УДК 517.96

С. В. Грищук, С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ В БИГАРМОНИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ*

We present a constructive description of monogenic functions taking values in a commutative biharmonic algebra by using analytic functions of a complex variable. We establish the isomorphism between algebras of monogenic functions defined in various biharmonic planes. We prove that every biharmonic function in a bounded simply connected domain is the first component of a monogenic function defined in the corresponding domain of a biharmonic plane.

Наведено конструктивний опис моногенних функцій, що набувають значень у комутативній бігармонічній алгебрі, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Встановлено ізоморфізм між алгебрами моногенних функцій, заданими в різних бігармонічних площинах. Доведено, що кожна бігармонічна функція в обмеженій однозв'язній області є першою компонентою деякої моногенної функції, заданої у відповідній області бігармонічної площини.

Ассоциативную, коммутативную над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебру второго ранга с единицей, согласно работе [1], будем называть *бигармонической*, если в ней имеется базис $\{e_1, e_2\}$, удовлетворяющий условиям

$$\left(e_1^2 + e_2^2\right)^2 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 \neq 0, \tag{1}$$

который также будем называть *бигармоническим*.

В работе [1] доказано, что существует единственная бигармоническая алгебра $\mathbb{B}$, базис которой (заметим, что он не является бигармоническим) состоит из единицы алгебры 1 и элемента ρ, для которого $\rho^2 = 0$. Кроме того, там же описаны все бигармонические базисы $\{e_1, e_2\}$ и показано, что они образуют двупараметрическое семейство:

$$e_1 = \alpha_1 + \alpha_2\rho, \qquad e_2 = \pm i\left(\alpha_1 + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2\alpha_1}\right)\rho\right), \tag{2}$$

где i — мнимая комплексная единица, а комплексные числа $\alpha_1 \neq 0$, α_2 могут быть выбраны произвольно. Здесь и далее во всех формулах, содержащих знак $\pm$, одновременно выбираются либо верхние, либо нижние знаки.

Под *бигармонической плоскостью* μ_{e_1, e_2} будем понимать линейную оболочку $\mu_{e_1, e_2} := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ элементов e_1, e_2 над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Области D декартовой плоскости xOy поставим в соответствие конгруэнт-

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект №25.1/084) и Государственной программы Украины № 0107U002027.

ную ей область $D_\zeta := \{\zeta = xe_1 + ye_2 : (x, y) \in D\}$ в плоскости μ_{e_1, e_2}.

Поскольку в равенствах (2) $\alpha_1 \neq 0$, то любой отличный от нуля элемент бигармонической плоскости обратим. Поэтому производная функций, заданных в областях бигармонической плоскости, определяется так же, как и в комплексной плоскости.

Так, функцию $\Phi : D_\zeta \to \mathbb{B}$ будем называть *моногенной* в области D_ζ, если в каждой точке $\zeta \in D_\zeta$ существует конечный предел

$$\lim_{h \to 0,\, h \in \mu_{e_1, e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big) h^{-1} = \Phi'(\zeta),$$

называемый *производной* функции Φ в точке ζ.

Если функция

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, ie_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, ie_2,$$
$$\zeta = xe_1 + ye_2, \tag{3}$$

где $U_k : D \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$, имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно в области D_ζ, то в силу равенства

$$\Delta^2 \Phi := \frac{\partial^4 \Phi(\zeta)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(\zeta)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(\zeta)}{\partial y^4} = \Phi^{(4)}(\zeta)\left(e_1^2 + e_2^2\right)^2 \tag{4}$$

и условия (1) каждая из ее компонент $U_k(x, y)$, $k = \overline{1, 4}$, является *бигармонической функцией*, т. е. удовлетворяет в области D бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 U(x, y) = 0. \tag{5}$$

Так же, как и моногенные функции в комплексной плоскости, моногенные функции в области D_ζ произвольной бигармонической плоскости μ_{e_1, e_2}, принимающие значения в бигармонической алгебре $\mathbb{B}$, в свою очередь, образуют алгебру, которую будем обозначать далее $\mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$.

