^n$  побудуємо гомеоморфне перетворення  $F$  таким чином, щоб існувала функція висоти, для якої всі компоненти варіанта 3 лежали б на одному максимальному рівні. Задамо однакові орієнтації на всіх компонентах краю варіанта 3. Позначимо через  $F'$  „дзеркальну” копію початкової поверхні  $F$  відносно максимального рівня, а через  $\omega'$  замкнену 1-форму, задану на  $F'$ . Очевидно, що  $F'$  буде мати також  $n \geq 1$  компонент краю варіанта 3 і ці компоненти будуть мати орієнтації такі ж, як і їх копії в  $F$ . Розглянемо  $n$  ручок  $S^1 \times [0; 1]$ , в яких  $S^1 \times \{0\}$  і  $S^1 \times \{1\}$  мають таку ж орієнтацію, як і компоненти краю варіанта 3. Ототожнимо кожен парю компонент краю (під парю розуміється сама компонента на поверхні  $F$  і її „дзеркальна” копія на поверхні  $F'$  відносно максимального рівня) з межами однієї з  $n$  ручок. Отримаємо нову поверхню, яку будемо позначати  $F \cup F'$ .

Після такого склеювання інтегральні криві  $\omega$ , які були трансверсальними до кожної з компонент краю  $K \subseteq \partial F$  варіанта 3, продовжаться в  $F \cup F'$  на інтегральні криві  $\omega'$ , які були трансверсальними до кожної з компонент краю  $K' \subseteq \partial F'$  варіанта 3.

**Зауваження 3.1.** Якщо  $F$  і  $F'$  мають лише компоненти краю варіанта 3, то  $F \cup F'$  — замкнена поверхня, якщо ж  $F$  і  $F'$  мають ще й компоненти краю варіантів 1 або 2, то  $F \cup F'$  — компактна поверхня з краєм, тому далі у даному підпункті будемо писати, що  $F \cup F'$  — поверхня.

**Лема 3.7.** Нехай  $F$  — орієнтована компактна поверхня з краєм роду  $p$ . Тоді  $F \cup F'$  — орієнтована поверхня роду  $2p + n - 1$ , де  $n$  — кількість компонент краю варіанта 3.

**Доведення.** Поверхні  $F$  і  $F'$  орієнтовані. Оскільки орієнтація меж кожної ручки і орієнтація компонент краю збігаються, то після заклеювання ручками пар компонент краю поверхонь  $F$  і  $F'$  отримаємо, що  $F \cup F'$  — орієнтована поверхня.

Поверхня  $F$  має рід  $p$ , поверхня  $F'$  — рід  $p$ , як копія  $F$ . Заклеювання ручкою однієї пари „дзеркально” протилежних компонент краю роду не змінить. Заклеювання кожної наступної пари „дзеркально” протилежних компонент краю (їх буде

$n - 1$ ) еквівалентне приклеюванню ручки до орієнтованої поверхні, кожна з яких буде збільшувати рід на 1. Тому рід  $F \cup F'$  буде  $2p + n - 1$ .

Лему доведено.

**Лема 3.8.** *Нехай  $F$  — неорієнтована компактна поверхня з краєм роду  $p$ . Тоді  $F \cup F'$  — неорієнтована поверхня роду  $2(p + n - 1)$ , де  $n$  — кількість компонент краю варіанта 3.*

**Доведення.** Поверхні  $F$  і  $F'$  неорієнтовані. Оскільки орієнтація меж кожної ручки і орієнтація компонент краю збігаються, то після заклеювання ручками пар компонент краю поверхонь  $F$  і  $F'$  отримаємо, що  $F \cup F'$  — неорієнтована поверхня.

Поверхня  $F$  має рід  $p$ , поверхня  $F'$  — рід  $p$ , як копія  $F$ . Заклеювання рукою однієї пари „дзеркально” протилежних компонент краю роду не змінить. Заклеювання кожної наступної пари „дзеркально” протилежних компонент краю (їх буде  $n - 1$ ) еквівалентне приклеюванню ручки до неорієнтованої поверхні, кожна з яких буде збільшувати рід на 2. Тому рід  $F \cup F'$  буде  $2p + 2(n - 1) = 2(p + n - 1)$ .

