УДК 512.552.4

Ю. С. Самойленко, А. В. Стрелец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ПРОСТЫХ n-КАХ ПОДПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА*

This review deals with the structure of “simple” systems $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ of subspaces $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, n$, in a Hilbert space $\mathcal{H}$, i.e., such n-kas of subspaces that, for every pair of subspaces $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_j$, the angle $0 < \theta_{ij} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ between them is fixed. We present the description of “simple” systems of subspaces in the case where marked graphs naturally connected with these systems are trees or unicyclic graphs and aslo in the case where all subspaces are one-dimensional. If the cyclic range of a graph is greater than or equal to two, the problem of the description of all systems of this type with accuracy up to the unitary equivalency is $*$-wild.

Огляд присвячено структурі „простих” систем $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ підпросторів $\mathcal{H}_i$, $i = 1, \ldots, n$, у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, тобто таких n-ок підпросторів, що для кожної пари підпросторів $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_j$ зафіксовано кут $0 < \theta_{ij} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ між ними. Наведено опис „простих” систем підпросторів, коли помічені графи, що пов’язані з ними природним чином, є деревами або уніциклічними графами, а також коли всі підпростори є одновимірними. У випадку ж, коли циклічний ранг графа є більшим або дорівнює двом, задача опису всіх таких систем з точністю до унітарної еквівалентності є $*$-дикою.

1. Введение. ***1.1. Простые n-ки подпространств в гильбертовом пространстве.***
1. Изучение систем $L = (V; V_1, \ldots, V_n)$ n подпространств $V_1, \ldots, V_n$ линейного пространства V, в частности, описание неразложимых четверок подпространств в V, с точностью до эквивалентности, описание неразложимых представлений в пространстве V конечных частично упорядоченных множеств и т. д. являются классическими задачами (см., например, [2, 34, 9, 35, 6, 7, 16, 36, 29, 27, 28, 21]).

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}$, $i = 1, \ldots, n$, — набор подпространств в нем. Изучению систем подпространств

$$S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$$

гильбертова пространства $\mathcal{H}$ также посвящены многочисленные публикации (см., например, [15, 5, 4, 12, 22, 8, 14]).

С каждой системой подпространств S гильбертова пространства $\mathcal{H}$ естественным образом связывается набор ортопроекторов $\{P_i\}_{i=1}^n$ в $\mathcal{H}$, где P_i — ортогональный проектор, образ которого равен $\mathcal{H}_i$.

Систему S называют *неприводимой*, если любой оператор $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что

$$\begin{aligned} C(\mathcal{H}_i) &\subset \mathcal{H}_i, \\ & \qquad\qquad i = 1, \ldots, n, \\ C(\mathcal{H}_i^{\perp}) &\subset \mathcal{H}_i^{\perp}, \end{aligned} \tag{1}$$

является скалярным оператором, т. е. $C = \lambda I$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, I — единичный оператор в $\mathcal{H}$. Заметим, что условие (1) выполнено тогда и только тогда, когда оператор C коммутирует с проекторами P_i, $i = 1, \ldots, n$.

Две системы $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ и $S' = (\mathcal{H}'; \mathcal{H}'_1, \ldots, \mathcal{H}'_n)$ подпространств в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ называют *унитарно эквивалентными*, если существует унитарный опера-

*Частково підтримано проектом № 20 „Еволюційні та спектральні задачі сучасної математичної фізики” програми „Математичне моделювання фізичних та механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах”.

тор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ такой, что $U(\mathcal{H}_i) = \mathcal{H}'_i$, $i = 1, \ldots, n$. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда U сплетает проекторы P_i и P'_i, $i = 1, \ldots, n$, т. е. выполнено равенство $UP_i = P'_i U$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Любая неприводимая система подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1)$ унитарно эквивалентна одной из систем

$$S_1 = (\mathbb{C}; \mathbb{C}) \quad \text{или} \quad S_2 = (\mathbb{C}; \{0\}).$$

Неприводимые пары подпространств существуют только в одно- и двумерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Приведем список всех неприводимых унитарно неэквивалентных пар подпространств:

1. Четыре системы подпространств в одномерном гильбертовом пространстве:

$$(\mathbb{C}; 0, 0), \qquad (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0), \qquad (\mathbb{C}; 0, \mathbb{C}), \qquad (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

2. Семейство систем подпространств в двумерном пространстве, параметризованное $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Если обозначить через $\{e_1, e_2\}$ ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то

$$S_\theta = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),$$

где $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — подпространства, порожденные вектором e_1 и вектором

$$x = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$$

соответственно.

Для пары проекторов P_1 и P_2, которые в базисе $\{e_1, e_2\}$ записываются в виде

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \tau^2 & \sqrt{\tau^2(1-\tau^2)} \\ \sqrt{\tau^2(1-\tau^2)} & 1-\tau^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \cos\theta,$$

выполнены равенства

$$P_1 P_2 P_1 = \tau^2 P_1, \qquad P_2 P_1 P_2 = \tau^2 P_2.$$

Будем говорить, что подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ *расположены друг относительно друга под углом* θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$, если для ортогональных проекторов P_1 и P_2 на них выполнено соотношение

$$P_1 P_2 P_1 = \tau^2 P_1, \qquad P_2 P_1 P_2 = \tau^2 P_2,$$

где $\tau = \cos\theta \in (0, 1)$. Если подпространства ортогональны, то угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Для любой пары ортопроекторов P_1, P_2 в $\mathcal{H}$ (пары подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$) найдутся (см. [12]) пространство $\mathfrak{H}$ и самосопряженный оператор A, $0 \leqslant A \leqslant I_{\mathfrak{H}}$, в нем (точки 0 и 1 не являются собственными значениями оператора A) такие, что

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \oplus (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^\perp) \oplus (\mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2) \oplus (\mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp) \oplus (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}) \qquad (2)$$

и

$$
\begin{gathered}
P_1 = I_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2} \oplus I_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus 0_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2} \oplus 0_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus \begin{pmatrix} I_{\mathfrak{H}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_2 = I_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2} \oplus 0_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus I_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2} \oplus 0_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus \\
\oplus \begin{pmatrix} A^2 & \sqrt{A^2(I_{\mathfrak{H}} - A^2)} \\ \sqrt{A^2(I_{\mathfrak{H}} - A^2)} & I_{\mathfrak{H}} - A^2 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Используя спектральное представление самосопряженного оператора A в виде спектрального интеграла по разложению единицы $E_A(\cdot)$ в $\mathfrak{H}$, на интервале $(0,1)$ представление (3) можно записать в виде следующего спектрального представления для пары ортопроекторов (пары подпространств).

Теорема 1. *Пусть $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ — пара подпространств в $\mathcal{H}$, P_1 и P_2 — ортопроекторы на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно. Тогда пространство $\mathcal{H}$ раскладывается в прямую сумму подпространств* (2) *и существует разложение единицы $E_A(\cdot)$ на интервале $(0,1)$ со значениями в ортопроекторах в $\mathfrak{H}$ такое, что*

$$
\begin{gathered}
P_1 = I_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2} \oplus I_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus 0_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2} \oplus 0_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_{\mathfrak{H}}, \\
P_2 = I_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2} \oplus 0_{\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus I_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2} \oplus 0_{\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2^\perp} \oplus \\
\oplus \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} \tau^2 & \sqrt{\tau^2(1-\tau^2)} \\ \sqrt{\tau^2(1-\tau^2)} & 1-\tau^2 \end{pmatrix} \otimes dE_A(\tau),
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где интеграл сходится равномерно.

Спектральное представление (4) пары ортопроекторов используется при исследовании многих вопросов функционального анализа. Например, с его помощью доказываются следующие утверждение и, как следствие, теорема 2 — критерий замкнутости суммы двух подпространств (см. [4]).

Утверждение 1. *Пусть подпространства $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ находятся в общем положении, т. е.*

$$
\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2^\perp = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^\perp = \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{H}_2 = 0.
$$

Множество $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ замкнуто тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

$$
1 \notin \sigma(P_1P_2) \qquad \textit{или} \qquad \|P_1P_2\| < 1,
$$

где P_1, P_2 — ортопроекторы на $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ соответственно, а $\sigma(\cdot)$ — спектр соответствующего оператора.

Теорема 2. *Множество $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ замкнуто тогда и только тогда, когда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$
\sigma(P_1P_2) \cap (1-\varepsilon, 1) = \varnothing.
$$

3. Задача об описании с точностью до унитарной эквивалентности неприводимых n-ок подпространств

$$S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$$

и любых n-ок, как прямой суммы (или интеграла) неприводимых, при $n \geqslant 3$ является $*$-дикой задачей (см. [32, 17, 18]). $*$-Дикой является даже задача об описании троек подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ таких, что $\mathcal{H}_2 \perp \mathcal{H}_3$ (о $*$-диких задачах см. [17, 18]).