В работе [2] рассмотрены моногенные функции, определенные в областях одной из бигармонических плоскостей, бигармонический базис в которой образуют элементы

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = i - \frac{i}{2}\rho, \tag{6}$$

и установлены необходимые и достаточные условия их моногенности (условия Коши – Римана), которые запишем здесь в свернутом виде

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} e_2 \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta. \tag{7}$$

Аналогично устанавливается, что функция (3) является моногенной в области D_ζ произвольной бигармонической плоскости μ_{e_1, e_2} тогда и только тогда, когда ее компоненты $U_k(x, y)$, $k = \overline{1, 4}$, дифференцируемы в области D и выполняется равенство

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y} e_1 = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} e_2 \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta. \tag{8}$$

В данной работе получено конструктивное описание всех моногенных функций в плоскости μ_{e_1, e_2} с помощью моногенных функций комплексной переменной и установлен изоморфизм между алгебрами моногенных функций, заданных в различных бигармонических плоскостях. Показано также, что каждая бигармоническая в ограниченной односвязной области функция является первой компонентой моногенной функции (3), которая при этом найдена в явном виде.

1. Конструктивное описание моногенных функций в плоскости μ_{e_1,e_2}. Единственному максимальному идеалу $\mathcal{J} \equiv \{c\rho : c \in \mathbb{C}\}$ алгебры $\mathbb{B}$ соответствует линейный непрерывный функционал $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, ядром которого является $\mathcal{J}$ и при этом $f(1) = 1$. Обозначим через G область в $\mathbb{C}$, на которую функционал f отображает область D_ζ. Введем в рассмотрение линейный оператор $\mathcal{A}$, который каждой функции $\Phi : D_\zeta \to \mathbb{B}$ ставит в соответствие функцию $F_\Phi : G \to \mathbb{C}$ по формуле $F_\Phi(z) := f(\Phi(\zeta))$, где $\zeta = xe_1 + ye_2$ и $z := = f(\zeta) = \alpha_1(x \pm iy)$.

Тогда очевидно, что если функция Φ моногенна в области D_ζ, то $F_\Phi(z) = = (\mathcal{A}\Phi)(z)$ — моногенная функция комплексной переменной z в области G, т. е. голоморфна, если $z = \alpha_1(x + iy)$, или антиголоморфна в случае $z = = \alpha_1(x - iy)$.

Аналогично теореме 2.4 из [3] доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждая моногенная в области D_ζ функция $\Phi : D_\zeta \to \mathbb{B}$ представима в виде*

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (t - \zeta)^{-1} (\mathcal{A}\Phi)(t)\, dt + \Phi_0(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{9}$$

где γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая в области G, охватывающая точку $f(\zeta)$, а $\Phi_0 : D_\zeta \to \mathcal{J}$ — моногенная в области D_ζ функция, принимающая значения в идеале $\mathcal{J}$.

Заметим, что комплексное число $z = f(\zeta)$ является спектром элемента ζ алгебры $\mathbb{B}$ и интеграл в равенстве (9) является главным продолжением моногенной функции $F(z) = (\mathcal{A}\Phi)(z)$ комплексной переменной z в область D_ζ.

Из теоремы 1 следует, что алгебра $\mathcal{M}(\mu_{e_1,e_2}, D_\zeta)$ разлагается в прямую сумму алгебры главных продолжений в D_ζ моногенных функций комплексной переменной и алгебры моногенных в D_ζ функций, принимающих значения в идеале $\mathcal{J}$.

В следующей теореме описаны все моногенные функции, определенные в области D_ζ произвольной бигармонической плоскости μ_{e_1,e_2} со значениями в идеале $\mathcal{J}$ с помощью моногенных функций комплексной переменной.

Теорема 2. *Каждая моногенная в области D_ζ функция $\Phi_0 : D_\zeta \to \mathcal{J}$, принимающая значения в идеале $\mathcal{J}$, представима в виде*

$$\Phi_0(\zeta) = F_0(z)\,\rho \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{10}$$

где $F_0 : G \to \mathbb{C}$ — моногенная функция комплексной переменной $z = f(\zeta)$.

