УДК 517.925.44

В. М. Евтухов, Е. С. Владова (Одес. нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Asymptotic representations are established for one class of solutions of two-dimensional systems of ordinary differential equations of a type more general than the type of Emden – Fowler systems.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків двовимірних систем звичайних диференціальних рівнянь більш загального типу, ніж системи типу Емдена – Фаулера.

1. Постановка задачи и основной результат. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{3-i}(y_{3-i}), \quad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$; $p_i(t) : [a, \omega[\ \to \ ]0, +\infty[$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$[1], $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to \ ]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемые и правильно меняющиеся при $y \to Y_i^0$ функции порядков σ_i таких, что $\sigma_1\sigma_2 \ne 1$, где $\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Такая система уравнений в случае, когда $\varphi_i(y) = |y|^{\sigma_i}$, называется системой типа Эмдена – Фаулера. Асимптотические свойства ее решений детально исследованы в работах [1 – 3].

В настоящей работе, отказываясь от предположения, что функции $\varphi_i(y)$, $i = 1, 2$, являются степенными, предполагаем, что они близки к степенным в окрестностях точек Y_i^0 в смысле определения правильно меняющихся функций [4].

Решение $(y_i)_{i=1}^2$ системы (1.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\ \subset [a, \omega[$, будем называть $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решением, если для него выполняются условия

$$y_i(t) \in \Delta(Y_i^0) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0,$$
$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, y_i'(t)}{y_i(t)} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases}$$

[1] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

Целью работы является установление в случае, когда λ_1 и λ_2 — отличные от нуля вещественные постоянные, необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решений системы дифференциальных уравнений (1.1), а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ формул для таких решений.

Положив

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо } Y_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(Y_i^0) - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо } Y_i^0 = 0 \text{ и } \Delta(Y_i^0) - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$

заметим, что числа μ_i, $i = 1, 2$, определяют знаки компонент $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решения в некоторой левой окрестности ω.

Кроме того, положим

$$I_{i1}(t) = \int_{A_{i1}}^{t} p_i(\tau)\,d\tau, \qquad I_{i2}(t) = \int_{A_{i2}}^{t} \pi_\omega(\tau)\, p_i(\tau)\,d\tau, \quad i = 1, 2,$$

где

$$A_{i1} = \begin{cases} \omega, & \text{если } \int_a^\omega p_i(\tau)\,d\tau < +\infty, \\ a, & \text{если } \int_a^\omega p_i(\tau)\,d\tau = +\infty, \end{cases}$$

$$A_{i2} = \begin{cases} \omega, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|\, p_i(\tau)\,d\tau < +\infty, \\ a, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|\, p_i(\tau)\,d\tau = +\infty. \end{cases}$$

Также отметим, что в силу свойств правильно меняющихся функций [4]

$$\lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta(Y_i^0)}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \qquad \varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\theta_i(z), \quad i = 1, 2, \tag{1.3}$$

где $\theta_i(z)$ — медленно меняющаяся при $z \to Y_i^0$ функция.

Теорема. *Пусть* $\lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i = 1, 2$. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-*решений системы дифференциальных уравнений* (1.1) *необходимо, а если выполняется одно из условий*

$$\text{либо } \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0, \text{ либо } \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \text{ и } \sigma_1\sigma_2 < 1, \tag{1.4}$$

то и достаточно, чтобы для каждого $i \in \{1, 2\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, p_i(t)}{I_{i1}(t)} = \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i}, \quad \text{если} \quad \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} = 0, \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega^2(t)\,p_i(t)}{I_{i2}(t)} = 1, \quad \textit{если} \quad \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} = 0, \tag{1.6}$$

и выполнялись знаковые условия

$$\lambda_i\pi_\omega(t) > 0 \quad \textit{при} \quad Y_i^0 = \pm\infty, \qquad \lambda_i\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad Y_i^0 = 0, \tag{1.7}$$

$$\alpha_i \operatorname{sign}\left[\lambda_i\pi_\omega(t)\right] = \mu_i. \tag{1.8}$$

Более того, каждое такое решение допускает при $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} = \frac{\alpha_i\pi_\omega(t)\,p_i(t)}{\lambda_i}\left[1+o(1)\right], \quad i=1,2, \tag{1.9}$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда $\lambda_1\lambda_2(1-\sigma_1\sigma_2) < 0$, *и двупараметрическое семейство, если* $(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_\omega(t) > 0$ *при* $t\in[a,\omega[$ *и* $\lambda_1\lambda_2(1-\sigma_1\sigma_2) > 0$.

Замечание. Разность $\lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i}$ согласно условиям $\lambda_i \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $i = 1, 2$, и $\sigma_1\sigma_2 \neq 1$ может быть равна нулю лишь при одном значении $i\in\{1,2\}$.