Лему доведено.

**Зауваження 3.2.** На поверхні  $F \cup F'$  існує інволюція  $\psi: F \cup F' \rightarrow F \cup F'$ , яка кожній точці з  $F \cup F'$  ставить у відповідність симетричну („дзеркальну”) відносно межі склеювання (максимального рівня). Тому ця інволюція  $\psi$  переводить нулі в нулі, „0”-, „01”-, „02”-центри, „+”-, „-”-, „±”-, „ $k$ ”-сідла в точки того ж типу, криві на криві, додатні підобласті в додатні, від’ємні — у від’ємні, а на компонентах краю, які інтегральні криві скрізь перетинають трансверсально,  $\psi$  діє тотожно.

Таким чином ми отримали поверхню  $F \cup F'$ , на якій існує інволюція  $\psi$  і яка не має компонент краю  $K \subseteq \partial F$  варіанта 3.

**4. Загальний випадок.** Нехай задано компакту поверхню  $F$  з краєм  $\partial F$ . Якщо  $\partial F$  містить тільки компоненти краю варіантів 1 або 2, то, заклеївши їх дисками  $D^2$ , отримаємо нову поверхню  $\tilde{F}$  з „0”-, „01”-, „02”-центрами, „+”-, „-”-, „±”-, „ $k$ ”-сідла. Якщо  $\tilde{F}$  містить компоненти краю варіанта 3, то будемо поверхню  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ . Після всіх цих перебудов новоутворену замкнену 1-форму на  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  будемо позначати через  $\tilde{\omega}$ .

**Зауваження 4.1.** Якщо поверхня  $F$  не містить компонент краю варіантів 1 або 2, то  $\tilde{F} \cup \tilde{F}' = F \cup F'$ .

Якщо поверхня  $F$  не містить компонент краю варіанта 3, то  $\tilde{F} \cup \tilde{F}' = \tilde{F}$ .

Введемо деякі означення.

**Означення 4.1.** Диференціальні 1-форми  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , задані на  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ , називаються траєкторно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм  $h: \tilde{F} \cup \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$ , що відображає нулі в нулі, „0”-, „01”-, „02”-центри, „+”-, „-”-, „±”-, „ $k$ ”-сідла в точки того ж типу, а криві на криві. При цьому  $h$  називається траєкторною еквівалентністю. Якщо, крім того,  $h$  зберігає розбиття кожного малого околу точки  $z \in \tilde{F} \cup \tilde{F}' \setminus N(\tilde{\omega})$  на додатну і від’ємну частину, то він називається топологічною еквівалентністю, а відповідні 1-форми називаються топологічно еквівалентними.

Нехай  $S_i \neq \emptyset$  — множина нулів замкненої 1-форми  $\tilde{\omega}_i$  на  $\tilde{F}$ ,  $S'_i \neq \emptyset$  — множина нулів 1-форми  $\tilde{\omega}_i$  на  $\tilde{F}'$ .

**Означення 4.2.** Будемо вважати, що топологічна еквівалентність  $h$  замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  зберігає розбиття на вершини, якщо  $h(S_1) = S_2$ ,  $h(S'_1) = S'_2$ .

**Теорема 4.1.** Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм роду  $p$  і на  $F$  задано дві замкнені 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Для того щоб  $\omega_1$  і  $\omega_2$  були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб для  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , заданих на  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ , існувала топологічна еквівалентність зі збереженням розбиття на вершини.

**Доведення.** *Необхідність.* За умовою теореми  $\omega_1$  і  $\omega_2$  є топологічно еквівалентними, тобто існує  $h: F \rightarrow F$  — топологічна еквівалентність.