Доказательство. Поскольку Φ_0 принимает значение в идеале $\mathcal{J}$, справедливо равенство

$$\Phi_0(\zeta) = \varphi_0(x, y)\,\rho \quad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta, \tag{11}$$

где $\varphi_0 : D \to \mathbb{C}$.

Для функции (11) выполняется условие моногенности (8) при $\Phi = \Phi_0$:

$$\frac{\partial\varphi_0(x, y)}{\partial y}\rho e_1 = \frac{\partial\varphi_0(x, y)}{\partial x}\rho e_2 \quad \forall (x, y) \in D. \tag{12}$$

Используя выражение обратного к e_1 элемента $e_1^{-1} = \dfrac{1}{\alpha_1}\left(1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\rho\right)$ и соотношения (2), получаем равенство $\rho e_1^{-1} e_2 = \pm i\rho$, с учетом которого приводим условие (12) к виду

$$\frac{\partial\varphi_0(x, y)}{\partial y}\rho = \pm i\frac{\partial\varphi_0(x, y)}{\partial x}\rho \quad \forall (x, y) \in D,$$

откуда, вследствие однозначности разложения элементов алгебры $\mathbb{B}$ по базису $\{1, \rho\}$, получаем равенство

$$\frac{\partial\varphi_0(x, y)}{\partial y} = \pm i\frac{\partial\varphi_0(x, y)}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D.$$

Следовательно, функция $F_0(z) := \varphi_0(x, y)$ является моногенной функцией комплексной переменной $z = f(xe_1 + ye_2)$ в области G.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Каждая моногенная в области* D_ζ *функция* $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}$ *имеет в* D_ζ *производные всех порядков.*

Доказательство. Функция Φ представляется равенством (9), в котором интеграл имеет производные всех порядков в области D_ζ, а моногенная функция Φ_0 представима в виде (10) и, следовательно, является бесконечно дифференцируемой по переменным x, y функцией в области D. Поэтому производная Φ_0' удовлетворяет в D_ζ условиям вида (8), т. е. является моногенной функцией. Аналогично устанавливается, что производные всех порядков функции Φ_0 являются моногенными функциями в области D_ζ.

Теорема доказана.

Из теоремы 3, равенства (4) и условия (1) следует, что компоненты $U_k(x, y)$, $k = \overline{1, 4}$, каждой функции (3), моногенной в области D_ζ, удовлетворяют бигармоническому уравнению (5) в области D.

В силу равенств (9), (10) все моногенные функции $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}$ могут быть построены с помощью двух произвольных комплекснозначных моногенных функций $F(z)$, $F_0(z)$ комплексной переменной $z \in G$ в виде

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma F(t)(t - \zeta)^{-1}\,dt + F_0\big(f(\zeta)\big)\rho \quad \forall \zeta \in D_\zeta. \tag{13}$$

В работе [2] построены в явном виде главные продолжения голоморфных функций комплексной переменной в бигармоническую плоскость μ_{e_1, e_2}, построенную на векторах (6).

Главное продолжение моногенной функции $F(z)$ комплексной переменной $z = \alpha_1(x \pm iy) \in G$ в область D_ζ произвольной бигармонической плоскости μ_{e_1, e_2} получим, использовав разложение резольвенты

$$(t-\zeta)^{-1} = \frac{1}{t-z} - \frac{1}{2\alpha_1}\frac{2\alpha_2 z \pm iy}{(t-z)^2}\rho \quad \forall\,\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta \quad \forall\, t\in\gamma$$

по базису $\{1, \rho\}$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(t)(t-\zeta)^{-1}\,dt = F(z) - \frac{F'(z)}{\alpha_1}\left(\alpha_2 z \pm \frac{iy}{2}\right)\rho \quad \forall\,\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta. \tag{14}$$

В частности, если $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и базисные элементы e_1, e_2 бигармонической плоскости μ_{e_1,e_2} определены равенствами (6), то правая часть равенства (14) упрощается и равенство (13) принимает вид

$$\Phi(\zeta) = F(z) - \left(\frac{iy}{2}F'(z) - F_0(z)\right)\rho \quad \forall\,\zeta = x + ye_2 \in D_\zeta, \tag{15}$$

где $z \equiv f(\zeta) = x + iy \in G$.

