УДК 517. 9

М. Н. Феллер (Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ЛАПЛАСИАНОМ ЛЕВИ В КЛАССЕ ГАТО

Solutions are presented for an initial problem in the whole space, for boundary-value and initial boundary-value problems for the wave equation with the infinite-dimensional Lévy Laplacian Δ_L $\dfrac{\partial^2 U(t,\, x)}{\partial x^2} = \Delta_L\, U(t,\, x)$ in the class of Gâteaux functions.

Наведено розв'язки початкової задачі у всьому просторі, крайової та початково-крайової задач для хвильового рівняння з нескінченновимірним лапласіаном Леві Δ_L $\dfrac{\partial^2 U(t,\, x)}{\partial x^2} = \Delta_L\, U(t,\, x)$ у класі функцій Гато.

1. Введение. Бесконечномерный лапласиан ввел П. Леви [1]. Теория линейных эллиптических и параболических уравнений с лапласианом Леви в настоящее время достаточно развита (см., например, [2]). Напротив, публикаций по линейным гиперболическим уравнениям с лапласианом Леви, пожалуй, нет.

Данная статья посвящена решениям задачи Коши (начальной задаче во всем пространстве), краевой и начально-краевой задач для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 U(t,\, x)}{\partial t^2} = \Delta_L\, U(t,\, x)$$

для фундаментальных областей в классе функций Р. Гато.

Такие задачи в еще одном важном классе — классе функций Г. Е. Шилова [3], в котором лапласиан Леви является „производной", будут рассмотрены в другой статье.

В классе функций Гато лапласиан Леви отнюдь не является „производной" (см. формулу (4)). Это позволило для волнового уравнения с лапласианом Леви получить решение задачи Коши в классической постановке (теорема 1). Впрочем, для задач с граничными условиями (теоремы 3 – 5) постановка отличается от традиционной постановки задач для конечномерного волнового уравнения.

2. Предварительные сведения. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0, лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L\, F(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(F''(x_0)\, f_k,\, f_k\big)_H\,, \tag{1}$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H. Лапласиан Леви зависит, вообще говоря, от выбора базиса.

В частности, пусть $H = L_2(0,\,1)$ — гильбертово пространство функций $x(s)$, интегрируемых с квадратом на $[0,\,1]$.

Если функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема в точке $x \in L_2(0,\,1)$ и второй дифференциал имеет вид

$$d^2F(x;\,h) \;=\; \int_0^1 \frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2}\, h^2(s)\, ds \;+\; \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)\,\delta x(\tau)}\, h(s)\, h(\tau)\, ds\, d\tau\,,$$

где вторая вариационная производная $\dfrac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2}$ и вторая смешанная вариационная производная $\dfrac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)\,\delta x(\tau)}$ функции $F(x)$ непрерывны соответственно по s и $s,\ \tau$ $(h \in L_2(0,\,1))$, то говорят, что $d^2F(x;\,h)$ имеет нормальную форму [1].

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех равномерно плотных базисов в $L_2(0,\,1)$, т. е. таких ортонормированных базисов $\{f_k\}_1^\infty$ в $L_2(0,\,1)$, что

$$\lim_{n\to\infty} (y,\,\varphi_n)_{L_2(0,1)} \;=\; (y,\,1)_{L_2(0,1)} \quad \forall\, y \in L_2(0,\,1),$$

где $\varphi_n(s) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k^2(s)$.

Имеет место следующее утверждение (см. [1, 2]). Если функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема и второй дифференциал имеет нормальную форму, то

$$\Delta_L F(x) \;=\; \int_0^1 \frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2}\, ds \tag{2}$$

для произвольного базиса из $\mathcal{B}$.

Обозначим через Ω ограниченную область в гильбертовом пространстве H (т. е. ограниченное открытое множество в H), через $\bar\Omega = \Omega \cup \Gamma$ область в пространстве H с поверхностью Γ.