Якщо  $F$  має компоненти краю варіантів 1 або 2, то даний гомеоморфізм  $h$  задає топологічну еквівалентність і між околами кожної компоненти краю. Оскільки для однакових компонент краю (компоненти краю вважаються однаковими, якщо вони одночасно мають однакові властивості з варіантів 1 або 2) продовження інтегральних кривих на приклеєний диск  $D^2$  є однаковим, то тим самим ми однозначно продовжуємо топологічну еквівалентність  $h$  з поверхні  $F$  на поверхню  $\tilde{F}$ . Звідси випливає  $h(S_1) = S_2$ .

Якщо  $F$  має компоненти краю варіанта 3, то будемо поверхню  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  з заданими на ній замкненими 1-формами  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ .

Нехай  $\psi_i$  — інволюція на поверхні  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ , на якій задано  $\tilde{\omega}_i$ . Внаслідок того, що інволюції  $\psi_1$  і  $\psi_2$  переводять нулі в нулі, „0”-, „01”-, „02”-центри, „+”-, „-”-, „±”-, „k”-сідла в точки того ж типу, криві на криві, додатні частини півоколів у додатні, від’ємні — у від’ємні,  $\psi_2 \circ h \circ \psi_1^{-1}: \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F}'$  — топологічна еквівалентність. Оскільки на межі склеювання  $\psi_1^{-1}(x) = \psi_2(x) = x$ , то

$$H(x) := \begin{cases} \psi_2 \circ h \circ \psi_1^{-1}(x), & x \in \tilde{F}', \\ h(x), & x \in \tilde{F}, \end{cases} \quad x \in \tilde{F} \cup \tilde{F}'$$

— топологічна еквівалентність  $\tilde{\omega}_1$  та  $\tilde{\omega}_2$  і  $H(S_1) = h(S_1) = S_2$ ,  $H(S'_1) = \psi_2 \circ h \circ \psi_1^{-1}(S'_1) = \psi_2 \circ h(S_1) = \psi_2(S_2) = S'_2$ .

*Достатність.* Розглянемо такі випадки.

1. Поверхня  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  не має нулів.

За теоремою Хопфа це можливо у випадку, коли  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  — орієнтована поверхня роду 1 або неорієнтована поверхня роду 2. Як показано в доведеннях лем 3.7, 3.8, при склеюванні з 2-ї пари компонент варіанта 3 рід орієнтованої поверхні  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  завжди збільшується на 1, а неорієнтованої — на 2. Тому  $\tilde{F}$  буде поверхнею роду 0, тобто гомеоморфною  $S^1 \times [0; 1]$ . Враховуючи, що  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  не має нулів, а отже,  $\tilde{F}$  також не має нулів, маємо  $\tilde{F} = F$ .

Оскільки на  $F \cong S^1 \times [0; 1]$  інтегральні криві скрізь трансверсальні до  $S^1 \times \{0\}$  і до  $S^1 \times \{1\}$ , то гомеоморфними перетвореннями можна подати інтегральні криві у вигляді  $z \times [0; 1]$ ,  $z \in S^1$ . Тоді  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , задані на  $F \cong S^1 \times [0; 1]$ , будуть мати вигляд  $z \times [0; 1]$ ,  $z \in S^1$  і завжди будуть топологічно еквівалентними.

2. Поверхня  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  має нулі.

Позначимо через  $H$  топологічну еквівалентність між  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ ,  $H(S_1) = S_2$ ,  $H(S'_1) = S'_2$ . Нехай  $K_{ij}$  ( $i = \overline{1, 2}$ ,  $j = \overline{1, J}$ ,  $J$  — кількість компонент варіанта 3) — межі склеювання  $\tilde{F}$  і  $\tilde{F}'$  при утворенні  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  з заданою замкненою 1-формою  $\tilde{\omega}_i$ , тобто  $K_{ij}$  — компоненти краю варіанта 3. Розглянемо деяку компоненту краю  $K_{1j_0}$ ,  $j_0 \in \{1, \dots, J\}$ , і нехай  $H(K_{1j_0}) = K'_{2j_0}$ .

Розіб'ємо доведення на декілька частин.