Заметим, что в работе [4] равенство (15) записано несколько в ином виде и получено для моногенных функций Φ при дополнительных предположениях о геометрии области D_ζ.

2. Об изоморфизме алгебр моногенных функций, заданных в различных бигармонических плоскостях. Рассмотрим сначала вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть бигармонические базисы* $\{e_1, e_2\}$ *и* $\{\tilde e_1, \tilde e_2\}$ *связаны соотношениями*

$$\tilde e_1 = e_1 + r_1\rho, \qquad \tilde e_2 = \pm(e_2 + r_2\rho), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Если функция $\Phi: D_\zeta \to \mathbb{B}$ *моногенна в области* D_ζ *бигармонической плоскости* μ_{e_1,e_2}, *то функция*

$$\tilde\Phi(\tilde\zeta) = \Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)(xr_1 + yr_2)\rho \tag{17}$$

является моногенной в области $\tilde D_{\tilde\zeta} := \left\{\tilde\zeta = x\tilde e_1 \pm y\tilde e_2 : \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\right\}$ *бигармонической плоскости* $\mu_{\tilde e_1,\tilde e_2}$.

Доказательство. Докажем, что из моногенности функции $\Phi(\zeta)$ в области D_ζ следует моногенность функции (17) в области $\tilde D_{\tilde\zeta}$. С этой целью покажем, что для функции $\tilde\Phi$ выполняются необходимые и достаточные условия моногенности вида (8), т. е. условия

$$\frac{\partial\tilde\Phi(\tilde\zeta)}{\partial y}\tilde e_1 = \pm\frac{\partial\tilde\Phi(\tilde\zeta)}{\partial x}\tilde e_2 \quad \forall\,\tilde\zeta = x\tilde e_1 \pm y\tilde e_2 \in D_{\tilde\zeta}. \tag{18}$$

В силу моногенности функций Φ и Φ' при всех $\zeta \in D_\zeta$ справедливы равенства

$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y} = \Phi'(\zeta)e_2, \qquad \frac{\partial\Phi'(\zeta)}{\partial y} = \Phi''(\zeta)e_2. \tag{19}$$

Теперь, учитывая соотношения (16), (17) и (19), получаем равенства

$$\frac{\partial\tilde\Phi(\tilde\zeta)}{\partial y}\tilde e_1 = \left(\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial y} + \frac{\partial\Phi'(\zeta)}{\partial y}(xr_1 + yr_2)\rho + r_2\Phi'(\zeta)\rho\right)(e_1 + r_1\rho) =$$

$$= \Big(\tilde{\Phi}'(\zeta)\, e_2 + \Phi''(\zeta)\,(x r_1 + y r_2)\, e_2 \rho + r_2 \Phi'(\zeta)\, \rho\Big)(e_1 + r_1 \rho) =$$

$$= \Phi'(\zeta)\big(e_1 e_2 + (r_2 e_1 + r_1 e_2)\,\rho\big) + \Phi''(\zeta)\,(x r_1 + y r_2)\, e_1 e_2 .$$

Аналогично с учетом равенств

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} = \Phi'(\zeta)\, e_1, \qquad \frac{\partial \Phi'(\zeta)}{\partial x} = \Phi''(\zeta)\, e_1,$$

справедливых при всех $\zeta \in D_\zeta$ вследствие моногенности функций Φ и Φ', находим

$$\pm \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta})}{\partial x}\, \tilde{e}_2 = \Phi'(\zeta)\big(e_1 e_2 + (r_2 e_1 + r_1 e_2)\,\rho\big) + \Phi''(\zeta)\,(x r_1 + y r_2)\, e_1 e_2 .$$