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $y_i : [t_0,\omega[\to \Delta(Y_i^0)$, $i=1,2$, — произвольное $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решение системы дифференциальных уравнений (1.1). Тогда согласно определению P_ω-решения, а именно в силу (1.2), с учетом введенных чисел μ_i, $i=1,2$, имеем $y_i(t) = \mu_i\,|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i+o(1)}$, $i=1,2$, при $t\uparrow\omega$. Поскольку здесь $\lambda_i\neq 0$, то $|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i} \to Y_i$, $i=1,2$, при $t\uparrow\omega$ и поэтому выполняются условия (1.7).

Далее, в силу третьего из условий (1.2) из (1.1) имеем

$$\lambda_i\, y_i(t) = \alpha_i\pi_\omega(t)\,p_i(t)\,\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)\left[1+o(1)\right], \quad i=1,2, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{1.10}$$

Отсюда вытекают асимптотические представления (1.9) и с учетом того, что функции φ_i, p_i, $i=1,2$, положительны на промежутках, где они определены, — соотношения (1.8).

Теперь с учетом условий (1.2) и (1.3) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{y_i(t)}{\pi_\omega(t)\,\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}\right)'}{\dfrac{y_i(t)}{\pi_\omega(t)\,\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}} = \lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\pi_\omega(t)\,y_i'(t)}{y_i(t)} - 1 -\right.$$

$$\left. - \frac{\pi_\omega(t)\,y_{3-i}'(t)}{y_{3-i}(t)}\,\frac{y_{3-i}(t)\,\varphi_{3-i}'\big(y_{3-i}(t)\big)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}\right) = \lambda_i - 1 - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} \neq -1,$$

$$\text{если } \lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} \neq 0,$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}\right)'}{\dfrac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}} = \lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\pi_\omega(t)\,y_i'(t)}{y_i(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi_\omega(t)\,y_{3-i}'(t)}{y_{3-i}(t)}\,\frac{y_{3-i}(t)\,\varphi_{3-i}'\big(y_{3-i}(t)\big)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}\right) = 0, \quad \text{если} \quad \lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} = 0\,.$$

В силу этих предельных соотношений

$$\int_{\tilde A_i}^{t}\frac{y_i(\tau)\,d\tau}{\pi_\omega(\tau)\,\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(\tau)\big)} = \frac{y_i(t)\big[1+o(1)\big]}{\big(\lambda_i-\lambda_{3-i}\sigma_{3-i}\big)\,\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$\text{если} \quad \lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} \neq 0\,,$$

$$\int_{\tilde A_i}^{t}\frac{y_i(\tau)\,d\tau}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(\tau)\big)} = \frac{\pi_\omega(t)\,y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$\text{если} \quad \lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} = 0\,,$$

где предел интегрирования $\tilde A_i$ равен либо ω, либо t_0 и выбран так, чтобы соответствующий интеграл стремился при $t\uparrow\omega$ либо к нулю, либо к $\pm\infty$.

Поэтому, записывая (1.10) в виде

$$\frac{y_i(t)}{\pi_\omega(t)\,\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} = \alpha_i\,\lambda_i^{-1}\,p_i(t)\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$\text{если} \quad \lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} \neq 0\,,$$

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} = \alpha_i\,\lambda_i^{-1}\,\pi_\omega(t)\,p_i(t)\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$\text{если} \quad \lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i} = 0\,,$$

в результате интегрирования на промежутке от $\tilde A_i$ до t получаем для каждого $i\in\{1, 2\}$ при $t\uparrow\omega$ асимптотические соотношения

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} = \frac{\alpha_i(\lambda_i-\sigma_{3-i}\lambda_{3-i})}{\lambda_i}\,I_{i1}(t)\big[1+o(1)\big],$$

$$\text{если} \quad \lambda_i - \sigma_{3-i}\,\lambda_{3-i} \neq 0\,,$$

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} = \frac{\alpha_i\,I_{i2}(t)}{\lambda_i\,\pi_\omega(t)}\big[1+o(1)\big], \quad \text{если} \quad \lambda_i - \sigma_{3-i}\,\lambda_{3-i} = 0\,.$$

Из этих асимптотических соотношений и (1.10) вследствие определения $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решения вытекают условия (1.5) и (1.6).

Достаточность. Предположим, что $\lambda_i \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $i = 1, 2$, и наряду с условиями (1.5) – (1.8) выполняется одно из условий (1.4). Покажем, что в этом случае система дифференциальных уравнений (1.1) имеет хотя бы одно $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения (1.9).