1. Довільну компоненту краю варіанта 3 перетинає хоча б одна сепаратриса. Нехай  $K$  — довільна компонента краю варіанта 3. Покажемо, що існує сідло  $x \in$

$\in \tilde{F}$ , з якого виходить сепаратриса і перетинає  $K$ . Припустимо супротивне: такого сідла не існує. Тоді всі інтегральні криві, які перетинають  $K_{i_{j_0}}$  трансверсально, перетинають лише одну відмінну від  $K$  компоненту краю варіанта 3, а поверхня  $\tilde{F}$  гомеоморфна циліндру  $S^1 \times [0; 1]$  з інтегральними кривими  $z \times [0; 1]$ ,  $z \in S^1$ . Це неможливо, адже ми розглядаємо випадок, коли поверхня  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  має нулі. Тому існує сідло  $x \in \tilde{F}$ , з якого виходить сепаратриса і перетинає  $K$ . Оскільки за побудовою  $\tilde{F}'$  є копією  $\tilde{F}$ , то існує сідло  $x' \in \tilde{F}'$  та  $x$  з  $x'$  з'єднує сепаратриса, яка перетинає  $K$ .

Нехай сідла  $x$  та  $x'$  з'єднує сепаратриса  $\gamma_1$ , яка перетинає  $K_{1_{j_0}}$  і є кривою  $\tilde{\omega}_1$ . Сідла  $H(x) = y$  і  $H(x') = y'$  сполучає сепаратриса  $H(\gamma_1) = \gamma_2$ , яка є кривою  $\tilde{\omega}_2$ . Оскільки  $H$  зберігає розбиття на вершини, то  $y \in \tilde{F}$ ,  $y' \in \tilde{F}'$  і існує компонента краю  $K_{2_{j_0}}$  варіанта 3, яку  $\gamma_2$  перетинає.

2.  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  перетинає однакова кількість сепаратрис. Покажемо, що довільна сепаратриса перетинає довільну компоненту краю варіанта 3 лише в одній точці. Якщо існує сепаратриса, яка перетинає компоненту краю варіанта 3 більше ніж в одній точці, то це можливо лише у випадку, коли ця компонента краю має точки дотику з інтегральними кривими, що неможливо, адже довільну межу склеювання інтегральні криві перетинають скрізь трансверсально.

Покажемо, що між  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  немає сідел. Припустимо супротивне: між  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  існує сідло  $y$ . Оскільки  $K_{2_{j_0}}$  — компонента краю варіанта 3, то існує симетричне відносно  $K_{2_{j_0}}$  сідло  $y'$  та  $y$  і  $y'$  знаходяться по один бік від  $K'_{2_{j_0}}$ . Застосувавши  $H^{-1}$ , отримаємо, що  $H^{-1}(y)$  і  $H^{-1}(y')$  знаходяться по один бік від  $K_{1_{j_0}}$ . Це неможливо, адже  $H$  зберігає розбиття на вершини. Тому між  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  немає сідел.

З попередніх міркувань випливає, що  $K'_{2_{j_0}}$  і  $K_{2_{j_0}}$  перетинає однакова кількість сепаратрис.

3.  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  ізоморфні. Нехай  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  перетинають  $S \in \mathbb{N}$  сепаратрис. Позначимо через  $\{b_s\}$ ,  $\{b'_s\}$ ,  $s = \overline{1, S}$ , точки перетину  $S$  сепаратрис з  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  відповідно. Точки  $\{b_s\}$ ,  $\{b'_s\}$  розбивають  $K_{2_{j_0}}$  і  $K'_{2_{j_0}}$  на частини  $[b_s; b_{s+1}]$  і  $[b'_s; b'_{s+1}]$  відповідно, де  $b_1 = b_{S+1}$ ,  $b'_1 = b'_{S+1}$ .

Оскільки інтегральні криві не мають стоків, витоків,  $\omega$ - чи  $\alpha$ -граничних множин, гомеоморфних колу, а криві  $\tilde{\omega}_2$ , які перетинають  $K_{2_{j_0}}$  у точках  $(b_s; b_{s+1}) \subset \subset K_{2_{j_0}}$ , не є сепаратрисами, то ці криві будуть замкненими на  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ . Зауважимо, що замкнені криві  $\tilde{\omega}_2$ , які перетинають  $K_{2_{j_0}}$  у точках  $(b_s; b_{s+1})$ , будуть гомотопними, бо інакше між ними завжди існувало б сідло, яке і порушувало б гомотопію цих кривих, а його сепаратриса задавала б точку  $b_{s_0} \in (b_s; b_{s+1})$ , чого бути не може.