Определим область Ω с поверхностью Γ следующим образом:

$$\Omega \;=\; \left\{x \in H : 0 \le Q(x) < R^2\right\}, \qquad \Gamma \;=\; \left\{x \in H : Q(x) = R^2\right\},$$

где $Q(x)$ — дважды сильно дифференцируемая функция такая, что $\Delta_L Q(x) = \gamma$, γ — постоянное положительное не равное нулю число. Такие области и такие поверхности называют фундаментальными.

Примерами фундаментальных областей являются:

1) шар $\bar\Omega = \left\{x \in H : \|x\|_H^2 \le R^2\right\}$;

2) эллипсоид $\bar\Omega = \left\{x \in H : (Bx,\,x)_H \le R^2\right\}$, где $B = \gamma E + A(x)$, E — единичный оператор, а $A(x)$ — вполне непрерывный оператор в H.

Введем функцию

$$T(x) \;=\; \frac{R^2 - Q(x)}{\gamma}.$$

Функция $T(x)$ обладает такими свойствами:

$$0 \;<\; T(x) \;\le\; \frac{R^2}{\gamma} \quad \text{при} \quad x \in \Omega\,,$$

$$T(x) \;=\; 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma\,, \qquad \Delta_L T(x) \;=\; -1\,.$$

3. Класс функций Гато. Пусть $H = L_2(0, 1)$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ класс функций Гато — совокупность функций вида

$$F(x) \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\big(x(t_1), \ldots , x(t_N);\, t_1, \ldots , t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N \,, \tag{3}$$

где $f(\xi_1, \ldots , \xi_N;\, t_1, \ldots , t_N)$ — непрерывная функция $2N$ переменных ($-\infty < \xi_k < \infty,\ 0 \le t_k \le 1, k = 1, 2, \ldots , N$).

Обозначим через $\mathfrak{G}^*$ функции из $\mathfrak{G}$, производящая функция которых имеет непрерывные производные второго порядка по $\xi_1, \ldots , \xi_N$. Тогда для $F \in \mathfrak{G}^*$ имеет место формула

$$\Delta_L\, F(x) \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}\bigg|_{\xi_k = x(t_k)} dt_1 \ldots dt_N \tag{4}$$

для произвольного базиса из $\mathcal{B}$.

Действительно, второй дифференциал функции $F(x)$, имеющей вид (3), равен

$$d^2F(x;\, h) \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}\bigg|_{\xi_k = x(t_k)} h^2(t_k)\, dt_1 \ldots dt_N \;+$$

$$+\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k}\bigg|_{\xi_i = x(t_i)} h(t_j)\, h(t_k)\, dt_1 \ldots dt_N \;=$$

$$=\; \int_0^1 \left[\int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}\bigg|_{\xi_k = x(s)} \prod_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^N dt_i \right] h^2(s)\, ds \;+$$

$$+\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j\, \partial \xi_k}\bigg|_{\xi_i = x(t_i)} h(t_j)\, h(t_k)\, dt_j\, dt_k$$

и, значит, $d^2F(x;\, h)$ имеет нормальную форму, а

$$\frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2} \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}\bigg|_{\xi_k = x(s)} \prod_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^N dt_i \,.$$

Согласно (2) имеем

$$\Delta_L\, F(x) \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}\bigg|_{\xi_k = x(t_k)} dt_1 \ldots dt_N \,.$$

3.1. Начальная задача с однородным краевым условием. 1. Вначале рассмотрим начальную задачу во всем пространстве

$$\frac{\partial^2 V_1(t,\, x)}{\partial t^2} \;=\; \Delta_L\, V_1(t,\, x)\,, \quad t > 0, \tag{5}$$

$$V_1(0, x) = F(x), \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

где $V_1(t, x)$ — функция на $[0, \mathcal{T}] \times H$, $F(x)$ — заданная функция.