Сначала, рассматривая систему соотношений вида

$$\frac{y_i}{\varphi_{3-i}(y_{3-i})} = Q_i(t)\left[1 + v_i\right], \quad i = 1, 2, \tag{1.11}$$

в которой

$$Q_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{3-i}\sigma_{3-i})}{\lambda_i} I_{i1}(t), & \text{если } \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} \neq 0, \\ \dfrac{\alpha_i}{\lambda_i}\dfrac{I_{i2}(t)}{\pi_\omega(t)}, & \text{если } \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} = 0, \end{cases}$$

устанавливаем, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [\,t_0, \omega\,[\, \times V_0$, где $t_0 \in [\,a, \omega\,[$ и $V_0 = \{(v_1, v_2) : |v_i| \le 1/2,\ i = 1, 2\}$, непрерывно дифференцируемые неявные функции $y_i = Y_i(t, v_1, v_2)$ вида

$$Y_i(t, v_1, v_2) = \mu_i\,|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i + z_i(t, v_1, v_2)}, \quad i = 1, 2, \tag{1.12}$$

где функции z_i таковы, что

$$|z_i(t, v_1, v_2)| \le \frac{|\lambda_i|}{2} \quad \text{при} \quad (t, v_1, v_2) \in D_0 \tag{1.13}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t, v_1, v_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in V_0. \tag{1.14}$$

Для этого, полагая в (1.11)

$$y_i = \mu_i\,|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i + z_i}, \quad i = 1, 2, \tag{1.15}$$

получаем с учетом (1.3) и (1.5) – (1.8) определенную на множестве $\Omega_0 = [\,t_1, \omega\,[\, \times Z_0 \times V_0$, где t_1 — некоторое число из промежутка $[\,a, \omega\,[$ и $Z_0 = \{(z_1, z_2) : |z_i| \le |\lambda_i|/2\}$, систему соотношений вида

$$|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i + z_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} - \sigma_{3-i}z} =$$
$$= |Q_i(t)|\,\theta_{3-i}\Big(\mu_{3-i}|\pi_\omega(t)|^{\lambda_{3-i} + z_{3-i}}\Big)(1 + v_i), \quad i = 1, 2,$$

откуда следует, что

$$z_i - \sigma_{3-i}\,z_{3-i} = \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} - \lambda_i +$$
$$+ \frac{\ln\Big[|Q_i(t)|\,\theta_{3-i}\Big(\mu_{3-i}|\pi_\omega(t)|^{\lambda_{3-i}+z_{3-i}}\Big)(1 + v_i)\Big]}{\ln|\pi_\omega(t)|}, \quad i = 1, 2.$$

Теперь, частично разрешая эту систему относительно z_1 и z_2, находим

$$z_i = -\lambda_i + a_i(t) + b_i(t, v_1, v_2) + Z_i(t, z_1, z_2), \quad i = 1, 2, \tag{1.16}$$

где

$$a_i(t) = \frac{\ln\Big(|Q_i(t)|\,|Q_{3-i}(t)|^{\sigma_{3-i}}\Big)}{(1-\sigma_1\sigma_2)\ln|\pi_\omega(t)|},$$

$$b_i(t, v_1, v_2) = \frac{\ln\Big[(1+v_i)(1+v_{3-i})^{\sigma_{3-i}}\Big]}{(1-\sigma_1\sigma_2)\ln|\pi_\omega(t)|},$$

$$Z_i(t, z_1, z_2) = \frac{\ln\Big[\theta_{3-i}\Big(\mu_{3-i}|\pi_\omega(t)|^{\lambda_{3-i}+z_{3-i}}\Big)\theta_i^{\sigma_{3-i}}\Big(\mu_i|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i+z_i}\Big)\Big]}{(1-\sigma_1\sigma_2)\ln|\pi_\omega(t)|},$$

$$i = 1, 2.$$

Здесь

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_i(t, v_1, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in V_0 \tag{1.17}$$

и в силу свойств медленно меняющихся функций (см. [4])

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z_i(t, z_1, z_2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad (z_1, z_2) \in Z_0. \tag{1.18}$$

Поскольку выполняются условия (1.5), (1.6), имеют место асимптотические представления

$$|Q_i(t)|\,|Q_{3-i}(t)|^{\sigma_{3-i}} = C_i|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i(1-\sigma_1\sigma_2)+o(1)}, \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные, и поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_i(t) = \lambda_i, \quad i = 1, 2. \tag{1.19}$$

Кроме того, имеем

$$\frac{\partial Z_i(t, z_1, z_2)}{\partial z_i} = \frac{\sigma_{3-i}}{1-\sigma_1\sigma_2}\,\frac{\mu_i|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i+z_i}\,\theta_i'\Big(\mu_i|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i+z_i}\Big)}{\theta_i\Big(\mu_i|\pi_\omega(t)|^{\lambda_i+z_i}\Big)},$$

$$\frac{\partial Z_i(t, z_1, z_2)}{\partial z_{3-i}} =$$

$$= \frac{1}{1-\sigma_1\sigma_2}\,\frac{\mu_{3-i}|\pi_\omega(t)|^{\lambda_{3-i}+z_{3-i}}\,\theta_{3-i}'\Big(\mu_{3-i}|\pi_\omega(t)|^{\lambda_{3-i}+z_{3-i}}\Big)}{\theta_{3-i}\Big(\mu_{3-i}|\pi_\omega(t)|^{\lambda_{3-i}+z_{3-i}}\Big)}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда с учетом условий $\lim\limits_{z\to Y_i^0}\dfrac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = 0$, $i = 1, 2$, которым удовлетворяют медленно меняющиеся функции θ_i, $i = 1, 2$, следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\partial Z_i(t, z_1, z_2)}{\partial z_k} = 0, \quad i, k = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad (z_1, z_2) \in Z_0.$$