Розглянемо неперервне відображення  $\eta: [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$  таке, що вертикальні шари  $\{t\} \times [0; 1]$  гомеоморфно відображаються на криві  $\tilde{\omega}_2$  в чотирикутник  $b_s b'_s b'_{s+1} b_{s+1}$ ,  $\eta([0; 1] \times \{0\}) = [b_s; b_{s+1}] \subseteq K_{2_{j_0}}$ ,  $\eta([0; 1] \times \{1\}) = [b'_s; b'_{s+1}] \subseteq K'_{2_{j_0}}$ .

Зафіксуємо деяку точку  $a_{t_0} \in (b_s; b_{s+1})$ ,  $a_{t_0} = \eta(t_0 \times \{0\}) \in \gamma_{t_0}$ , де  $t_0 \in (0; 1)$ ,  $\gamma_{t_0}$  — замкнена крива  $\tilde{\omega}_2$ . На кожній сепаратрисі можна неперервно відобразити  $b_s$  в  $b'_s$ . Розпочинаючи з точок  $b_s$  і  $b_{s+1}$ , розглянемо неперервне відображення точок  $a_t = \eta(t \times \{0\}) \subseteq [b_s; b_{s+1}]$  в точки  $a'_t = \eta(t \times \{1\}) \subseteq [b'_s; b'_{s+1}]$  по інтегральних кривих  $\tilde{\omega}_2$ . Відстань від  $a_t$  до  $a'_t$  позначимо через  $s_t = \eta(t \times [0; 1])$ . Змінюючи неперервно точки від  $b_s$  і від  $b_{s+1}$  до  $a_{t_0}$  і відображаючи  $a_t$  в  $a'_t$ , отримуємо неперервну зміну відстаней  $\{s_t\}$  з правої і лівої сторін відносно  $a_{t_0}$ .

Якщо, дійшовши до  $a_{t_0}$ , ми маємо однакові відстані з правої і лівої сторін від  $a_{t_0}$  до  $a'_{t_0}$ , то неперервно відображаємо  $a_{t_0}$  в  $a'_{t_0}$  і отримуємо ізотопію  $[b_s; b_{s+1}]$  в  $[b'_s; b'_{s+1}]$ .

Дійшовши до  $a_{t_0}$ , ми можемо отримати різні відстані з правої і лівої сторін від  $a_{t_0}$  до  $a'_{t_0}$ . Оскільки криві  $\tilde{\omega}_2$  трансверсально перетинають  $K'_{2j_0}$ , то різні відстані можливі у випадку, коли існує скручування Дена  $D$ , яке діє в околі  $\gamma_{t_0}$  вздовж кривих  $\tilde{\omega}_2$ , тобто залишає їх нерухомими, а частина  $K'_{2j_0}$  з околу  $\gamma_{t_0}$  обертається навколо  $\gamma_{t_0}$  певну кількість разів. Тому відстані з правої і лівої сторін від  $a_{t_0}$  до  $a'_{t_0}$  будуть відрізнятися на  $s \cdot n$ , де  $s$  — довжина  $\gamma_{t_0}$ ,  $n$  — кількість обертів навколо  $\gamma_{t_0}$ . У цьому випадку неперервне відображення  $a_{t_0}$  в  $a'_{t_0}$  неможливе. Тоді  $H$  в околі  $\gamma_{t_0}$  можна реалізувати як  $n$  скручувань Дена  $D$  відносно  $\gamma_{t_0}$ . Застосувавши  $n$  разів  $D^{-1}$ , отримаємо, що відстані з правої і лівої сторін у точці  $a_{t_0}$  будуть рівними  $s_{t_0}$ , а  $a_{t_0}$  буде неперервно відображатися в  $a'_{t_0}$ . Зауважимо, що скручування Дена діє вздовж інтегральних кривих, тому є топологічною еквівалентністю. Тоді і в цьому випадку отримуємо ізотопію  $[b_s; b_{s+1}]$  в  $[b'_s; b'_{s+1}]$ .