Теорема 1. *Пусть функция* $F(x) \in \mathfrak{G}^*$,

$$F(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\big(x(t_1), \ldots, x(t_N); t_1, \ldots, t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N,$$

такая, что производящая функция $f(\xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$ *имеет в* R^N *непрерывные производные по* $\xi_1, \ldots, \xi_N$ *до порядка* $N+3$, *которые вместе с* $f(\xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$ *принадлежат* $\mathcal{L}(R^N)$ *и равны нулю на бесконечности.*

Тогда решение задачи (5) – (7) *задается формулой*

$$V_1(t, x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k}\, dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N, \tag{8}$$

где

$$\tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} f(\xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)\, e^{-i\sum_{k=1}^N y_k \xi_k}\, d\xi_1 \ldots d\xi_N$$

— *преобразование Фурье функции* $f(\xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$.

Доказательство. Из (8) имеем

$$\frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t} = -\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\, \sin\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k}\, dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 V_1(t, x)}{\partial t^2} = -\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^N y_k^2\, \cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k}\, dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N. \tag{10}$$

Из (8), используя формулу (4), находим

$$\Delta_L V_1(t, x) =$$

$$= -\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) \sum_{k=1}^N y_k^2 e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k} dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N . \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в уравнение (5), получаем тождество.

Полагая в (8) и в (9) $t = 0$, убеждаемся, что

$$V_1(0, x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k} dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\big(x(t_1), \ldots, x(t_N); t_1, \ldots, t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N = F(x),$$

$$\left.\frac{\partial V_1(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 .$$

Теорема доказана.

Заметим, что в классе функций Гато решение начальной задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви получено в классической постановке.

2. Теперь рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^2 V_2(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L V_2(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$V_2(0, x) = 0, \tag{13}$$

$$V_2(t, x)\big|_\Gamma = V_1(t, x). \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Кроме того, пусть* $\psi(0) = 0$, *где* $\psi(t) = t^N f(t\xi_1, \ldots, t\xi_N;\ t_1, \ldots, t_N)$. *Предположим, что область* $\bar{\Omega}$ *фундаментальна*, $\bar{\Omega} = \left\{x \in H : 0 \le Q(x) \le R^2\right\}$, $\Delta_L Q(x) = \text{cosnt}$.

Тогда решение задачи (12) – (14) *задается формулой*

$$V_2(t, x) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \sin t\beta\; e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k} d\beta\, dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N , \tag{15}$$

где $\hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N;\ t_1, \ldots, t_N) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty h(\tau, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \sin \beta\tau\, d\tau$ — *синус-преобразование Фурье функции*

$$h(t, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} t^N f(t\xi_1, \ldots, t\xi_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{N} y_k^2}\right) e^{-it\sum_{k=1}^{N} y_k \xi_k} d\xi_1 \ldots d\xi_N .$$

Доказательство. Заметим, что поскольку по условию $\psi(0) = 0$, то $h(0, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) = 0$.

Из (15) имеем

$$\frac{\partial^2 V_2(t, x)}{\partial t^2} = -\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \beta^2 \sin t\beta \, e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} d\beta \, dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N \qquad (16)$$

и

$$\Delta_L V_2(t, x) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right] e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \Delta_L T(x) \times$$

$$\times \sin t\beta \, e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} d\beta \, dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N -$$

$$- \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \, e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \times$$

$$\times \sin t\beta \sum_{k=1}^N y_k^2 \, e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} d\beta \, dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N .$$

Поскольку $\Delta_L T(x) = -1$, то

$$\Delta_L V_2(t, x) = -\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \beta^2 \sin t\beta \, e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} d\beta \, dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N . \qquad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в уравнение (12), получаем тождество.

Полагая в (15) $t = 0$, убеждаемся, что $V_2(0, x) = 0$. На поверхности Γ $T(x) = 0$, поэтому из (15) имеем

$$V_2(t, x)\big|_\Gamma = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{1}{2\pi^{N/2}} \int\limits_{R^N} h(t, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{R^N} \int_{R^N} t^N f(t\xi_1, \ldots, t\xi_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t \sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{-it\sum_{k=1}^N y_k \xi_k + i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} d\xi_1 \ldots d\xi_N \, dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t \sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N = V_1(t, x).$$

Теорема доказана.