В силу приведенных выше предельных соотношений существует число $t_0 \in \in [t_1, \omega[$ такое, что на множестве $[t_0, \omega[\times Z_0 \times V_0$ выполняются неравенства

$$|a_i(t) + b_i(t, v_1, v_2) + Z_i(t, z_1, z_2) - \lambda_i| \le \frac{\lambda_0}{2}, \quad i = 1, 2, \tag{1.20}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\},$$

и условия Липшица

$$|Z_i(t, z_1, z_2) - Z_i(t, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)| \le \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{2} |z_k - \tilde{z}_k|, \quad i = 1, 2, \tag{1.21}$$

при $t \in [t_0, \omega[$ и любых $(z_1, z_2), (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \in Z_0$.

Выбрав таким образом число t_0, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_0, \omega[\times V_0$ вектор-функций $z = (z_i)_{i=1}^2 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ с нормой

$$\|z\| = \sup\{|z_1(t, v_1, v_2)| + |z_2(t, v_1, v_2)| : (t, v_1, v_2) \in \Omega\}.$$

Выделим из него подпространство $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\| \le \le \lambda_0$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0, 1)$, оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^2$, определенный соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi_i(z)(t, v_1, v_2) &= z_i(t, v_1, v_2) - \\ &- \nu[z_i(t, v_1, v_2) + \lambda_i - a_i(t) - b_i(t, v_1, v_2) - \\ &- Z_i(t, z_1(t, v_1, v_2), z_2(t, v_1, v_2))], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Для любого $z \in \mathbf{B}_0$ в силу условий (1.20) имеем

$$|\Phi_i(z)(t, v_1, v_2)| \le (1 - \nu)|z_i(t, v_1, v_2)| + \frac{\nu\lambda_0}{2}, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{при} \quad (t, v_1, v_2) \in \Omega.$$

Поэтому на множестве Ω

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} |\Phi_i(z)(t, v_1, v_2)| &\le (1 - \nu) \sum_{i=1}^{2} |z_i(t, v_1, v_2)| + \\ &+ \nu\lambda_0 \le (1 - \nu)\|z\| + \nu\lambda_0 \le (1 - \nu)\lambda_0 + \nu\lambda_0 = \lambda_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|\Phi(z)\| \le \lambda_0$, т. е. $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z, \tilde{z} \in \mathbf{B}_0$. Тогда в силу (1.21) при $(t, v_1, v_2) \in \Omega$

$$\left|\Phi_i(z)(t, v_1, v_2) - \Phi_i(\tilde z)(t, v_1, v_2)\right| \le (1-\nu)\left|z_i(t, v_1, v_2) - \tilde z_i(t, v_1, v_2)\right| +$$

$$+ \nu\left|Z_i\big(t, z_1(t, v_1, v_2), z_2(t, v_1, v_2)\big) - Z_i\big(t, \tilde z_1(t, v_1, v_2), \tilde z_2(t, v_1, v_2)\big)\right| \le$$

$$\le (1-\nu)\left|z_i(t, v_1, v_2) - \tilde z_i(t, v_1, v_2)\right| +$$

$$+ \frac{\nu}{3}\sum_{k=1}^{2}\left|z_k(t, v_1, v_2) - \tilde z_k(t, v_1, v_2)\right|, \quad i = 1, 2.$$

Значит, на множестве Ω

$$\sum_{k=1}^{2}\left|\Phi_k(z)(t, v_1, v_2) - \Phi_k(\tilde z)(t, v_1, v_2)\right| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{\nu}{3}\right)\sum_{k=1}^{2}\left|z_k(t, v_1, v_2) - \tilde z_k(t, v_1, v_2)\right| \le \left(1 - \frac{\nu}{3}\right)\|z - \tilde z\|,$$

откуда следует, что

$$\|\Phi(z) - \Phi(\tilde z)\| \le \left(1 - \frac{\nu}{3}\right)\|z - \tilde z\|.$$

Тем самым показано, что оператор Φ отображает пространство $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (1.22) эта непрерывная на множестве Ω вектор-функция является единственным решением системы (1.16), удовлетворяющим условию $\|z\| \le \lambda_0$. Из (1.16) с учетом этого условия и (1.17) – (1.19) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве Ω непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определяемых системой соотношений. Вследствие (1.15) полученной вектор-функции $z = (z_i)_{i=1}^2$ соответствует вектор-функция $(Y_i)_{i=1}^2$ с компонентами вида (1.12), которая является решением системы (1.11).