Поскольку задача описания с точностью до унитарной эквивалентности всех неприводимых n-ок подпространств в пространстве $\mathcal{H}$ при $n \geqslant 3$ „безнадежна”, естественно выделить тот или иной класс n-ок подпространств в $\mathcal{H}$ и, по возможности, описать все неприводимые n-ки подпространств в $\mathcal{H}$ из выбранного класса. Например, статьи [30, 1, 37, 31] посвящены изучению ортоскалярных n-ок подпространств гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

4. Зафиксируем целое число n и набор углов $\theta_{ij} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$. Настоящий обзор посвящен изучению структуры n-ок подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ таких, что все подпространства различны и для любой пары подпространств $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$, $i \neq j$, угол между подпространствами равен θ_{ij}, т. е. либо имеют место соотношения

$$P_i P_j P_i = \tau_{ij}^2 P_i \quad \text{и} \quad P_j P_i P_j = \tau_{ji}^2 P_j, \tag{5}$$

где

$$0 < \tau_{ij} = \tau_{ji} = \cos\theta_{ij} < 1 \quad \left(0 < \theta_{ij} < \frac{\pi}{2}\right),$$

либо подпространства $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ ортогональны, т. е.

$$P_i P_j = P_j P_i = 0 \quad \left(\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}\right). \tag{6}$$

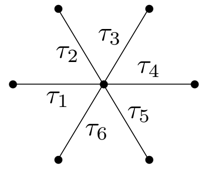
Такие n-ки подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ будем называть *простыми*.

Цель работы — дать ответы на следующие вопросы:

1. Существуют ли простые системы подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ такие, что углы между $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ равны θ_{ij}, $0 \leqslant i < j \leqslant n$?

2. Если ответ положительный, то как описать все такие системы с точностью до унитарной эквивалентности?

1.2. Помеченные графы. **1.** Простые системы подпространств удобно задавать с помощью конечных неориентированных графов $\Gamma = (V, R)$ без кратных ребер и петель ($V = \{1, \ldots, n\}$ — множество вершин графа, $R = \{\gamma_{ij} = \gamma_{ji}\}$ — множество ребер графа) и функций τ, определенных на ребрах графа $\tau : R \to (0, 1)$: каждому подпространству $\mathcal{H}_i$ соответствует вершина графа i, вершины i и j соединены ребром γ_{ij}, тогда и только тогда, когда для подпространств $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_j$ выполнено условие (5), при этом $\tau(\gamma_{ij}) = \tau_{ij}$; если же соответствующие подпространства ортогональны, то вершины ребром не соединены. Например, граф



соответствует семерке подпространств, где шесть подпространств попарно ортогональны, а седьмое находится под заданными углами к ним. В пункте 2 будет показано, то такие семерки существуют тогда и только тогда, когда

$$\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2+\tau_4^2+\tau_5^2+\tau_6^2\leqslant 1,$$

и неприводимая такая семерка единственна с точностью до унитарной эквивалентности.

Пару (Γ,τ) называем *помеченным графом*. Определим *матрицу смежности* помеченного графа $A_{\Gamma,\tau}=(a_{ij})$:

$$a_{ij}=\begin{cases}\tau(\gamma_{ij}), & i\neq j,\ \ \gamma_{ij}\in R,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

спектр помеченного графа $\sigma(\Gamma,\tau)=\sigma(A_{\Gamma,\tau})$ и *индекс помеченного графа* $\lambda_{\Gamma,\tau}$ — наибольшее собственное значение матрицы $A_{\Gamma,\tau}$. Заметим, что если положить $\tau(\gamma_{ij})=1$, то получим матрицу смежности A_Γ, спектр $\sigma(\Gamma)$ и индекс λ_Γ самого графа Γ (см. [3]).

Для индексов и спектров помеченных графов имеют место следующие свойства.

Утверждение 2. 1. *Если* Γ — *двудольный граф, то спектр помеченного графа* (Γ,τ) *симметричен относительно* 0.

2. *Пусть помеченный граф* $(\tilde\Gamma,\tilde\tau)$ *получен из помеченного связного графа* (Γ,τ) *удалением некоторой вершины. Тогда*

$$\lambda_{\tilde\Gamma,\tilde\tau}<\lambda_{\Gamma,\tau}.$$

3. *Если для одного и того же связного графа* Γ *введены две функции на ребрах* τ *и* $\tilde\tau$ *такие, что* $\tau\neq\tilde\tau$ *и* $\tilde\tau(\gamma_{ij})\leqslant\tau(\gamma_{ij})$ *для любого ребра* γ_{ij}, *то*

$$\lambda_{\Gamma,\tilde\tau}<\lambda_{\Gamma,\tau}.$$

Эти свойства спектра и индекса помеченного графа доказываются так же, как и в спектральной теории графов (см., например, [3, 33, 38]).

2. В силу известного критерия Сильвестра матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее ведущие главные миноры положительны; она неотрицательно определена тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны (см., например, [40]).

В работе нам понадобятся условия положительной (неотрицательной) определенности матрицы $B_{\Gamma,\tau}=I-A_{\Gamma,\tau}$. Приведем некоторые такие условия в терминах свойств графа Γ и функции τ.

а) Ясно, что матрица $B_{\Gamma,\tau}$ положительно (неотрицательно) определена тогда и только тогда, когда $1-\lambda_{\Gamma,\tau}>0$ ($1-\lambda_{\Gamma,\tau}\geqslant 0$), т. е. $\lambda_{\Gamma,\tau}<1$ ($\lambda_{\Gamma,\tau}\leqslant 1$).

Покажем, что если значения функции τ достаточно малы, то матрица $B_{\Gamma,\tau}$ положительно определена.

Утверждение 3. *Если* $\tau(\gamma_{ij})<\lambda_\Gamma^{-1}$ *для всех* $\gamma_{ij}\in R$, *то матрица* $B_{\Gamma,\tau}$ *является положительно определенной.*

Доказательство. Положим

$$\tau_0 = \max_{\gamma_{ij} \in R} \tau(\gamma_{ij}), \tag{7}$$

тогда, с одной стороны, $\tau_0 < \lambda_\Gamma^{-1}$, а с другой — $\lambda_{\Gamma,\tau} \leqslant \tau_0 \lambda_\Gamma$ (в силу утверждения 2), следовательно, выполнено условие $\lambda_{\Gamma,\tau} < 1$.

Утверждение доказано.

Для связного графа Γ также выполняется следующий критерий неотрицательной определенности матрицы $B_{\Gamma,\tau}$.

Утверждение 4. *Пусть* Γ — *связный граф. Матрица* $B_{\Gamma,\tau}$ *неотрицательно определена тогда и только тогда, когда для всех ее ведущих главных миноров выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} &M_k > 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \\ &M_n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Если условия (8) выполнены, то $B_{\Gamma,\tau}$ неотрицательно определена (см., например, [40]). Покажем обратное. Пусть $\tilde{\Gamma}$ — граф, который получается из графа Γ удалением вершины n и всех ребер, соединенных с ней, а $\tilde{\tau}$ — сужение τ на ребра графа $\tilde{\Gamma}$. Тогда матрица $B_{\tilde{\Gamma},\tilde{\tau}}$ получается из матрицы $B_{\Gamma,\tau}$ вычеркиванием последнего столбца и последней строки. Если матрица $B_{\Gamma,\tau}$ неотрицательно определена, то $\lambda_{\Gamma,\tau} \leqslant 1$, следовательно, $\lambda_{\tilde{\Gamma},\tilde{\tau}} < \lambda_{\Gamma,\tau} \leqslant 1$ (в силу утверждения 2). Таким образом, $B_{\tilde{\Gamma},\tilde{\tau}}$ положительно определена, поэтому $M_k > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, как главные миноры положительно определенной матрицы.

Утверждение доказано.

Для конкретных (Γ, τ) некоторые из условий (8) можно не проверять, так как они выполняются автоматически. Например, если Γ — двудольный граф и вершины графа Γ занумерованы так, что вершины $1, \ldots, m$ принадлежат одной доле, а вершины $m+1, \ldots, n$ — другой (мы предполагаем, что $2m \geqslant n$). Тогда

$$M_1 = \ldots = M_m = 1 > 0$$

автоматически и условий неотрицательной определенности $B_{\Gamma,\tau}$ не более чем $\dfrac{n}{2}$.