Застосувавши описані міркування до кожного проміжку  $[b_s; b_{s+1}]$ , отримаємо ізотопію  $f_{t_{j_0}}, t \in [0; 1]$  таку, що

$$f_{0j_0}(K_{2j_0}) = K_{2j_0}, \quad f_{1j_0}(K_{2j_0}) = K'_{2j_0}.$$

Зауважимо, що побудована ізотопія  $f_{t_{j_0}}$  компоненти краю  $K_{2j_0}$  буде продовжуватися до ізотопії всієї поверхні  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ , бо діє в деякому околі  $K_{2j_0} \cup K'_{2j_0}$  і тотожно поза ним. Ізотопію  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  також будемо позначати через  $f_{t_{j_0}}$ , і  $f_{1j_0}$  буде топологічною еквівалентністю  $\tilde{\omega}_2$ , бо діє вздовж інтегральних кривих, тобто залишає її нерухомими.

Провівши аналогічні міркування для всіх меж склеювання  $K_{1j}$ , отримаємо, що

$$f_{11} \circ \dots \circ f_{1J} \circ H: \quad \tilde{F} \cup \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$$

— топологічна еквівалентність  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , яка межі склеювання відображає в межі склеювання.

Зафіксувавши деякий нуль з множини нулів  $S_1$  і розглянувши всі можливі криві, які не перетинають  $K_{1j}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , і сполучають даний нуль з довільною точкою, переконаємось, що

$$f_{11} \circ \dots \circ f_{1J} \circ H: \quad \tilde{F} \rightarrow \tilde{F}$$

— топологічна еквівалентність  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ . Позначимо через  $\cup \{\text{int } D^2\}$  внутрішності всіх дисків  $D^2$ , які приклеювалися до компонент краю варіантів 1 та 2. З топологічної еквівалентності  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  випливає однакова кількість компонент краю варіантів 1 та 2 на поверхнях  $\tilde{F} \setminus \cup \{\text{int } D^2\}$  з заданою  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{F} \setminus \cup \{\text{int } D^2\}$  з заданою  $\tilde{\omega}_2$  та однотипна поведінка кривих  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  в околах цих компонент. Тому

$$f_{11} \circ \dots \circ f_{1J} \circ H: \quad \tilde{F} \setminus \cup \{\text{int } D^2\} \rightarrow \tilde{F} \setminus \cup \{\text{int } D^2\}$$

— також топологічна еквівалентність. Оскільки  $\tilde{F} \setminus \cup \{\text{int } D^2\} = F$ ,  $\tilde{\omega}_1|_F = \omega_1$ ,  $\tilde{\omega}_2|_F = \omega_2$ , то

$$f_{11} \circ \dots \circ f_{1J} \circ H: \quad F \rightarrow F$$

— шукана топологічна еквівалентність замкнених 1-форм  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .

Теорему доведено.

Об'єднання нулів, „0”-, „01”-, „02”-центрів, „+”-, „-”-, „±”-, „k”-сідел та інтегральних кривих, що їх з'єднують, будемо розглядати як граф  $G(\tilde{\omega})$ , що вкладений у поверхню  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ . Вершинами графа є нулі, „0”-, „01”-, „02”-центри, „+”-, „-”-, „±”-, „k”-сідла, а ребрами — інтегральні криві, що їх з'єднують. При цьому якщо з вершини виходить незамкнена рекурентна півкрива, то для отримання графа  $G(\tilde{\omega})$  обріжемо цю півкриву на деякій відстані від нуля і отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1.