Теперь, применяя к системе дифференциальных уравнений (1.1) преобразование

$$y_i(t) = Y_i\big(t, v_1(x), v_2(x)\big), \quad i = 1, 2, \qquad x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \tag{1.23}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и учитывая, что вектор-функция $\big(Y_i(t, v_1(x), v_2(x))\big)_{i=1}^2$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $\big(v_1(x), v_2(x)\big) \in V_0$ является решением системы уравнений

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)} = Q_i(t)\big[1 + v_i(x)\big], \quad i = 1, 2, \tag{1.24}$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$v_i' = \beta h_i(x) - \beta h_{3-i}(x)\,\xi_{3-i}(x, v_1, v_2)\,\frac{1+v_i}{1+v_{3-i}} -$$

$$- \beta g_i(x)\big[1+v_i\big], \quad i = 1, 2, \tag{1.25}$$

в которой

$$h_i(x) =$$

$$= h_i(x(t)) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i}}\,\dfrac{\pi_\omega(t)\,p_i(t)}{I_{i1}(t)}, & \text{если } \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} \neq 0, \\ \dfrac{\lambda_i\,\pi_\omega^2(t)\,p_i(t)}{I_{i2}(t)}, & \text{если } \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} = 0, \end{cases}$$

$$g_i(x(t)) = \begin{cases} \dfrac{\pi_\omega(t)\,p_i(t)}{I_{i1}(t)}, & \text{если } \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} \neq 0, \\ \dfrac{\pi_\omega^2(t)\,p_i(t)}{I_{i2}(t)} - 1, & \text{если } \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i} = 0, \end{cases}$$

$$\xi_i(x, v_1, v_2) = \xi(x(t), v_1, v_2) = \frac{Y_i(t, v_1, v_2)\,\varphi_i'(Y_i(t, v_1, v_2))}{Y_i(t, v_1, v_2)}.$$

Здесь в силу условий (1.5), (1.6)

$$\lim_{x\to+\infty} h_i(x) = \lim_{t\uparrow\omega} h_i(x(t)) = \lambda_i,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_i(x) = \lim_{t\uparrow\omega} g_i(x(t)) = \lambda_i - \sigma_{3-i}\lambda_{3-i}, \quad i = 1, 2. \tag{1.26}$$

Поскольку $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y_i(t, v_1, v_2) = Y_i^0$, $i = 1, 2$, равномерно по $(v_1, v_2) \in V_0$ и выполняется первое из условий (1.3), то, кроме того, имеет место представление

$$\xi_i(x, v_1, v_2) = \sigma_i + R_{i1}(x, v_1, v_2), \quad i = 1, 2,$$

где

$$R_{i1}(x, v_1, v_2) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in V_0. \tag{1.27}$$

Учитывая эти представления и представления

$$\frac{1+v_{3-i}}{1+v_i} = 1 + v_{3-i} - v_i + R_{i2}(v_1, v_2), \quad i = 1, 2,$$

в которых функции R_{i2} таковы, что

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{\partial R_{i2}(v_1, v_2)}{\partial v_k} = 0, \quad i, k = 1, 2, \tag{1.28}$$

записываем систему дифференциальных уравнений (1.25) в виде

$$v_i' = f_i(x) + p_{i1}(x)v_1 + p_{i2}(x)v_2 + \\ + V_{i1}(x, v_1, v_2) + V_{i2}(x, v_1, v_2), \quad i = 1, 2, \tag{1.29}$$

где

$$f_i(x) = \beta\left[h_i(x) - \sigma_{3-i}h_{3-i}(x) - g_i(x)\right],$$

$$p_{ii}(x) = -\beta\left[\sigma_{3-i}h_{3-i}(x) + g_i(x)\right], \qquad p_{i3-i}(x) = \beta h_{3-i}(x),$$

$$V_{ik}(x, v_1, v_2) = -\beta h_{3-i}(x) R_{3-ik}(x, v_1, v_2), \quad i, k = 1, 2.$$

В этой системе в силу условий (1.26) – (1.28)

$$\lim_{x\to+\infty} f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$P = \lim_{x\to+\infty}\begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta\lambda_1 & \beta\sigma_2\lambda_2 \\ \beta\sigma_1\lambda_1 & -\beta\lambda_2\end{pmatrix},$$

$$\lim_{x\to+\infty} V_{i1}(x, v_1, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \text{ равномерно по } \quad (v_1, v_2) \in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} V_{i2}(x, v_1, v_2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Характеристическое уравнение $\det[P - \nu E_2] = 0$, где E_2 – единичная матрица второго порядка, предельной матрицы коэффициентов линейной части системы имеет вид

$$\nu^2 + \beta(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(1 - \sigma_1\sigma_2) = 0. \tag{1.30}$$

В силу условий $\lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i = 1, 2$, $\sigma_1\sigma_2 \neq 1$ и выполнения одного из условий (1.4) оно не имеет корней с нулевой действительной частью.