б) Пусть (Γ, τ) — помеченный граф, такой, что для каждого ребра γ_{ij} определено некоторое натуральное число $m_{ij} > 2$ и функция τ задана формулой

$$\tau(\gamma_{ij}) = \cos \frac{\pi}{m_{ij}}.$$

Соответствующая матрица $B_{\Gamma,\tau}$ положительно определена тогда и только тогда, когда помеченный граф (Γ, τ) связан с графом Дынкина – Кокстера, и неотрицательно (но не положительно) определена тогда и только тогда, когда помеченный граф (Γ, τ) связан с евклидовым графом (расширенным графом Дынкина), см., например, [25, 10, 38].

3. Если простая n-ка ненулевых подпространств неприводима, то соответствующий ей граф является связным. В дальнейшем будем рассматривать только связные графы Γ.

Одной из характеристик системы подпространств является обобщенная размерность системы подпространств S:

$$\dim S = (\dim \mathcal{H}; \dim \mathcal{H}_1, \ldots, \dim \mathcal{H}_n) \in \mathbb{N}_\infty^{n+1}, \quad \mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Утверждение 5. *Если граф* Γ *связный, то обобщенная размерность соответствующей графу простой* n*-ки подпространств* S *имеет вид*

$$\dim S = (d; d_0, \ldots, d_0),$$

где d, $d_0 \in \mathbb{N}_\infty$, $d_0 \leqslant d$.

Доказательство. Достаточно заметить, что если вершины i и j соединены ребром, то оператор

$$U_{ij} = \frac{P_i P_j}{\tau_{ij}} \Big\lceil_{\mathcal{H}_j} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$$

является унитарным.

1.3. Алгебра $\boldsymbol{TL_{\Gamma,\tau,\perp}}$ ***и связь между ее представлениями и простыми*** $\boldsymbol{n}$***-ками подпространств.*** **1.** Простые системы подпространств удобно рассматривать так же, как представления в гильбертовом пространстве соответствующей $*$-алгебры. Для помеченного графа (Γ, τ) рассмотрим $*$-алгебру

$$\begin{aligned} TL_{\Gamma,\tau,\perp} = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n \,|\, p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i \in V;& \\ p_i p_j p_i = \tau_{ij}^2 p_i,\ \ p_j p_i p_j = \tau_{ij}^2 p_j,\ \ &\text{если}\ \gamma_{ij} \in R; \\ p_i p_j = p_j p_i = 0\ \ &\text{в противном случае}\rangle. \end{aligned}$$

Взаимно однозначное соответствие между простыми системами подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ и представлениями π $*$-алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задается равенством $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} \pi(p_i)$, $i \in V$.

В обозначении алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ буквы TL выбраны в честь физиков H. N. V. Temperley и E. H. Lieb'а, которые в работе [23] ввели алгебры

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n \,|\, p_i^2 = p_i^* = p_i,\ i = 1, \ldots, n;& \\ p_i p_j p_i = \tau_0^2 p_i,\ \ &\text{если}\ \ |i - j| = 1; \\ p_i p_j = p_j p_i\ \ &\text{в противном случае}\rangle \end{aligned}$$

в связи с изучением моделей статистической физики (соотношения в таких алгебрах задаются цепочкой A_n). Об обобщенных алгебрах Темперли – Либа, связанных с графами Γ, см. [11]. Символ $\perp$ в обозначении алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ указывает на то, что проекторы, соответствующие не связанным вершинам в графе, в отличие от обобщенных алгебр Темперли – Либа, ортогональны, а не коммутируют. С другой стороны, алгебры с ортогональностью устроены проще, чем алгебры с коммутативностью (являются их фактор-алгебрами), но графов Γ, для которых удается описать $*$-представления алгебр $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, значительно больше.

2. Знание размерности или роста алгебры полезно для изучения ее $*$-представлений в пространстве $\mathcal{H}$. Например, для любой конечномерной $*$-алгебры $\mathbf{A}$ верно следующее утверждение:

Утверждение 6. *Если* $\dim \mathbf{A} < \infty$, *то она имеет конечное число неприводимых* $*$*-представлений.*

Доказательство. Обозначим

$$*\text{-}\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} = \big\{ x \in \mathbf{A} \,|\, \pi(x) = 0,\ \ \pi \in *\text{-}\mathrm{Rep}\,\mathbf{A} \big\},$$

где $*\text{-}\mathrm{Rep}\,\mathbf{A}$ — множество всех $*$-представлений алгебры $\mathbf{A}$. Поскольку $*\text{-}\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ содержит максимальный нильпотентный идеал $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, $*$-алгебра $\mathbf{A}/*\text{-}\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ конечномерна, полупроста и, следовательно, имеет лишь конечное число неприводимых представлений.

В дальнейшем под термином „представление алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$" будем подразумевать $*$-представление соответствующей $*$-алгебры.

3. В работах [24, 26] с помощью построения базиса Гребнера показано, в частности, что, как линейное пространство, алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ изоморфна линейному пространству N, порожденному всеми *нормальными* словами, т. е. конечными словами $w = p_{i_1} \ldots p_{i_l}$, где $l \in \mathbb{N}$ и $i_k \in V$, $1 \leqslant k \leqslant l$, которые не содержат в качестве подслова слова из множества

$$p_i^2, \quad i \in V; \qquad p_i p_j, p_j p_i, \quad \gamma_{ij} \notin R; \qquad p_i p_j p_i, p_j p_i p_j, \quad \gamma_{ij} \in R. \tag{9}$$

Более того, если через $w_1 \circ w_2$ обозначить результат редуцирования слова $w_1 w_2$, т. е. замену „запрещенных" подслов в нем по правилам

$$p_i^2 \to p_i,\ i \in V; \quad p_i p_j \to 0, p_j p_i \to 0,\ \gamma_{ij} \notin R;$$
$$p_i p_j p_i \to \tau_{ij}^2 p_i, p_j p_i p_j \to \tau_{ij}^2 p_j,\ \gamma_{ij} \in R,$$

то относительно умножения $\circ$ линейное пространство N является алгеброй, изоморфной алгебре $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. Как следствие получаем следующее утверждение.

Утверждение 7. *Размерность и рост алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ не зависят от выбора функции τ.*

Подробнее о нормальных словах и алгоритме построения базиса Гребнера для алгебры, заданной образующими и соотношениями, см., например, обзор [39] и библиографию в нем.

1.4. Обзор результатов. В работе для произвольного фиксированного графа Γ выделим те функции τ, для которых существуют простые n-ки подпространств, и опишем, если это возможно, все такие n-ки с точностью до унитарной эквивалентности, или докажем, что задача их описания является „безнадежной". Покажем, что в зависимости от Γ эти задачи либо конечного представленческого типа (все проекторы $\pi(p_k)$, $k = 1, \ldots, n$, в неприводимом представлении имеют одномерный образ и существует только конечное число унитарно неэквивалентных неприводимых представлений), либо ручного представленческого типа (число всех неприводимых унитарно неэквивалентных представлений для некоторых τ бесконечно, но для любого неприводимого представления π в $\mathcal{H}_\pi$ все проекторы $\pi(p_k)$, $k = 1, \ldots, n$, имеют одномерный образ и существует число $N(\Gamma) \in \mathbb{N}$ такое, что выполняется неравенство $\dim \mathcal{H}_\pi \leqslant N(\Gamma)$), либо найдутся такие τ, для которых алгебра $*$-дикая (задача описания всех неприводимых неэквивалентных $*$-представлений является $*$-дикой, т. е. не менее сложной, чем описание с точностью до унитарной эквивалентности пары неприводимых унитарных операторов).

Если Γ — дерево (п. 2), следуя [26], приводим условия на функцию τ, при которых ненулевая неприводимая простая n-ка подпространств существует (теорема 5). В этом случае такая n-ка единственна, $d = n$ или $d = n - 1$, $d_0 = 1$. В п. 2 также приведены примеры простых конфигураций пространств, связанных с звездными графами $T_{l_1,\ldots,l_s}$.

В случае, когда Γ — унициклический граф (п. 3), следуя [26, 19], приведены условия на функцию τ, при которых ненулевая простая n-ка подпространств существует. В этом случае такая конфигурация, вообще говоря, не является единственной. Более того, число унитарно неэквивалентных неприводимых конфигураций может быть бесконечным, но все такие неприводимые n-ки конечномерны, $d = n$, или $d = n - 1$, или $d = n - 2$, а $d_0 = 1$, и множество всех таких неэквивалентных n-ок можно параметризовать числом $\varphi \in \Phi \subset [0, 2\pi)$ (теорема 8). Следуя [26, 19, 20], изучены представления, связанные с циклом.