**Теорема 4.2.** *Нехай  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  — замкнена поверхня роду  $p$  і на  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  задано дві замкнені 1-форми  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ . Для того щоб  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  були топологічно еквівалентними зі збереженням розбиття на вершини, необхідно і достатньо, щоб:*

1) для  $G(\tilde{\omega}_1) \neq \emptyset$  і  $G(\tilde{\omega}_2) \neq \emptyset$  виконувались умови:

*існував гомеоморфізм  $f: \tilde{F} \cup \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$  зі збереженням розбиття на вершини, обмеження якого на  $G(\tilde{\omega}_1)$  задає ізоморфізм графів  $G(\tilde{\omega}_1)$  і  $G(\tilde{\omega}_2)$ , „0”-, „01”-, „02”-центри, „+”-, „-”-, „±”-, „k”-сідла переходять у вершини того ж типу;*

*області, що обмежені ребрами графа  $G(\tilde{\omega}_1)$ , переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі  $G(\tilde{\omega}_2)$ ;*

*додатні підобласті переходили у додатні, від'ємні — у від'ємні;*

2) для пар областей з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  або з  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ , кожна з яких містить хоча б одну незамкнену рекурентну півкриву, виконувались умови:

*для орієнтованих областей роду  $r = 1$  числа обертання незамкнених рекурентних півкривих замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  мають бути сумірними;*

*для орієнтованих областей роду  $r \geq 2$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , що мають сумірні гомотопічні класи обертання;*

*для неорієнтованих областей роду  $r = 3$  числа обертання півкривих замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  повинні бути сумірними;*

*для неорієнтованих областей роду  $r \geq 4$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , що мають однакові орбіти обертання.*

**Доведення. Необхідність.** Нехай  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  топологічно еквівалентні на  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  зі збереженням розбиття на вершини, тобто існує  $h: \tilde{F} \cup \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$  — топологічна еквівалентність. Тоді  $f = h|_{G(\tilde{\omega}_1)}$  — шуканий гомеоморфізм зі збереженням розбиття на вершини і умови п. 1 впливають з властивостей  $h$ .

Оскільки  $h$  задає топологічну еквівалентність  $\tilde{F} \cup \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$  і зберігає розбиття на вершини, то, як показано при доведенні теореми 4.1,  $h(\tilde{F}) = \tilde{F}$ ,  $h(\tilde{F}') = \tilde{F}'$ . Тому  $h$  задає топологічну еквівалентність і між відповідними областями з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ ,  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ . В кожній області з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ ,  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  позаклеюємо межі дисками  $D^2$  і розглянемо кожну таку перебудовану область як орієнтовану чи неорієнтовану поверхню (орієнтація початкової і перебудованої областей збігаються). Тоді, використавши теорему 1 з [10] для орієнтованих поверхонь і теореми 4.1–4.3 з [11] для неорієнтованих поверхонь, отримаємо потрібні умови п. 2.

**Достатність.** Нехай  $\tilde{F} \cup \tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , — об'єднання областей двох типів:

1) заповнених замкненими інтегральними кривими;

2) заповнених незамкненими рекурентними інтегральними кривими.

Як і в роботі [10], зафіксуємо структуру прямого добутку на областях типу 1 і продовжимо гомеоморфізм між графами до гомеоморфізму між областями.



Заклеївши межі в областях типу 2 дисками  $D^2$ , отримаємо поверхні з заданими на них замкненими 1-формами. Використовуючи для кожної новоутвореної поверхні теорему 1 з [10] для орієнтованих поверхонь або теореми 4.1–4.3 з [11] для неорієнтованих поверхонь, встановлюємо топологічну еквівалентність між цими поверхнями. Видаливши прикленні диски, отримаємо топологічні еквівалентності окремо між парами областей з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  і з  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ .

За необхідності, підправляючи топологічну еквівалентність областей з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  і  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  в околах їх меж (графів) так, щоб топологічна еквівалентність при обмеженні на межі збігалася з гомеоморфізмами графів, отримуємо в сукупності топологічну еквівалентність поверхні  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$ . Враховуючи, що  $f$  зберігає розбиття на вершини і знайдені топологічні еквівалентності саме між парами областей з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  і з  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ , переконуємось, що топологічна еквівалентність поверхні  $\tilde{F} \cup \tilde{F}'$  зберігає розбиття на вершини.