3. Наконец, рассмотрим начальную задачу с однородным краевым условием для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L V(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{18}$$

$$V(0, x) = F(x), \tag{19}$$

$$V(t, x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{20}$$

где $V(t, x)$ — функция на $[0, T] \times H$, $F(x)$ — заданная функция.

Теорема 3. *Пусть функция* $F(x) \in \mathfrak{G}^*$,

$$F(x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left(x(t_1), \ldots, x(t_N); t_1, \ldots, t_N\right) dt_1 \ldots dt_N$$

($f(\xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$ — *функция на* R^{2N}). *Кроме того, пусть выполняются условия теорем* 1 *и* 2.

Тогда решение задачи (18) – (20) *задается формулой*

$$V(t, x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t \sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N -$$

$$- \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \times$$

$$\times \sin t\beta \, e^{i\sum_{k=1}^N x(t_k) y_k} d\beta \, dy_1 \ldots dy_N \, dt_1 \ldots dt_N, \tag{21}$$

где $\tilde{f}(y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N)$ — *преобразование Фурье функции* $f(\xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$, $\hat{h}(\beta, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N)$ — *синус-преобразование Фурье функции*

$$h(t, y_1, \ldots, y_N; t_1, \ldots, t_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} t^N f(t\xi_1, \ldots, t\xi_N; t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{N} y_k^2}\right) e^{-it\sum_{k=1}^{N} y_k\xi_k}\, d\xi_1 \ldots d\xi_N .$$

Доказательство. Согласно формуле (21) и формулам (8) и (15), функция

$$V(t, x) = V_1(t, x) - V_2(t, x).$$

Функция $V(t, x)$ удовлетворяет уравнению (18) $\left(\text{поскольку } \dfrac{\partial^2 V_1(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L V_1(t, x),\ \dfrac{\partial^2 V_2(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L V_2(t, x)\right)$, начальному условию (19) (поскольку $V_1(0, x) = F(x)$, $V_2(0, x) = 0$) и краевому условию (20) $\left(\text{поскольку } V_2(t, x)\big|_\Gamma = V_1(t, x)\right)$. Таким образом, формула (21) определяет решение задачи (18) – (20).

Теорема доказана.

3.2. Краевая задача с однородным начальным условием. Рассмотрим краевую задачу с однородным начальным условием для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L W(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{22}$$

$$W(0, x) = 0, \tag{23}$$

$$W(t, x) = G(t, x) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{24}$$

где $W(t, x)$ — функция на $[0, \mathcal{T}] \times H$, $G(t, x)$ — заданная функция.

Теорема 4. *Пусть функция* $G(t, x)$ *дважды дифференцируема по* t *и* $G(t, x) \in \mathfrak{G}^* \quad \forall\, t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$G(t, x) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 g\big(t, x(t_1), \ldots, x(t_N); t_1, \ldots, t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N$$

$\big(g(t, \xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$ *— функция на* $[0, \mathcal{T}] \times R^{2N}\big)$. *Пусть, кроме того,* $g(0, \xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N) = 0$, *а функции* $t^k g(t, \xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N)$, $k = 0, 1, 2$, *абсолютно интегрируемы в* $[0, \infty)$.

Предположим, что область $\bar{\Omega}$ *фундаментальна,* $\bar{\Omega} = \{x \in H : 0 \le Q(x) \le R^2\}$, $\Delta_L Q(x) = \text{const}$.

Тогда решение задачи (22) – (24) *задается формулой*

$$W(t, x) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}\big(\gamma, x(t_1) + \sqrt{2T(x)}\, z_1, \ldots, x(t_N) +$$

$$+ \sqrt{2T(x)}\, z_N; t_1, \ldots, t_N\big)\, e^{T(x)\gamma^2} \sin t\gamma\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} z_k^2}\, d\gamma\, dz_1 \ldots dz_N\, dt_1 \ldots dt_N, \tag{25}$$

где $\hat{g}(\gamma, \xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_N; t_1, \ldots, t_N) \sin\gamma\tau\, d\tau$ *— синус-преобразование Фурье функции* $g(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_N)$.