В п. 4 получены условия на функцию τ, при которых существует ненулевая простая n-ка *одномерных* подпространств, соответствующая произвольному связному графу Γ. Множество классов эквивалентности всех таких n-ок можно параметризовать вектором $\omega \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{\nu(\Gamma)}$, где $\Omega_i \subset [0, 2\pi)$, $\nu(\Gamma) = |R| - |V| + 1$ — циклический ранг графа (следствие 1). Изучены примеры симметричных n-ок одномерных подпространств.

Однако если циклический ранг графа $\nu(\Gamma)$ больше 2 (п. 5), то при достаточно малых τ_{ij} существуют простые неприводимые n-ки не одномерных подпространств. В этом случае задача описания с точностью до унитарной эквивалентности *всех* неприводимых n-ок подпространств не менее сложная, чем описание с точностью до унитарной эквивалентности пары неприводимых унитарных операторов, т. е. является $*$-дикой (теорема 12).

2. Простые n-ки подпространств, связанные с деревьями. ***2.1. Алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.*** Пусть Γ — дерево. Тогда для любого τ алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ является конечномерной, так как в силу (9) в нормальном слове в случае дерева буквы повторяться не могут, следовательно, длина нормального слова ограничена количеством вершин n в дереве (см. [26]). Любому нормальному нетривиальному (т. е. отличному от единицы e) слову w в этом случае можно сопоставить пару вершин (i, j), где p_i — первая буква в слове, p_j — последняя. Такое сопоставление однозначно, поскольку в дереве существует единственный кратчайший путь из вершины i в вершину j и только в таком пути ни одна вершина не встречается более одного раза. Следовательно, $\dim TL_{\Gamma,\tau,\perp} = n^2 + 1$, где n — количество вершин в дереве.

2.2. Конструкция представления алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. Рассмотрим матрицу $B_{\Gamma,\tau} = I - A_{\Gamma,\tau} = (b_{ij})$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \ \ i \in V, \\ -\tau_{ij}, & i \neq j, \ \ \gamma_{ij} \in R, \\ 0, & i \neq j, \ \ \gamma_{ij} \notin R. \end{cases}$$

В линейном пространстве $\mathcal{L}$, порожденном множеством векторов

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

определим полуторалинейную форму $B(\cdot, \cdot)$, положив $B(e_i, e_j) = b_{ij}$.

Пусть полуторалинейная форма B неотрицательно определена на $\mathcal{L}$. Если она положительно определена, то в $\mathcal{L}$ введем скалярное произведение формулой $\langle x, y \rangle = B(x, y)$ и полученное гильбертово пространство обозначим $\mathcal{H}_\tau$. Если же форма B не является положительно определенной, то в качестве $\mathcal{H}_\tau$ используем фактор-пространство пространства $\mathcal{L}$ по ядру формы B. Таким образом, гильбертово пространство $\mathcal{H}_\tau$ порождено множеством векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (возможно, линейно зависимых), каждый из которых имеет единичную норму, а матрица $B_{\Gamma,\tau}$ является матрицей Грамма этого множества векторов.

Пусть $P_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\tau)$, $i \in V$, — ортогональный проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором e_i. Определим отображение

$$\pi_\tau \colon TL_{\Gamma,\tau,\perp} \to \mathcal{B}(H_\tau) \colon p_i \mapsto P_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 3. *Пусть Γ — дерево и функция τ такова, что матрица $B_{\Gamma,\tau}$ является неотрицательно определенной. Тогда*:

1) *отображение π_τ является ненулевым неприводимым представлением алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$;*

2) $\dim \mathcal{H}_\tau = n$, *если матрица $B_{\Gamma,\tau}$ положительно определена, и* $\dim \mathcal{H}_\tau = n - 1$, *если она не является положительно определенной. В обоих случаях* $\dim \operatorname{Im} P_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. 1. Пусть вершины i и j не соединены ребром, тогда

$$P_i P_j x = \langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle e_i = b_{ij} \langle e_j, x \rangle e_i = 0.$$

Если же вершины i и j соединены ребром, то

$$P_j P_i P_j x = \langle e_j, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle e_j = b_{ji} b_{ij} P_j x = \tau_{ij}^2 P_j x.$$

Таким образом, π_τ является представлением.

Покажем, что оно неприводимо. Пусть C коммутирует со всеми проекторами, тогда

$$C e_k = C P_k e_k = P_k C e_k = \lambda_k e_k, \quad k \in V,$$

для некоторого $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Пусть

$$l = \big(j_m = k, j_{m-1}, \ldots, j_2, j_1 = 1\big)$$

— кратчайший путь из вершины 1 в вершину k. Тогда найдется $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $e_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 e_1$. Таким образом,

$$\lambda_k e_k = C e_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 C e_1 = \lambda_1 e_k$$

и C — скалярный оператор.

2. Размерность пространства $\mathcal{H}_\tau$ равна рангу матрицы $B_{\Gamma,\tau}$. Если матрица $B_{\Gamma,\tau}$ положительно определена, то ее ранг равен n, следовательно, в этом случае $\dim \mathcal{H}_\tau = n$. Поскольку $B_{\Gamma,\tau} = I - A_{\Gamma,\tau}$, то матрица $B_{\Gamma,\tau}$ неотрицательно определена и не является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\lambda_{\Gamma,\tau} = 1$. В силу теоремы Фробениуса кратность $\lambda_{\Gamma,\tau}$ равна 1, поэтому ранг матрицы $B_{\Gamma,\tau}$ равен $n - 1$, следовательно, в этом случае $\dim \mathcal{H}_\tau = n - 1$.

Теорема доказана.

2.3. Описание всех простых неприводимых n-ок подпространств для деревьев.

Теорема 4. *Пусть Γ — дерево и функция τ такова, что существует π — ненулевое неприводимое представление алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда матрица $B_{\Gamma,\tau}$ является неотрицательно определенной и представление π унитарно эквивалентно представлению π_τ.*

Доказательство. Покажем, что для представления π образы всех проекторов $Q_j = \pi(p_j)$ одномерны. Возьмем x_1 такое, что $Q_1 x_1 = x_1$ и $\|x_1\| = 1$. Для каждой вершины $j \neq 1$ существует единственный кратчайший путь в дереве $l_j = (i_1 = j, i_2, \ldots, i_m = 1)$. Положим

$$x_j = (-1)^{m+1} \frac{Q_{i_1} Q_{i_2} \ldots Q_{i_m} x_{i_m}}{\tau_{i_1 i_2} \tau_{i_2 i_3} \ldots \tau_{i_{m-1} i_m}}.$$

Тогда $\|x_j\| = 1$, $j \in V$, и подпространство, порожденное множеством векторов $\{x_j\}_{j \in V}$, инвариантно относительно неприводимого представления π, следовательно, оно совпадает с пространством $\mathcal{H}$ и образы проекторов Q_j порождаются векторами x_j соответственно.

Очевидно, что если вершины i и j не соединены, то $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, а если они соединены, то либо $l_j = (j, i) \cup l_i$, либо $l_i = (i, j) \cup l_j$. Пусть, для определенности, выполнено первое равенство. Это означает, что $x_j = -\tau_{ij}^{-1} Q_j x_i$, но тогда

$$\langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{\tau_{ij}} \langle x_i, Q_j x_i \rangle = -\frac{1}{\tau_{ij}} \langle x_i, Q_i Q_j Q_i x_i \rangle = -\tau_{ij}.$$

Таким образом, матрица $B_{\Gamma,\tau}$ является матрицей Грамма множества векторов $\{x_j\}_{j \in V}$, следовательно, она неотрицательно определена и представление π унитарно эквивалентно представлению π_τ.

Теорема доказана.

Объединяя теоремы 3 и 4, для систем подпространств получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть Γ — дерево. Ненулевая неприводимая простая n-ка подпространств S, соответствующая паре (Γ, τ), существует тогда и только тогда, когда матрица $B_{\Gamma,\tau}$ неотрицательно определена. В этом случае такая n-ка подпространств единственна, с точностью до унитарной эквивалентности, и для ее обобщенной размерности справедливо равенство*

$$\dim S = (n'; 1, 1, \ldots, 1),$$

где $n' = n$, если матрица $B_{\Gamma,\tau}$ положительно определена, и $n' = n-1$ в противном случае.

2.4. Примеры. Если $\tau(\gamma_{ij}) < \lambda_\Gamma^{-1}$ для всех ребер $\gamma_{ij} \in R$, то в силу утверждения 3 существует нетривиальное неприводимое представление π_τ алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.