Таким образом, для функции $\tilde{\Phi}$ выполняются условия (18), т. е. она моногенна в области $\tilde{D}_{\tilde{\zeta}}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть бигармонические базисы* $\{e_1, e_2\}$, $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ *связаны соотношениями* (16) *и функция* $\tilde{\Phi} : \tilde{D}_{\tilde{\zeta}} \to \mathbb{B}$ *моногенна в области* $\tilde{D}_{\tilde{\zeta}}$ *бигармонической плоскости* $\mu_{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2}$. *Тогда существует единственная моногенная в области* $D_\zeta := \Big\{\zeta = x e_1 + y e_2 : \tilde{\zeta} = x \tilde{e}_1 \pm y \tilde{e}_2 \in \tilde{D}_{\tilde{\zeta}}\Big\}$ *бигармонической плоскости* μ_{e_1, e_2} *функция* $\Phi(\zeta)$, *удовлетворяющая равенству* (17).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\zeta) = \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) - \tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta})\,(x r_1 + y r_2)\, \tilde{e}_1^2\, \rho \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta, \tag{20}$$

моногенность которой в области D_ζ устанавливается аналогично тому, как при доказательстве леммы 1 доказана моногенность функции (17) в области $\tilde{D}_{\tilde{\zeta}}$.

Докажем, что функция (20) удовлетворяет равенству (17). С этой целью умножим обе части равенства (20) на ρ и далее, продифференцировав их по x, получим равенство

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\rho = \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta})}{\partial x}\rho \quad \forall\, \zeta \in D_\zeta . \tag{21}$$

Теперь с учетом соотношений $\dfrac{\partial \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta})}{\partial x} = \tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta})\, \tilde{e}_1$, $\dfrac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x} = \Phi'(\zeta)\, e_1$, $\tilde{e}_1 \rho = e_1 \rho$ и (21) получаем равенства

$$\tilde{\Phi}'(\tilde{\zeta})\, \tilde{e}_1^2\, \rho = \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta})}{\partial x}\, \tilde{e}_1 \rho = \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tilde{\zeta})}{\partial x}\, e_1 \rho = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_1 \rho = \Phi'(\zeta)\, e_1 ,$$

вследствие которых функция (20) удовлетворяет равенству (17).

Докажем, наконец, единственность моногенной функции Φ, удовлетворяющей равенству (17). Для этого достаточно показать, что функции $\tilde{\Phi} \equiv 0$ в $\tilde{D}_{\tilde{\zeta}}$ соответствует лишь функция $\Phi \equiv 0$ в D_ζ. Действительно, при $\tilde{\Phi} \equiv 0$ соотношение (17) принимает вид

$$\Phi(\zeta) + \Phi'(\zeta)\,(x r_1 + y r_2)\,\rho \equiv 0 . \tag{22}$$

Умножая тождество (22) почленно на ρ, получаем $\Phi(\zeta)\rho \equiv 0$, откуда, в свою очередь, следует тождество

$$\Phi'(\zeta)(xr_1 + yr_2)\rho \equiv 0. \tag{23}$$

Наконец, сравнивая тождества (22) и (23), убеждаемся в том, что $\Phi \equiv 0$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть бигармонический базис* $\{e_1, e_2\}$ *образован элементами* (6), *а* $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ — *произвольный бигармонический базис*, *элементы которого представлены равенствами вида* (2). *Пусть*, *кроме того*, D_ζ — *область бигармонической плоскости* μ_{e_1, e_2} *и* $\tilde{D}_{\tilde{\zeta}} := \left\{\tilde{\zeta} = x\tilde{e}_1 \pm y\tilde{e}_2 : \zeta = xe_1 + ye_2 \in \in D_\zeta\right\}$ — *соответствующая ей область бигармонической плоскости* $\mu_{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2}$. *Тогда алгебры* $\mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$, $\mathcal{M}(\mu_{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2}, \tilde{D}_{\tilde{\zeta}})$ *изоморфны*, *при этом соответствие между функциями* $\Phi \in \mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$ *и* $\tilde{\Phi} \in \mathcal{M}(\mu_{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2}, \tilde{D}_{\tilde{\zeta}})$ *устанавливается равенством* (17), *в котором* $r_1 := \alpha_2/\alpha_1$, $r_2 := i(\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 - 1)/(2\alpha_1^2)$, *а* α_1, α_2 — *те же комплексные числа*, *что и в равенствах вида* (2) *для элементов базиса* $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$.