Следовательно, для системы дифференциальных уравнений (1.29) выполнены все условия леммы 1 из работы [5]. Согласно этой лемме система дифференциальных уравнений (1.29) имеет хотя бы одно решение $\{v_i\}_{i=1}^2$: $[x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2(x_1 \geq x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_0)|)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Более того, таких решений существует однопараметрическое семейство, если среди корней уравнения (1.30) имеется только один корень с отрицательной действительной частью, т. е. при выполнении неравенства $\lambda_1\lambda_2(1 - \sigma_1\sigma_2) < 0$, и двупараметрическое семейство, если все его корни имеют отрицательные действительные части, т. е. когда выполняются неравенства $\beta(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ и $\lambda_1\lambda_2(1 - \sigma_1\sigma_2) > 0$. Этим решениям системы (1.29) в силу замены (1.23) и системы соотношений (1.24), которой удовлетворяют функции $Y_i(t, v_1(x(t)), v_2(x(t)))$, $i = 1, 2$, соответствуют решения (y_1, y_2) системы дифференциальных уравнений (1.1), допускающие асимптотические представления

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{3-i}(y_{3-i}(t))} = Q_i(t)[1 + o(1)], \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Данные асимптотические представления в силу условий (1.5) и (1.6) могут быть записаны в виде (1.9).

Осталось убедиться в том, что каждое из указанных выше решений системы дифференциальных уравнений (1.1) является $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решением. Поскольку им соответствуют решения $\big(v_1(x), v_2(x)\big)$ системы (1.29), стремящиеся к нулю при $x \to +\infty$, в силу установленных ранее свойств функций $Y_i(t, v_1, v_2)$, $i = 1, 2$, первые два из условий (1.2) заведомо выполняются. Кроме того, для данных решений системы (1.1) с учетом (1.24) и (1.26) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, y_i'(t)}{y_i(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\alpha_i \pi_\omega(t)\, p_i(t)\, \varphi_{3-i}\big(y_{3-i}(t)\big)}{y_i(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\alpha_i \pi_\omega(t)\, p_i(t)}{O_i(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} h_i\big(x(t)\big) = \lambda_i .$$

Значит, выполняется и третье из условий (1.2) определения $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решения.

Теорема доказана.

2. Примеры. Сначала в качестве примера, иллюстрирующего полученный результат, рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$y_i' = \alpha_i\, p_i(t) \big| y_{3-i} \big|^{\sigma_{3-i}} \Big| \ln \big| y_{3-i} \big| \Big|^{\gamma_{3-i}} \operatorname{sign} y_{3-i}, \quad i = 1, 2, \tag{2.1}$$

где α_i, σ_i, p_i такие же, как в системе (1.1), и $\gamma_i \in \mathbb{R}$.

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i = 1, 2$, и Y_i^0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$ при каждом значении $i \in \{1, 2\}$. Поскольку каждая компонента любого $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решения (y_1, y_2) системы уравнений (2.1) является знакоопределенной в некоторой левой окрестности ω, в соответствии с принятыми обозначениями в данной окрестности $\operatorname{sign} y_i(t) = \mu_i$, $i = 1, 2$. При этом $\mu_i = 1$, если $Y_i^0 = +\infty$, и $\mu_i = -1$, если $Y_i^0 = -\infty$. В случае, когда $Y_i^0 = 0$, μ_i может быть равным как $+1$, так и -1.

Здесь $\varphi_i(y_i) = |y_i|^{\sigma_i} \big| \ln |y_i| \big|^{\gamma_i}$, $i \in \{1, 2\}$. Она является правильно меняющейся функцией порядка σ_i как при $y_i \to 0$, так и при $y_i \to \pm\infty$.

В силу доказанной теоремы для существования $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решений системы дифференциальных уравнений (2.1) необходимо, а если выполняется одно из условий (1.4), то и достаточно, чтобы для каждого $i \in \{1, 2\}$ имели место предельные соотношения (1.5), (1.6), выполнялись знаковые условия (1.7) и

$$\alpha_i \operatorname{sign}\big[\lambda_i \pi_\omega(t)\big] = \mu_i ,$$

причем любое такое решение (y_1, y_2) допускает асимптотические представления

$$\frac{y_i(t)}{\big| y_{3-i}(t) \big|^{\sigma_{3-i}} \Big| \ln \big| y_{3-i}(t) \big| \Big|^{\gamma_{3-i}}} =$$

$$= \frac{\alpha_i \mu_{3-i} \pi_\omega(t)\, p_i(t)}{\lambda_i} \big[1 + o(1)\big], \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega . \tag{2.2}$$

Согласно третьему из условий (1.2)

$$y_i(t) \;=\; \mu_i \left|\pi_\omega(t)\right|^{\lambda_i + o(1)}, \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega .$$

Поэтому $\ln|y_i(t)| = \left[\lambda_i + o(1)\right] \ln|y_i(t)|$, $i = 1, 2$, при $t \uparrow \omega$ и асимптотические представления (2.2) можно записать в виде

$$\frac{y_i(t)}{\left|y_{3-i}(t)\right|^{\sigma_{3-i}}} \;=$$

$$= \frac{\alpha_i \mu_{3-i} \pi_\omega(t) \left|\lambda_{3-i} \ln|\pi_\omega(t)|\right|^{\gamma_{3-i}} p_i(t)}{\lambda_i}\left[1 + o(1)\right], \quad i = 1, 2, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega .$$