Ниже в примерах мы фиксируем граф Γ и приводим необходимые и достаточные условия на функцию τ для существования представления алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.

1. Приведем, следуя [20], описание неприводимых представлений алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, в предположении, что

$$\tau_{ij} = \tau_0 \in (0, 1), \quad \gamma_{ij} \in R.$$

Поскольку $\tau_{ij} = \tau_0$, справедливо равенство $B_{\Gamma,\tau} = I - \tau_0 A_\Gamma$. Поэтому матрица $B_{\Gamma,\tau}$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда $1 - \tau_0 \lambda_\Gamma \geqslant 0$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение 8. 1. *Ненулевое неприводимое представление π в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ существует тогда и только тогда, когда $\tau_0 \leqslant \lambda_\Gamma^{-1}$.*

2. *Если* $\tau_0 < \lambda_\Gamma^{-1}$, *то* $\dim \mathcal{H} = n$.

3. *Если* $\tau_0 = \lambda_\Gamma^{-1}$, *то* $\dim \mathcal{H} = n - 1$.

Обозначим через Σ_Γ множество тех τ_0, для которых существует ненулевое неприводимое представление алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ в гильбертовом пространстве.

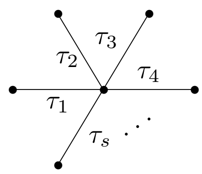
Тогда (см., например, [3, 33]) для графов Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 и E_8 справедливы равенства

$$\Sigma_{A_n} = \left(0; \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\right], \qquad \Sigma_{D_n} = \left(0; \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{2(n-1)}}\right],$$

$$\Sigma_{E_6} = \left(0; \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{12}}\right], \qquad \Sigma_{E_7} = \left(0; \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{18}}\right], \qquad \Sigma_{E_8} = \left(0; \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{30}}\right].$$

Если Γ является одним из расширенных графов Дынкина $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ или $\tilde{E}_8$, то $\Sigma_\Gamma = \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$. Для всех остальных деревьев $\Sigma_\Gamma \subset \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. Пусть Γ — „звезда”



т. е. дерево, вершины $1, \ldots, s$ которого соединены с вершиной $n = s + 1$. В этом случае для главных диагональных миноров матрицы $B_{\Gamma,\tau}$ справедливы равенства

$$M_1 = \ldots = M_s = 1,$$
$$M_n = 1 - (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_s^2).$$

Следовательно, в силу утверждения 4 матрица $B_{\Gamma,\tau}$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_s^2 \leqslant 1.$$

При этом она положительно определена тогда и только тогда, когда

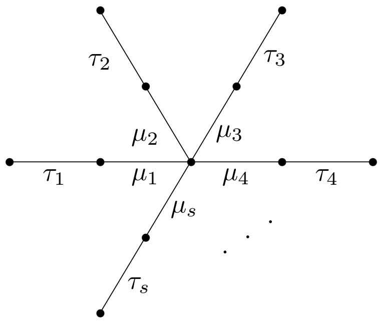
$$\tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_s^2 < 1.$$

В этом случае размерность пространства представления равна n. В случае, когда

$$\tau_1^2 + \ldots + \tau_s^2 = 1,$$

размерность соответствующего пространства представления равна $n - 1$.

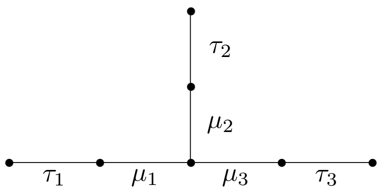
3. Пусть Γ — „звезда” с двумя вершинами на каждом из s лучей,



т. е. дерево, вершины $2j-1,\ 2j,\ j=1,\ldots,s$, которого соединены между собой ребром с меткой τ_j, а все вершины $2j-1,\ j=1,\ldots,s$, соединены с вершиной $n=2s+1$, ребро $\gamma_{2j-1,n}$ помечено числом μ_j. Тогда в силу утверждения 4 необходимое и достаточное условие существования ненулевого представления таково:

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\mu_j^2}{1-\tau_j^2}\leqslant 1.$$

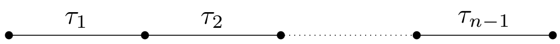
В частности, для $\tilde{E}_6$



необходимое и достаточное условие существования соответствующей конфигурации имеет вид

$$\frac{\mu_1^2}{1-\tau_1^2}+\frac{\mu_2^2}{1-\tau_2^2}+\frac{\mu_3^2}{1-\tau_3^2}\leqslant 1.$$

4. Пусть граф $\Gamma=A_n$ помечен следующим образом:



Рассмотрим полиномы

$$P_k(x_1,\ldots,x_{k-1})=\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & 0 & \ldots & 0\\ x_1 & 1 & x_2 & \ldots & 0\\ 0 & x_2 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}=$$

$$=1-\sum_{i=1}^{k}x_i^2+\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=i_1+2}^{k}x_{i_1}^2x_{i_2}^2-\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=i_1+2}^{k}\sum_{i_3=i_2+2}^{k}x_{i_1}^2x_{i_2}^2x_{i_3}^2+\ldots\,.$$

Тогда в силу утверждения 4 условия

$$P_k(\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}) > 0, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$P_n(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) \geqslant 0$$

являются необходимыми и достаточными условиями существования соответствующей конфигурации.

Поскольку

$$P_k(x, \ldots, x) = x^n U_n\left(\frac{1}{2x}\right),$$

где U_n — полином Чебышева второго рода, то в частном случае, когда все углы равны, $\tau_1 = \ldots = \tau_{n-1} = \tau_0$, условия существования конфигурации

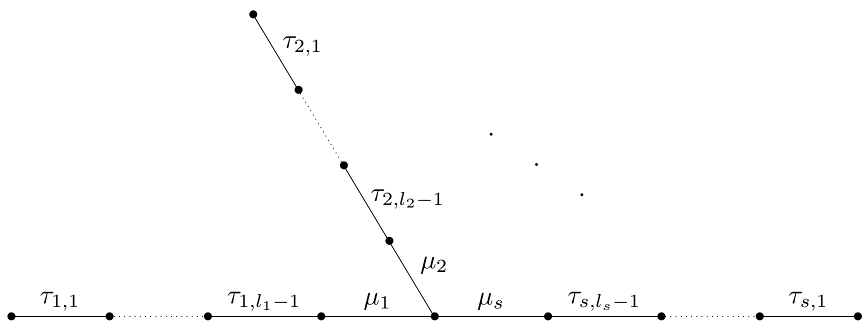
$$U_k\left(\frac{1}{2\tau_0}\right) > 0, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$U_n\left(\frac{1}{2\tau_0}\right) \geqslant 0$$

выполнены тогда и только тогда, когда

$$\tau_0 \leqslant \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}.$$

5. Пусть Γ — „звезда”, имеющая s лучей, каждый из которых содержит l_j, $j = 1, \ldots, s$, вершин:



Тогда в силу утверждения 4 необходимые и достаточные условия существования соответствующей конфигурации имеют вид

$$P_k(\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,k-1}) > 0, \qquad j = 1, \ldots, s, \quad k = 1, \ldots, l_j,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j^2 \frac{P_{l_j-1}(\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j-2})}{P_{l_j}(\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,l_j-1})} \leqslant 1.$$

В частном случае, когда

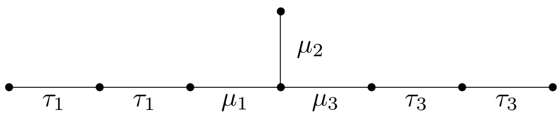
$$\tau_j = \tau_{j,1} = \ldots = \tau_{j,l_j-1}, \qquad j = 1, \ldots, s,$$

необходимые и достаточные условия существования соответствующей конфигурации можно записать в виде

$$\tau_j < \frac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{l_j+1}}, \quad j = 1, \ldots, s,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j^2 \frac{U_{l_j-1}\left(\dfrac{1}{2\tau_j}\right)}{\tau_j U_{l_j}\left(\dfrac{1}{2\tau_j}\right)} \leqslant 1.$$

В частности, для $\tilde{E}_7$

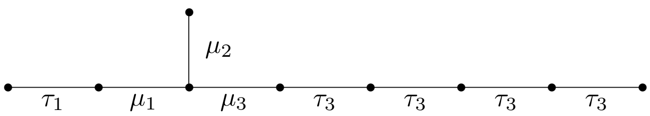


необходимые и достаточные условия существования соответствующей конфигурации таковы:

$$\tau_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tau_3 < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mu_1^2 \frac{1-\tau_1^2}{1-2\tau_1^2} + \mu_2^2 + \mu_3^2 \frac{1-\tau_3^2}{1-2\tau_3^2} \leqslant 1,$$

а для $\tilde{E}_8$



необходимые и достаточные условия существования соответствующей конфигурации имеют вид

$$\tau_3 < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\mu_1^2}{1-\tau_1^2} + \mu_2^2 + \mu_3^2 \frac{\tau_3^4 - 3\tau_3^2 + 1}{3\tau_3^4 - 4\tau_3^2 + 1} \leqslant 1.$$

Примеры утверждений о существовании конфигураций для помеченных деревьев см. также в [13].