Доказательство. Из (25) имеем

$$\frac{\partial^2 W(t,\,x)}{\partial t^2} =$$

$$= -\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \gamma^2 \hat{g}\Big(\gamma,\, x(t_1) + \sqrt{2T(x)}\, z_1, \ldots, x(t_N) +$$

$$+ \sqrt{2T(x)}\, z_N;\, t_1, \ldots, t_N\Big)\, e^{T(x)\gamma^2} \sin t\gamma\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N z_k^2}\, d\gamma\, dz_1 \ldots dz_N\, dt_1 \ldots dt_N \quad (26)$$

и

$$\Delta_L W(t,\,x) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \gamma^2 \hat{g}\Big(\gamma,\, x(t_1) + \sqrt{2T(x)}\, z_1, \ldots, x(t_N) +$$

$$+ \sqrt{2T(x)}\, z_N;\, t_1, \ldots, t_N\Big)\, e^{T(x)\gamma^2}\, \Delta_L T(x) \times$$

$$\times \sin t\gamma\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N z_k^2}\, d\gamma\, dz_1 \ldots dz_N\, dt_1 \ldots dt_N +$$

$$+ \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial \xi_k^2} + \frac{z_k}{\sqrt{2T(x)}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \xi_k}\, \Delta_L T(x)\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N z_k^2} \times$$

$$\times e^{T(x)\gamma^2} \sin t\gamma\, dz_1 \ldots dz_N\, d\gamma\, dt_1 \ldots dt_N .$$

Но $\Delta_L T(x) = -1$, а интегрируя по частям, получаем

$$\int_{R^N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2 \hat{g}}{\partial \xi_k^2} - \frac{z_k}{\sqrt{2T(x)}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \xi_k}\right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N z_k^2}\, dz_1 \ldots dz_N = 0 .$$

Поэтому

$$\Delta_L W(t,\,x) =$$

$$= -\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \gamma^2 \hat{g}\Big(\gamma,\, x(t_1) + \sqrt{2T(x)}\, z_1, \ldots, x(t_N) +$$

$$+ \sqrt{2T(x)}\, z_N;\, t_1, \ldots, t_N\Big)\, e^{T(x)\gamma^2} \sin t\gamma\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N z_k^2}\, d\gamma\, dz_1 \ldots dz_N\, dt_1 \ldots dt_N . \quad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в уравнение (22), получаем тождество.

Полагая в (25) $t = 0$, имеем $W(0,\,x) = 0$.

На поверхности Γ $T(x) = 0$ и поэтому из (25) находим

$$W(t,\,x)\big|_\Gamma =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}\big(\gamma,\, x(t_1), \ldots, x(t_N);\, t_1, \ldots, t_N\big)\, \sin t\gamma\, d\gamma\, dt_1 \ldots dt_N =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 g\big(t,\, x(t_1), \ldots, x(t_N);\, t_1, \ldots, t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N \;=\; G(t,\, x).$$

Теорема доказана.

3.3. Начально-краевая задача. Рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 U(t,\, x)}{\partial t^2} \;=\; \Delta_L\, U(t,\, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{28}$$

$$U(0,\, x) \;=\; F(x), \tag{29}$$

$$U(t,\, x) \;=\; G(t,\, x) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{30}$$

где $U(t,\, x)$ — функция на $[0,\, \mathcal{T}] \times H$, $F(x)$, $G(t,\, x)$ — заданные функции.

Теорема 5. *Пусть функция* $F(x) \in \mathfrak{G}^*$,

$$F(x) \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\big(x(t_1), \ldots, x(t_N);\, t_1, \ldots, t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N\,,$$

где $f(\xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N)$ *— функция на* R^{2N}, *непрерывно дифференцируемая в каждой точке* $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in R^N$, *причем сама функция и ее производные до порядка* $N + 3$ *суммируемы в* R^N *и равны нулю на бесконечности. Пусть также* $\psi(0) = 0$, *где* $\psi(t) = t^N f(t\xi_1, \ldots, t\xi_N;\, t_1, \ldots, t_N)$.