Доказательство. Рассмотрим бигармонический базис $\left\{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}\right\}$ такой, что

$$\tilde{e}_1^{(1)} = \tilde{e}_1/\alpha_1, \qquad \tilde{e}_2^{(1)} = \tilde{e}_2/\alpha_1,$$

и определим область $\tilde{D}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}} := \left\{\tilde{\zeta}^{(1)} = x\tilde{e}_1^{(1)} \pm y\tilde{e}_2^{(1)} : \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\right\}$ в плоскости $\mu_{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}}$.

Каждой функции $\Phi \in \mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$ поставим в соответствие функцию $\tilde{\Phi}^{(1)} \in \mathcal{M}\left(\mu_{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}}, \tilde{D}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}\right)$ по формуле вида (17). Поскольку элементы базиса $\left\{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}\right\}$ связаны с элементами e_1, e_2 соотношениями вида (16), в силу лемм 1, 2 указанное соответствие между алгебрами $\mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$, $\mathcal{M}\left(\mu_{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}}, \tilde{D}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}\right)$ является взаимно однозначным. При этом из равенств

$$\tilde{\Phi}_1^{(1)}\left(\tilde{\zeta}^{(1)}\right)\tilde{\Phi}_2^{(1)}\left(\tilde{\zeta}^{(1)}\right) =$$

$$= \left(\Phi_1(\zeta) + \Phi_1'(\zeta)(xr_1 + yr_2)\rho\right)\left(\Phi_2(\zeta) + \Phi_2'(\zeta)(xr_1 + yr_2)\rho\right) =$$

$$= \Phi_1(\zeta)\Phi_2(\zeta) + \left(\Phi_1(\zeta)\Phi_2(\zeta)\right)'(xr_1 + yr_2)\rho$$

следует, что произведение функций $\tilde{\Phi}_1^{(1)}$, $\tilde{\Phi}_2^{(1)} \in \mathcal{M}\left(\mu_{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}}, \tilde{D}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}\right)$ соответствует произведению функций Φ_1, $\Phi_2 \in \mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$, т. е. алгебры $\mathcal{M}(\mu_{e_1, e_2}, D_\zeta)$, $\mathcal{M}\left(\mu_{\tilde{e}_1^{(1)}, \tilde{e}_2^{(1)}}, \tilde{D}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}\right)$ изоморфны.

Наконец, изоморфизм между алгебрами $\mathcal{M}\left(\mu_{\tilde{e}_1^{(1)},\tilde{e}_2^{(1)}}, \tilde{D}^{(1)}_{\tilde{\zeta}^{(1)}}\right)$, $\mathcal{M}(\mu_{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2}, \tilde{D}_{\tilde{\zeta}})$ устанавливается с помощью равенства

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\zeta}) := \tilde{\Phi}^{(1)}\left(\tilde{\zeta}^{(1)}\right), \quad \tilde{\zeta} = \alpha_1\tilde{\zeta}^{(1)},$$

при этом моногенность функции $\tilde{\Phi}$ в области $\tilde{D}_{\tilde{\zeta}}$ является очевидным следствием условий моногенности вида (8) для функции $\tilde{\Phi}^{(1)}$ и неравенства $\alpha_1 \neq \neq 0$.

Теорема доказана.

Теперь представляется очевидным тот факт, что согласно теореме 4 в дальнейших исследованиях достаточно ограничиться изучением моногенных функций в бигармонической плоскости μ_{e_1,e_2}, построенной на векторах (6).