3. Простые n-ки подпространств, связанные с унициклическими графами. В этом пункте рассматриваются связные унициклические графы $\Gamma = (V, R)$. Будем обозначать такой граф $\Gamma = (C_m; \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_m)$, где $C_m = (V_0, R_0)$ — цикл из m вершин, а $\Gamma_k = (V_k, R_k)$, $k = 1, \ldots, m,$ — такие деревья, что их множества вершин попарно не пересекаются, и вершина $k \in V_k$, $k = 1, \ldots, m.$ Тогда множество вершин графа $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, а множество ребер $R = R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_m$.

3.1. Алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. В случае унициклического графа алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ бесконечномерна. Действительно, если обозначить $\hat{w} = p_1 p_2 \ldots p_m$, то слово $\hat{w}^r$ является нормальным.

Алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ имеет полиномиальный рост. Действительно, для любой вершины j, отличной от 1, существует единственный кратчайший путь w_j из этой вершины в ближайшую вершину цикла k (вершину k не включаем в этот путь, полагая путь пустым, если $j = k$). Обозначим через w_j соответствующее такому пути слово ($w_j = e$, если $j = k$). Далее из вершины $k \neq 1$ есть единственный кратчайший путь в вершину m, который не содержит вершину 1, и единственный кратчайший путь в вершину 2, который не содержит 1. Обозначим соответствующие слова через v_j и $\overline{v}_j$. Если $k = 1$, то будем полагать $\overline{v}_j = v_j = e$. В силу (9) любое слово $w = p_{i_1} \ldots p_{i_m}$, в котором хотя бы один проектор повторяется более одного раза, можно представить в виде

$$w_{i_1} v_{i_1} \hat{w}^r p_1 \overline{v}^*_{i_m} w^*_{i_m} \quad \text{или} \quad w_{i_1} \overline{v}_{i_1} p_1 \hat{w}^{*r} v^*_{i_m} w^*_{i_m}. \tag{10}$$

Более подробно об этом результате см. в [24, 26]. В [24] также показано, что алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ является конечномерной над своим центром.

3.2. Конструкция представлений алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. Пусть $\varphi \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим матрицу $B_{\Gamma,\tau,\varphi} = (b_{ij})$,

$$b_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \;\; k \in V, \\ -\tau_{kj}, & k \neq j, \;\; \gamma_{kj} \in R \setminus \{\gamma_{1m}\}, \\ -e^{i\varphi}\tau_{1m}, & k = 1, \;\; j = m, \\ -e^{-i\varphi}\tau_{1m}, & k = m, \;\; j = 1, \\ 0, & k \neq j, \;\; \gamma_{kj} \notin R. \end{cases}$$

В линейном пространстве $\mathcal{L}$, порожденном множеством векторов

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

определим полуторалинейную форму $B(\cdot,\cdot)$, положив $B(e_i, e_j) = b_{ij}$.

Пусть $\Phi_\tau \subset [0, 2\pi)$ — множество тех φ, для которых матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ неотрицательно определена. Для $\varphi \in \Phi_\tau$, для которых $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ положительно определена, введем скалярное произведение формулой $\langle x, y \rangle = B(x, y)$. Полученное гильбертово пространство обозначим через $\mathcal{H}_{\tau,\varphi}$. Для тех же $\varphi \in \Phi_\tau$, для которых матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ не является положительно определеной, в качестве $\mathcal{H}_{\tau,\varphi}$ возьмем фактор-пространство пространства $\mathcal{L}$ по ядру формы $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$. Таким образом, гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\tau,\varphi}$ порождено множеством векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, каждый из которых имеет единичную норму, и матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ является матрицей Грамма этого множества векторов.

Как и для деревьев, определим P_i как ортогональный проектор на одномерное подпространство пространства $\mathcal{H}_{\tau,\varphi}$, порожденное вектором e_i, и отображение

$$\pi_{\tau,\varphi} \colon TL_{\Gamma,\tau,\perp} \to \mathcal{B}(H_{\tau,\varphi}) \colon p_i \mapsto P_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Теорема 6. *Пусть Γ — унициклический граф и функция τ такова, что множество Φ_τ тех функций $\varphi \in [0, 2\pi)$, для которых матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ является неотрицательно определенной, не является пустым. Тогда*:

1) *отображения $\pi_{\tau,\varphi}$, $\varphi \in \Phi_\tau$, являются ненулевыми неприводимыми представлениями алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$;*

2) *представления* $\pi_{\tau,\varphi}$ *и* $\pi_{\tau,\tilde{\varphi}}$, $\varphi, \tilde{\varphi} \in \Phi_\tau$, *унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\varphi = \tilde{\varphi}$;

3) *размерность пространства* $\mathcal{H}_{\tau,\varphi}$ *равна* n, $n-1$ *или* $n-2$.

Доказательство. 1. Пусть вершины i и j не соединены ребром, тогда

$$P_i P_j x = \langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle e_i = b_{ij} \langle e_j, x \rangle e_i = 0.$$

Если же вершины i и j соединены ребром, то

$$P_j P_i P_j x = \langle e_j, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle e_j = b_{ji} b_{ij} P_j x = \tau_{ij}^2 P_j x.$$

Таким образом, $\pi_{\tau,\varphi}$ является представлением.

Покажем, что оно неприводимо. Пусть C коммутирует со всеми проекторами, тогда

$$C e_k = C P_k e_k = P_k C e_k = \lambda_k e_k, \quad k \in V,$$

для некоторого $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Пусть

$$l = (j_m = k, j_{m-1}, \ldots, j_2, j_1 = 1)$$

— некоторый путь из вершины 1 в вершину k. Тогда найдется $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $e_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 e_1$. Таким образом,

$$\lambda_k e_k = C e_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 C e_1 = \lambda_1 e_k$$

и C — скалярный оператор.

2. Пусть $\pi_{\tau,\varphi}$ и $\pi_{\tau,\tilde{\varphi}}$ унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарный оператор $U\colon \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ такой, что $U P_k = \tilde{P}_k U$. Но тогда существует λ_k, такое, что

$$U e_k = U P_k e_k = \tilde{P}_k U e_k = \lambda_k \tilde{e}_k,$$

где последнее равенство справедливо, так как $\tilde{P}_k$ — одномерный проектор. С другой стороны, имеют место равенства

$$1 = \langle e_k, e_k \rangle = \langle U e_k, U e_k \rangle = \lambda_k \overline{\lambda}_k \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle = \lambda_k \overline{\lambda}_k,$$

следовательно, найдется $\psi_k \in [0, 2\pi)$ такое, что $\lambda_k = e^{-i\psi_k}$. Таким образом,

$$\tilde{e}_k = e^{i\psi_k} U e_k.$$

Тогда если $\gamma_{kj} \in R \setminus \{\gamma_{1m}\}$, $k < j$, то

$$-\tau_{kj} = \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_j \rangle = e^{i(\psi_k - \psi_j)} \langle e_k, e_j \rangle = -e^{i(\psi_k - \psi_j)} \tau_{kj}.$$

Таким образом, $\psi_k = \psi_j$ для любых пар вершин (k, j). Но тогда

$$-e^{i\tilde{\varphi}} \tau_{1m} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_m \rangle = \langle e_1, e_m \rangle = -e^{i\varphi} \tau_{1m},$$

следовательно, $\tilde{\varphi} = \varphi$.

3. Размерность пространства $\mathcal{H}_{\tau,\varphi}$ совпадает с рангом матрицы $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$. Покажем, что если матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ неотрицательно определена, то ее ранг больше или равен $n-2$.

Через $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus V'$, $V' \subset V$, обозначим граф, который получается из графа Γ после удаления вершин V' и всех ребер, соединенных с этими вершинами. При этом $\tilde{\tau}$ — сужение τ на ребра $\tilde{\Gamma}$.