З теорем 4.1 і 4.2 безпосередньо випливає такий наслідок.

**Наслідок 4.1.** *Нехай  $F$  — компактна поверхня з краєм роду  $p$  і на  $F$  задано дві замкнені 1-форми  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Для того щоб  $\omega_1$  і  $\omega_2$  були топологічно еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб для замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  мали місце умови:*

1) *для  $G(\tilde{\omega}_1) \neq \emptyset$  і  $G(\tilde{\omega}_2) \neq \emptyset$  виконувались умови:*

*існував гомеоморфізм  $f: \tilde{F} \cup \tilde{F}' \rightarrow \tilde{F} \cup \tilde{F}'$  зі збереженням розбиття на вершини, обмеження якого на  $G(\tilde{\omega}_1)$  задає ізоморфізм графів  $G(\tilde{\omega}_1)$  і  $G(\tilde{\omega}_2)$ , „0”-, „01”-, „02”-центри, „+”-, „-”-, „±”-, „k”-сідла переходять у вершини того ж типу;*

*області, що обмежені ребрами графа  $G(\tilde{\omega}_1)$ , переходили в області, що обмежені образами цих ребер у графі  $G(\tilde{\omega}_2)$ ;*

*додатні підобласті переходили у додатні, від’ємні — у від’ємні;*

2) *для пар областей з  $\tilde{F} \setminus G(\tilde{\omega}_i)$  або з  $\tilde{F}' \setminus G(\tilde{\omega}_i)$ , кожна з яких містить хоча б одну незамкнену рекурентну півкриву, виконувались умови:*

*для орієнтованих областей роду  $r = 1$  числа обертання незамкнених рекурентних півкривих замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  повинні бути сумірними;*

*для орієнтованих областей роду  $r \geq 2$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , що мають сумірні гомотопічні класи обертання;*

*для неорієнтованих областей роду  $r = 3$  числа обертання півкривих замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$  повинні бути сумірними;*

*для неорієнтованих областей роду  $r \geq 4$  існує по одній незамкненій рекурентній сепаратрисі замкнених 1-форм  $\tilde{\omega}_1$  і  $\tilde{\omega}_2$ , що мають однакові орбіти обертання.*

1. *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Тр. Ин-та математики РАН. — 1994. — **205**. — С. 131–140.
2. *Sharko V. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces // Int. Conf. Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory. — Chelyabinsk, 1996. — P. 19–23.
3. *Максименко С. И.* Классификация  $m$ -функций на поверхностях // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 8. — С. 1129–1135.
4. *Пришляк А. О.* Топологическая классификация  $m$ -полей на дву- и трехмерных многообразиях с краем // Там же. — 2003. — **55**, № 6. — С. 799–805.
5. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых поверхностях // Успехи мат. наук. — 1986. — **41**, вып. 1(247). — С. 149–169.
6. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем) // Мат. сб. — 1973. — **90(132)**, № 3. — С. 372–401.

7. Арансон С. Х., Жужома Е. В., Тельных И. А. Транзитивные и сверхтранзитивные потоки на замкнутых неориентируемых поверхностях // *Мат. заметки*. – 1998. – **63**, вып. 4. – С. 625–628.
8. Бідун С. В., Пришляк О. О. Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // *Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка*. – 2002. – № 8. – С. 77–81.
9. Будницька Н. В., Пришляк О. О. Замкнені 1-форми з ізольованими критичними точками на замкнених орієнтованих поверхнях // *Там же*. – 2007. – № 18. – С. 66–69.
10. Будницька Н. В., Пришляк О. О. Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених орієнтованих поверхнях // *Там же*. – 2008. – № 19. – С. 36–38.
11. Будницька Н. В. Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених неорієнтованих поверхнях // *Нелінійні коливання*. – 2009. – **12**, № 2. – С. 155–167.
12. Prishlyak A. O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // *Topology and Appl.* – 2002. – № 119. – P. 257–267.

Одержано 28.11.08,  
після доопрацювання – 22.07.09