3. Представление бигармонических функций в виде компонент моногенных функций. Всюду в дальнейшем базисные элементы e_1, e_2 бигармонической плоскости μ_{e_1,e_2} определены равенствами (6).

Покажем, что каждая функция $U_1(x, y)$, бигармоническая в ограниченной односвязной области D декартовой плоскости xOy, является первой компонентой некоторой функции (3), моногенной в соответствующей области D_ζ бигармонической плоскости μ_{e_1,e_2}.

Рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 3. *Любая моногенная функция* (3), *у которой* $U_1 \equiv 0$, *имеет вид*

$$\Phi(\zeta) = i\left(-ax^2 + kx - ay^2 - by + n\right) + e_2\left(2ay^2 + 2by + c\right) +$$
$$+ ie_2(-2axy - bx + ky + m) \quad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2, \tag{24}$$

где a, b, c, k, m, n *— произвольные действительные постоянные.*

Доказательство. Условие моногенности (7), записанное покомпонентно, имеет вид (см. [2])

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U_3(x, y)}{\partial x}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U_4(x, y)}{\partial x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial U_3(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} - 2\frac{\partial U_4(x, y)}{\partial x}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial U_4(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial U_2(x, y)}{\partial x} + 2\frac{\partial U_3(x, y)}{\partial x}. \tag{28}$$

Подставляя функцию $U_1 \equiv 0$ в равенство (25) и интегрируя затем его по переменной x, получаем

$$U_3(x, y) = u_3(y) \quad \forall\,(x, y) \in D. \tag{29}$$

Здесь и далее в доказательстве через u_k при $k = 2, 3, 4$ обозначены некоторые бесконечно дифференцируемые функции $u_k : D^y \to \mathbb{R}$, где D^y — проекция области D на ось Oy.

Теперь после интегрирования равенства (27) по переменной x с учетом тождества $U_1 \equiv 0$ и равенства (29) приходим к равенству

$$U_4(x, y) = -\frac{x}{2}u_3'(y) + u_4(y) \quad \forall (x, y) \in D. \tag{30}$$

Подставляя выражения (29), (30) в равенство (28) и интегрируя его по переменной x, получаем

$$U_2(x, y) = -\frac{1}{4}x^2 u_3''(y) + xu_4'(y) + u_2(y) \quad \forall (x, y) \in D. \tag{31}$$

С учетом равенств (30), (31) равенство (26) приводится к виду

$$-\frac{x^2}{4}u_3'''(y) + xu_4''(y) + u_2'(y) + \frac{1}{2}u_3'(y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D. \tag{32}$$

Далее, дифференцируя дважды равенство (32) по переменной x, получаем равенства

$$u_3'''(y) = u_4''(y) = 0 \tag{33}$$

$$\forall y \in D^y.$$

$$u_2'(y) + \frac{1}{2}u_3'(y) = 0 \tag{34}$$

После интегрирования равенств (33) соответствующее число раз по переменной y находим функции u_3 и u_4:

$$u_3(y) = 2ay^2 + 2by + c, \qquad u_4(y) = ky + m \quad \forall y \in D^y, \tag{35}$$

где a, b, c, k, m — произвольные действительные постоянные.

Следовательно, после подстановки функций (35) в равенства (29), (30) получаем

$$U_3(x, y) = 2ay^2 + 2by + c \tag{36}$$

$$\forall (x, y) \in D.$$

$$U_4(x, y) = -2axy - bx + ky + m \tag{37}$$

Аналогично, после подстановки функции u_3 в равенство (34) и интегрирования его по переменной y находим функцию u_2:

$$u_2(y) = -ay^2 - by + n \quad \forall y \in D^y, \tag{38}$$

где n — произвольная действительная постоянная, а после подстановки функций (35), (38) в равенство (31) получаем

$$U_2(x, y) = -ax^2 + kx - ay^2 - by + n \quad \forall (x, y) \in D. \tag{39}$$

Наконец, после подстановки компонент $U_1 \equiv 0$, (36), (37), (39) в разложение (3) моногенной функции Φ получаем равенство (24).