Из этих соотношений легко находим явные асимптотические при $t \uparrow \omega$ формулы для компонент $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решения:

$$y_i(t) \;=\; c_i \left|\pi_\omega(t)\right|^{(1+\sigma_{3-i})/(1-\sigma_1\sigma_2)} \left|\ln|\pi_\omega(t)|\right|^{(\gamma_{3-i}+\sigma_{3-i}\gamma_i)/(1-\sigma_1\sigma_2)} \times$$

$$\times\; p_i^{1/(1-\sigma_1\sigma_2)}(t)\, p_{3-i}^{\sigma_{3-i}/(1-\sigma_1\sigma_2)}(t)\left[1 + o(1)\right], \quad i = 1, 2,$$

где

$$c_i \;=\; \mu_i \left|\lambda_i\right|^{(\sigma_{3-i}\gamma_i - 1)/(1-\sigma_1\sigma_2)} \left|\lambda_{3-i}\right|^{(\gamma_{3-i} - \sigma_{3-i})/(1-\sigma_1\sigma_2)} .$$

Эти асимптотические представления являются новыми даже для случая системы типа Эмдена – Фаулера, т. е. когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Далее рассмотрим уравнение

$$u'' \;=\; \alpha_0\, p(t)\, \varphi_1(u)\, \varphi_2(u'), \tag{2.4}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : \left[a, \omega\right[\;\to\; \left]0, +\infty\right[$ — непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta(U_i^0) \to \left]0, +\infty\right[$, $i = 1, 2$, — непрерывно дифференцируемые и правильно меняющиеся при $z \to U_i^0$ функции порядков σ_i таких, что $\sigma_2 \neq 1$ и $\sigma_1 + \sigma_2 \neq 1$, $\Delta(U_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки U_i^0, U_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Решение u уравнения (2.4) будем называть $P_\omega(\lambda_0)$-решением ($-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$), если оно определено на некотором промежутке $\left[t_0, \omega\right[\subset \left[a, \omega\right[$ и удовлетворяет условиям

$$u^{(i-1)}(t) \in \Delta(U_i^0) \quad \text{при} \quad t \in \left[t_0, \omega\right[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} u^{(i-1)}(t) \;=\; U_i^0, \quad i = 1, 2,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, u''(t)}{u'(t)} \;=\; \lambda_0 .$$

Нетрудно заметить, что для каждого $P_\omega(\lambda_0)$-решения уравнения (2.4) также имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)\, u'(t)}{u(t)} \;=\; 1 + \lambda_0 .$$

Введем функцию

$$\psi(z) = \int\limits_B^z \frac{ds}{\varphi_2(s)}, \qquad B = \begin{cases} U_2^0, & \text{если} \quad \int_b^{U_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{сходится}, \\ b, & \text{если} \quad \int_b^{U_2^0} \frac{ds}{\varphi_2(s)} \quad \text{расходится}, \end{cases}$$

b — любое число из промежутка $\Delta(U_2^0)$.

Поскольку $\psi'(z) > 0$ при $z \in \Delta(U_2^0)$, то $\psi\colon \Delta(U_2^0) \to \Delta(Y_2^0)$, где $\Delta(Y_2^0)$ — односторонняя окрестность Y_2^0, Y_2^0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$. Кроме того, с использованием свойств правильно меняющихся функций и правила Лопиталя находим

$$\lim_{z \to U_2^0} \frac{z}{\psi(z)\varphi_2(z)} = \lim_{z \to U_2^0} \frac{\left(\frac{z}{\varphi_2(z)}\right)'}{\psi'(z)} = 1 - \sigma_2. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.4) с помощью преобразования

$$u = y_1, \qquad \psi(u') = y_2 \tag{2.6}$$

сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= \psi^{-1}(y_2), \\ y_2' &= \alpha_0\, p(t)\, \varphi_1(y_1), \end{aligned} \tag{2.7}$$

причем здесь ψ^{-1} является правильно меняющейся при $y_2 \to Y_2^0$ функцией порядка $\dfrac{1}{1-\sigma_2}$, поскольку

$$\lim_{y_2 \to Y_2^0} \frac{y_2\left(\psi^{-1}(y_2)\right)'}{\psi^{-1}(y_2)} = \lim_{y_2 \to Y_2^0} \frac{y_2\, \varphi_2\left(\psi^{-1}(y_2)\right)}{\psi^{-1}(y_2)} = \lim_{z \to U_2^0} \frac{\psi(z)\varphi_2(z)}{z} = \frac{1}{1-\sigma_2}.$$

Нетрудно также заметить, что решение u уравнения (2.4) является $P_\omega(\lambda_0)$-решением тогда и только тогда, когда соответствующее ему в силу замен (2.5) решение (y_1, y_2) системы (2.7) является $P_\omega\Big(U_1^0, Y_2^0, \lambda_0 + 1, (1 - \sigma_2)\lambda_0\Big)$-решением.