Рассмотрим граф $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{1\}$, который получается из Γ, если удалить вершину 1 и все ребра, соединенные с ней. Тогда компонентами связности $\tilde{\Gamma}$ будут компоненты связности графа $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \setminus \{1\}$ и дерево $\hat{\Gamma} = \Gamma \setminus V_1$. После удаления первого столбца и первой строки из матрицы $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ получившаяся матрица не зависит от φ и является блочно-диагональной матрицей, состоящей из блоков $B_{\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\tau}_1}$ и $B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}}$. Следовательно, ранг матрицы $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ больше или равен сумме рангов матриц $B_{\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\tau}_1}$ и $B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}}$.

Поскольку матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ неотрицательно определена, существует представление $\pi_{\tau,\varphi}$ алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. Его сужения на подалгебры, порожденные множествами проекторов $\{p_i\}_{i\in V_1}$ и $\{p_i\}_{i\in V\setminus V_1}$, являются представлениями алгебр $TL_{\Gamma_1,\tau_1,\perp}$ и $TL_{\hat{\Gamma},\hat{\tau},\perp}$, следовательно, $\lambda_{\Gamma_1,\tau_1} \leqslant 1$ и $\lambda_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}} \leqslant 1$. Но тогда $\lambda_{\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\tau}_1} < 1$ по утверждению 3. Следовательно, матрица $B_{\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\tau}_1}$ положительно определена, а матрица $B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}}$ неотрицательно определена. Таким образом, ранг матрицы $B_{\tilde{\Gamma}_1,\tilde{\tau}_1}$ равен $|V_1| - 1$, а ранг матрицы $B_{\hat{\Gamma},\hat{\tau}}$ больше или равен $|V_2| + \ldots + |V_m| - 1$. Следовательно, ранг матрицы $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ больше или равен $|V| - 2 = n - 2$.

Теорема доказана.

3.3. Описание всех простых неприводимых n-ок подпространств для связных унициклических графов.

Теорема 7. *Пусть Γ — унициклический граф и функция τ такова, что существует π — ненулевое неприводимое представление алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда найдется $\varphi \in [0, 2\pi)$ такое, что матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ является неотрицательно определенной и представление π унитарно эквивалентно представлению $\pi_{\tau,\varphi}$.*

Доказательство. Покажем, что для представления π образы всех проекторов $Q_j = \pi(p_j)$ одномерны.

Для каждого пути $l = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ запишем унитарный оператор

$$V_l = (-1)^{k+1} \frac{Q_{i_1} Q_{i_2} \ldots Q_{i_k}}{\tau_{i_1 i_2} \tau_{i_2 i_3} \ldots \tau_{i_{k-1} i_k}} \Big\lceil_{\mathcal{H}_{i_k}} : \ \mathcal{H}_{i_k} \to \mathcal{H}_{i_1}.$$

Пусть L_1 — множество всех путей, которые начинаются и заканчиваются в вершине 1. Положим $V = V_{l_0}$, где $l_0 = (1, 2, \ldots, m, 1) \in L_1$. Тогда, учитывая (10), для любого $l \in L_1$ найдется $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $V_l = V^r$ или $V_l = V^{*r}$. Пусть $C_1 \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — некоторый оператор такой, что $C_1 V = V C_1$. Тогда $C_1 V_l = V_l C_1$ для любого $l \in L_1$. Для каждой вершины $j \neq 1$ зафиксируем кратчайший путь $l_j = (1, \ldots, j)$, не проходящий через ребро γ_{1m}, и положим

$$C_j = V_{l_j}^* C_1 V_{l_j} : \ \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j.$$

Для любой пары вершин $j, k \in V$ путь $l_k \cup (k, j) \cup l_j^*$ принадлежит L_1, следовательно,

$$C_1 V_{l_k} V_{(k,j)} V_{l_j}^* = V_{l_k} V_{(k,j)} V_{l_j}^* C_1,$$

откуда

$$C_k V_{(k,j)} = V_{(k,j)} C_j.$$

Поскольку π неприводимо, то $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \ldots + \mathcal{H}_n$. Для $x = \sum_{j\in V} x_j$, где $x_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, \ldots, n$, положим $Cx = \sum_{j\in V} C_j x_j$. Пусть $x = 0$, тогда для любого $y = \sum_{j\in V} y_j$, $y_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, \ldots, n$, справедливы равенства

$$\langle Cx, y\rangle = \sum_{j\in V}\sum_{k\in V}\langle C_j x_j, y_k\rangle = \sum_{j\in V}\sum_{k\in V}\langle Q_j C_j x_j, Q_k y_k\rangle =$$

$$= \sum_{j\in V}\sum_{k\in V}\langle x_j, C_k^* y_k\rangle = \left\langle x, \sum_{k\in V} C_k^* y_k\right\rangle = 0.$$

Таким образом, оператор C корректно определен. Далее, для произвольных x, y имеем

$$\langle CQ_j x, y\rangle = \sum_{k\in V}\langle C_j Q_j x, y_k\rangle = \sum_{k\in V}\langle Q_j x, C_k^* y_k\rangle,$$

$$\langle Q_j Cx, y\rangle = \sum_{i\in V}\sum_{k\in V}\langle Q_j C_i x_i, y_k\rangle = \sum_{i\in V}\sum_{k\in V}\langle Q_j x_i, C_k^* y_k\rangle.$$

Тогда $CQ_j = Q_j C$, следовательно, $C = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Но для любого $x_1 \in \mathcal{H}_1$ имеем $C_1 x_1 = Cx_1 = \lambda x_1$, и, значит, $\dim \mathcal{H}_1 = 1$. Далее, $\mathcal{H}_j = V_{l_j}^* \mathcal{H}_1$, т. е. $\dim \mathcal{H}_j = 1$, и найдется $\varphi \in [0, 2\pi)$ такое, что $V = e^{i\varphi}$.

Зафиксируем $x_1 \in \mathcal{H}_1$ такое, что $Q_1 x_1 = x_1$, $\|x_1\| = 1$, и положим $x_j = V_{l_j}^* x_1$. Тогда $\|x_j\| = 1$, $j \in V$.

Очевидно, что если вершины i и j не соединены, то $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, а если они соединены и $\gamma_{ij} \in R \setminus \{\gamma_{1m}\}$, то либо $l_j = (j, i) \cup l_i$, либо $l_i = (i, j) \cup l_j$. Пусть, для определенности, выполнено первое равенство. Это означает, что $x_j = -\tau_{ij}^{-1} Q_j x_i$, но тогда

$$\langle x_i, x_j\rangle = -\frac{1}{\tau_{ij}}\langle x_i, Q_j x_i\rangle = -\frac{1}{\tau_{ij}}\langle x_i, Q_i Q_j Q_i x_i\rangle = -\tau_{ij},$$

$$\langle x_1, x_m\rangle = \langle x_1, V_{l_m}^* x_1\rangle = -\tau_{1m}\langle V x_1, x_1\rangle = -e^{i\varphi}\tau_{1m}.$$

Таким образом, матрица $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ является матрицей Грамма множества векторов $\{x_j\}_{j\in V}$, следовательно, она неотрицательно определена и представления π и $\pi_{\tau,\varphi}$ унитарно эквивалентны.

Теорема доказана.

Объединяя теоремы 6 и 7, для систем подпространств получаем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть* Γ *— унициклический граф,* Φ_τ *— множество всех* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *таких, что матрица* $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ *неотрицательно определена.*

Неприводимая простая n*-ка подпространств, соответствующая паре* (Γ, τ)*, существует тогда и только тогда, когда множество* Φ_τ *не пусто, при этом, с точностью до унитарной эквивалентности, для каждого* $\varphi \in \Phi_\tau$ *существует единственная ненулевая неприводимая простая* n*-ка подпространств* $S_{\tau,\varphi}$ *и все они не эквивалентны между собой.*

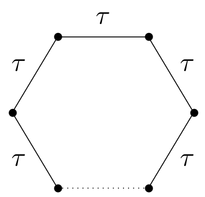
Для обобщенной размерности системы подпространств $S_{\tau,\varphi}$ *справедливо равенство*

$$\dim S_{\tau,\varphi} = (n'; 1, 1, \ldots, 1),$$

где $n' = n$, *если матрица* $B_{\Gamma,\tau,\varphi}$ *положительно определена, и* $n' = n-1$ *или* $n' = n-2$, *в противном случае.*

3.4. Примеры. Для каждого унициклического графа Γ существует число $\delta = \delta(\Gamma)$ такое, что если все $\tau_{ij} < \delta$, то представления π_φ существуют при всех $\varphi \in [0, 2\pi)$ (утверждение 14).