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть D — ограниченная односвязная область декартовой плоскости xOy. Если F — голоморфная функция в области $G := \{z = x + iy : (x, y) \in D\}$ комплексной плоскости, то функции*

$$\Phi_1(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y) - e_2 v(x, y) + ie_2 u(x, y),$$

$$\Phi_2(\zeta) = yu(x, y) + iyv(x, y) + e_2\big(\mathcal{U}(x, y) - yv(x, y)\big) +$$

$$+ ie_2\big(\mathcal{V}(x, y) + yu(x, y)\big),$$

$$\Phi_3(\zeta) = xu(x, y) + ixv(x, y) + e_2\big(\mathcal{V}(x, y) - xv(x, y)\big) +$$
$$+ ie_2\big(xu(x, y) - \mathcal{U}(x, y)\big) \quad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta$$

являются моногенными в области D_ζ *бигармонической плоскости* μ_{e_1, e_2}; *здесь*

$$u(x, y) := \operatorname{Re} F(z), \qquad v(x, y) := \operatorname{Im} F(z),$$
$$\mathcal{U}(x, y) := \operatorname{Re} \mathcal{F}(z), \qquad \mathcal{V}(x, y) := \operatorname{Im} \mathcal{F}(z) \quad \forall\, z = x + iy$$

и $\mathcal{F}$ *— первообразная функция* F *в области* G.

Доказательство проводится непосредственной проверкой условий моногенности (7) для функций Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Известно, что каждая бигармоническая функция $U_1(x, y)$ в области D представляется формулой Гурса (см., например, [5, c. 108])

$$U_1(x, y) = \operatorname{Re}\big(\varphi(z) + \bar{z}\psi(z)\big), \quad z = x + iy, \tag{40}$$

где φ, ψ — голоморфные функции в области G, определенной в лемме 4, $\bar{z} := x - iy$.

Теорема 5. *Каждая функция* $U_1(x, y)$, *бигармоническая в ограниченной односвязной области* D *декартовой плоскости* xOy, *является первой компонентой в разложении* (3) *функции*

$$\Phi(\zeta) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + ie_2\big(\varphi(z) + \bar{z}\psi(z) - 2\,\mathcal{F}(z)\big), \tag{41}$$
$$\zeta = xe_1 + ye_2, \qquad z = x + iy,$$

моногенной в области D_ζ *бигармонической плоскости* μ_{e_1, e_2}, *при этом* φ, ψ *— голоморфные в области* $G := \{z = x + iy : (x, y) \in D\}$ *функции, входящие в равенство* (40), *и* $\mathcal{F}$ *— первообразная функции* ψ *в области* G. *Все моногенные в области* D_ζ *функции, в разложении* (3) *которых первой компонентой является функция* U_1, *представимы в виде суммы функций* (24) *и* (41).

Доказательство. После введения обозначений $u_1(x, y) := \operatorname{Re}\varphi(z)$, $u_2(x, y) := \operatorname{Re}\psi(z)$, $v_2(x, y) := \operatorname{Im}\psi(z)$ перепишем равенство (40) в виде

$$U_1(x, y) = u_1(x, y) + xu_2(x, y) + yv_2(x, y). \tag{42}$$

Теперь, используя равенство (42) и лемму 4, убеждаемся в том, что функция (41) моногенна в области D_ζ и ее первой компонентой в разложении (3) является функция U_1. Наконец, применение леммы 3 очевидным образом приводит к описанию всех моногенных в области D_ζ функций, в разложении (3) которых первой компонентой является функция U_1, в виде суммы функций (24) и (41).

Теорема доказана.

1. *Мельниченко И. П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – **36**, № 2. – С. 252 – 254.
2. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25 – 27.
3. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 230 с.
4. *Ковалев В. Ф.* Бигармоническая задача Шварца. – Киев, 1986. – 19 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 86.16).
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 708 с.

Получено 31.03.09