Если по аналогии с тем, как были определены числа μ_i для Y_i^0 и $\Delta(Y_i^0)$, $i = 1, 2$, ввести числа μ_i^0 для U_i^0 и $\Delta(U_i^0)$, $i = 1, 2$, то в силу отображения $\psi\colon \Delta(U_2^0) \to \Delta(Y_2^0)$ будем иметь

$$\mu_2^0 = \begin{cases} (1-\sigma_2)\mu_2, & \text{если} \quad U_2^0 = \pm\infty, \\ (\sigma_2 - 1)\mu_2, & \text{если} \quad U_2^0 = 0. \end{cases}$$

При этом можем считать, что $\mu_1^0 = \mu_1$.

В случае, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1\}$ и $\sigma_2 \neq 1$, для существования $P_\omega\big(U_1^0, Y_2^0, \lambda_0 + 1, (1-\sigma_2)\lambda_0\big)$-решений системы (2.4) согласно доказанной теореме необходимо, а если выполняется одно из условий

$$\text{либо} \quad \lambda_0(\sigma_2 - 2) \neq 1, \quad \text{либо} \quad \lambda_0(\sigma_2 - 2) = 1$$
$$\text{и} \quad (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 + \sigma_2 - 1) > 0,$$

то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, p(t)}{\int_{A_1}^t p(\tau)\, d\tau} = \lambda_0(1 - \sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_1, \quad \text{если} \quad \lambda_0(1 - \sigma_2 - \sigma_1) \neq \sigma_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^2(t)\, p(t)}{\int_{A_2}^t \pi_\omega(\tau)\, p(\tau)\, d\tau} = 1, \quad \text{если} \quad \lambda_0(1 - \sigma_2 - \sigma_1) = \sigma_1,$$

и выполнялись знаковые условия

$$(1 + \lambda_0)\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad U_1^0 = \pm\infty,$$
$$(1 + \lambda_0)\pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad U_1^0 = 0, \quad \mu_1^0\mu_2^0(1 + \lambda_0)\pi_\omega(t) > 0,$$
$$\lambda_0\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_0\mu_2^0 = 1 \quad \text{при} \quad U_2^0 = \pm\infty, \quad \lambda_0\pi_\omega(t) < 0$$
$$\text{и} \quad \alpha_0\mu_2^0 = -1 \quad \text{при} \quad U_2^0 = 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические решения

$$\frac{y_1(t)}{\psi^{-1}(y_2(t))} = \frac{\pi_\omega(t)}{1 + \lambda_0}\big[1 + o(1)\big],$$
$$\frac{y_2(t)}{\varphi_1(y_1(t))} = \frac{\alpha_0\pi_\omega(t)\, p(t)}{(1 - \sigma_2)\lambda_0}\big[1 + o(1)\big],$$

причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда $\lambda_0(1 + \lambda_0)(1 - \sigma_1 - \sigma_2) < 0$, и двупараметрическое семейство, если $\lambda_0(1 + \lambda_0)(1 - \sigma_1 - \sigma_2) > 0$ и $\big[1 + (2 - \sigma_2)\lambda_0\big]\pi_\omega(t) > 0$.

В силу замены (2.6) эти асимптотические соотношения с учетом (2.5) могут быть записаны в виде

$$\frac{\pi_\omega(t)\, u'(t)}{u(t)} = 1 + \lambda_0 + o(1), \qquad \frac{u'(t)}{\varphi_1(u(t))\,\varphi_2(u'(t))} = \frac{\alpha_0\pi_\omega(t)\, p(t)}{\lambda_0}\big[1 + o(1)\big].$$

Здесь, в отличие от работы [6] (теорема 1.1), вопрос о существовании и асимптотике $P_\omega(\lambda_0)$-решений уравнения (2.4) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1\}$ выяснен без дополнительных ограничений на функцию φ_1.

3. Выводы. В настоящей работе для системы дифференциальных уравнений вида (1.1) выделен класс $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решений и при $\lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ установлены необходимые и достаточные условия их существования, а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ формулы для компонент таких решений. При этом решен и вопрос о количестве таких решений.

В случае конкретного вида нелинейностей из найденных в работе неявных асимптотических формул удается (см. первый пример) получить явные асимптотические представления для обеих компонент $P_\omega(Y_1^0, Y_2^0, \lambda_1, \lambda_2)$-решений.

В силу произвольности выбора $\omega \le +\infty$ основной результат позволяет выяснить вопрос о наличии у системы (1.1) не только правильных, но и различных типов сингулярных решений.

1. *Мирзов Д. Д.* Об асимптотических свойствах решений одной системы типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1498 – 1504.
2. *Мирзов Д. Д.* Некоторые асимптотические свойства решений одной системы типа Эмдена – Фаулера // Там же. – 1987. – **23**, № 9. – С. 1519 – 1532.
3. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления правильных решений одной двумерной системы дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2002. – № 4. – С. 11 – 17.
4. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
5. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 10. – С. 1311 – 1323.
6. *Евтухов В.М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 310 – 331.

Получено 27.04.09