Кроме того, функция $G(t,\, x)$ *дважды дифференцируема по* t *и* $G(t, x) \in \mathfrak{G}^* \quad \forall\, t \in [0,\, 1]$,

$$G(t,\, x) \;=\; \int_0^1 \ldots \int_0^1 g\big(t,\, x(t_1), \ldots, x(t_N);\, t_1, \ldots, t_N\big)\, dt_1 \ldots dt_N$$

($g(t,\, \xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N)$ *— функция на* $[0,\, \mathcal{T}] \times R^{2N}$). *Предположим, что* $g(0,\, \xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N) = 0$, *а функции* $t^k g(t,\, \xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N)$, $k = 0, 1, 2$, *абсолютно интегрируемы в* $[0,\, \infty)$.

Пусть область $\bar{\Omega}$ *фундаментальна,* $\bar{\Omega} = \big\{x \in H:\ 0 \le Q(x) \le R^2\big\}$, $\Delta_L\, Q(x) = \text{const}$.

Тогда решение задачи (28) – (30) *задается формулой*

$$U(t,\, x) \;=$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \tilde{f}(y_1, \ldots, y_N;\, t_1, \ldots, t_N) \times$$

$$\times \cos\left(t \sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2}\right) e^{i \sum_{k=1}^N x(t_k)\, y_k}\, dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N \;-$$

$$- \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{h}(\beta,\, y_1, \ldots, y_N;\, t_1, \ldots, t_N)\, e^{T(x)\left[\beta^2 - \sum_{k=1}^N y_k^2\right]} \times$$

$$\times \sin t\beta\, e^{i\sum_{k=1}^{N} x(t_k)\, y_k}\, d\beta\, dy_1 \ldots dy_N\, dt_1 \ldots dt_N \;+$$

$$+ \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{g}\Big(\gamma,\, x(t_1) + \sqrt{2T(x)}\, z_1, \ldots, x(t_N) \;+$$

$$+ \sqrt{2T(x)}\, z_N;\, t_1, \ldots, t_N\Big)\, e^{T(x)\gamma^2} \sin t\gamma\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} z_k^2}\, d\gamma\, dz_1 \ldots dz_N\, dt_1 \ldots dt_N, \quad (31)$$

где

$$\tilde{f}\big(y_1, \ldots, y_N;\, t_1, \ldots, t_N\big) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} f(\xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N)\, e^{-i\sum_{k=1}^{N} y_k \xi_k}\, d\xi_1 \ldots d\xi_N,$$

$$\hat{h}\big(\beta,\, y_1, \ldots, y_N;\, t_1, \ldots, t_N\big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty h(\tau,\, y_1, \ldots, y_N;\, t_1, \ldots, t_N) \sin\beta\tau\, d\tau,$$

$$h(t,\, y_1, \ldots, y_N;\, t_1, \ldots, t_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} t^N \tilde{f}(t\xi_1, \ldots, t\xi_N;\, t_1, \ldots, t_N) \;\times$$

$$\times \cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{N} y_k^2}\right) e^{it\sum_{k=1}^{N} y_k \xi_k}\, d\xi_1 \ldots d\xi_N,$$

$$\hat{g}\big(\gamma,\, \xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(\tau,\, \xi_1, \ldots, \xi_N;\, t_1, \ldots, t_N) \sin\gamma\tau\, d\tau.$$

Доказательство. Согласно формуле (31) функция $U(t, x) = V(t, x) + W(t, x)$, где $V(t, x)$ определяется формулой (21), а $W(t, x)$ — формулой (25).

Из теорем 3 и 4 следует, что функция $U(t, x)$ удовлетворяет уравнению (28) и для нее выполняются начальное условие (29) и краевое условие (30).

Теорема доказана.

1. *Lévy P.* Problémes concrets d'analyse fonctionnelle. – Paris: Gauthier-Villars, 1951. – 510 p.
2. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.
3. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. I // Функц. анализ и его прил. – 1967. – **1**, № 2. – С. 81 – 90.

Получено 29.04.09