1. Пусть Γ — цикл, каждое ребро которого помечено одним и тем же числом τ.



Тогда:

1. Если $\tau < \dfrac{1}{2}$, то для любого $\varphi \in [0, 2\pi)$ существует представление $\pi_{\tau,\varphi}$ и $\dim \mathcal{H}_{\tau,\varphi} = n$.

2. Если $\tau = \dfrac{1}{2}$, то для любого $\varphi \in [0, 2\pi)$ существует представление $\pi_{\tau,\varphi}$, при этом $\dim \mathcal{H}_{\tau,\varphi} = n$, если $\varphi \neq 0$, и $\dim \mathcal{H}_{\tau,\varphi} = n-1$, если $\varphi = 0$.

3. Если $\dfrac{1}{2} < \tau < \dfrac{1}{2\cos(\pi/n)}$, то представление $\pi_{\tau,\varphi}$ существует для всех $\varphi \in [n\alpha, 2\pi - n\alpha]$, где α — решение уравнения

$$\tau = \frac{1}{2\cos\alpha} \tag{11}$$

на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{n}\right)$. При этом $\dim \mathcal{H}_{\tau,\varphi} = n$, если $\varphi \in (n\alpha, 2\pi - n\alpha)$, и $\dim \mathcal{H}_{\tau,\varphi} = n-1$, если $\varphi = n\alpha$ или $\varphi = 2\pi - n\alpha$.

4. Если $\tau = \dfrac{1}{2\cos(\pi/n)}$, то представление $\pi_{\tau,\varphi}$ существует только при $\varphi = \pi$ и $\dim \mathcal{H}_{\tau\varphi} = n-2$.

5. При $\tau > \dfrac{1}{2\cos(\pi/n)}$ ни для какого φ представление $\pi_{\tau,\varphi}$ не существует.

4. Простые n-ки одномерных подпространств. В этом пункте мы приведем описание всех неприводимых представлений алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, таких, что образы всех образующих алгебры — одномерные проекторы.

4.1. Конструкция представлений алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ одномерными проекторами. Пусть ω — функция, определенная на ребрах графа:

$$\omega\colon R \to [0, 2\pi)\colon \gamma_{kj} \mapsto \omega_{kj}.$$

Введем $(n \times n)$-матрицу $B_{\Gamma,\tau,\omega} = (b_{kj})$ такую, что

$$b_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ -e^{i\omega_{kj}}\tau_{kj}, & k < j, \quad \gamma_{kj} \in R, \\ -e^{-i\omega_{kj}}\tau_{kj}, & k > j, \quad \gamma_{kj} \in R, \\ 0, & k \neq j, \quad \gamma_{kj} \notin R. \end{cases}$$

Пусть Ω_τ — множество функций ω таких, что матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ неотрицательно определена. Рассмотрим линейное пространство, порожденное множеством векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Положим $B(e_i, e_j) = b_{ij}$ и доопределим $B(\cdot,\cdot)$ до полуторалинейной формы. Если функция $\omega \in \Omega_\tau$ такова, что $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ положительно определена, то введем скалярное произведение формулой $\langle x, y\rangle = B(x, y)$. Полученное гильбертово пространство обозначим через $\mathcal{H}_{\tau,\omega}$. Если же функция $\omega \in \Omega_\tau$ такова, что матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ не является положительно определенной, то в качестве $\mathcal{H}_{\tau,\omega}$ возьмем фактор-пространство по ядру формы B. Таким образом, гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\tau,\omega}$ порождено множеством векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, которые, возможно, линейно зависимы, и каждый из которых имеет единичную норму, а матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ является матрицей Грамма этого множества векторов.

Построим $*$-представление $\pi_{\tau,\omega}$ алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. Определим

$$\pi_{\tau,\omega}\colon TL_{\Gamma,\tau,\perp} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\tau,\omega})\colon p_k \mapsto P_k, \quad k \in V,$$

где P_k — одномерный проектор на подпространство, порожденное вектором e_k, т. е.

$$P_k x = \langle x, e_k\rangle e_k, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Теорема 9. *Пусть Γ — связный граф и функция τ такова, что множество Ω_τ функций $\omega \in [0, 2\pi)$, для которых матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ является неотрицательно определенной, не является пустым. Тогда*:

1) *отображения $\pi_{\tau,\omega}$, $\omega \in \Omega_\tau$, являются ненулевыми неприводимыми представлениями алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$*;

2) *представления $\pi_{\tau,\omega}$ и $\pi_{\tau,\tilde\omega}$, $\omega, \tilde\omega \in \Omega_\tau$, унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда на вершинах графа существует функция*

$$\psi\colon V \to [0, 2\pi)\colon k \mapsto \psi_k$$

такая, что

$$e^{i\tilde\omega_{kj}} = e^{i\omega_{kj}} e^{i(\psi_k - \psi_j)}. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Если $p_k p_j = 0$, то для любого $x \in \mathcal{H}$

$$P_k P_j x = \langle x, e_j\rangle\langle e_j, e_k\rangle e_k = b_{kj}\langle x, e_j\rangle e_k = 0.$$

Если $p_k p_j p_k = \tau_{kj}^2 p_k$, то для любого $x \in \mathcal{H}$

$$P_k P_j P_k x = \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_j\rangle\langle e_j, e_k\rangle e_k = b_{kj} b_{jk}\langle x, e_k\rangle e_k = \tau_{kj}^2 P_k x.$$

Таким образом, для пары проекторов P_k и P_j выполняются соотношения.

Теперь покажем, что $\pi_{\tau,\omega}$ неприводимо. Пусть C коммутирует со всеми проекторами, тогда

$$Ce_k = CP_k e_k = P_k C e_k = \lambda_k e_k, \quad k \in V,$$

для некоторого $\lambda_k \in \mathbb{C}$. С другой стороны, поскольку граф связный, существует путь из вершины 1 в вершину k

$$l = \bigl(j_m = k, j_{m-1}, \ldots, j_2, j_1 = 1\bigr).$$

Тогда найдется $\mu_k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ такое, что $e_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \ldots P_{j_2} P_1 e_1$. Таким образом,

$$\lambda_k e_k = Ce_k = \mu_k P_k P_{j_{m-1}} \dots P_{j_2} P_1 C e_1 = \lambda_1 e_k,$$

и C — скалярный оператор.

2. Пусть $\pi_{\tau,\omega}$ и $\pi_{\tau,\tilde{\omega}}$ унитарно эквивалентны, т. е. существует $U : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ такой, что $UP_k = \tilde{P}_k U$. Но тогда существует λ_k такое, что

$$Ue_k = UP_k e_k = \tilde{P}_k U e_k = \lambda_k \tilde{e}_k,$$

где последнее равенство справедливо, так как $\tilde{P}_k$ — одномерный проектор. С другой стороны, имеют место равенства

$$1 = \langle e_k, e_k \rangle = \langle Ue_k, Ue_k \rangle = \lambda_k \overline{\lambda}_k \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_k \rangle = \lambda_k \overline{\lambda}_k.$$

Следовательно, найдется $\psi_k \in [0, 2\pi)$ такое, что $\lambda_k = e^{-i\psi_k}$. Таким образом,

$$\tilde{e}_k = e^{i\psi_k} U e_k.$$

Тогда, если $\gamma_{kj} \in R$, $k < j$,

$$-e^{i\tilde{\omega}_{kj}} \tau_{kj} = \langle \tilde{e}_k, \tilde{e}_j \rangle = e^{i(\psi_k - \psi_j)} \langle e_k, e_j \rangle = -e^{i(\psi_k - \psi_j)} e^{i\omega_{kj}} \tau_{kj},$$

и, значит,

$$e^{i\tilde{\omega}_{kj}} = e^{i(\psi_k - \psi_j)} e^{i\omega_{kj}}.$$

Пусть теперь существует ψ такое, что выполнено условие (12). Определим унитарный оператор $U \colon \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ формулой

$$Ue_k = e^{-i\psi_k} \tilde{e}_k.$$

Тогда

$$\tilde{P}_k U x = \langle Ux, \tilde{e}_k \rangle \tilde{e}_k = \langle Ux, e^{i\psi_k} U e_k \rangle e^{i\psi_k} U e_k = \langle x, e_k \rangle U e_k = U P_k x.$$

Таким образом, $\tilde{P}_k U = U P_k$, $k \in V$.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** 1. *Если Γ — дерево, то все представления $\pi_{\tau,\omega}$, $\omega \in \Omega_\tau$, унитарно эквивалентны.*

2. *Если Γ — связный граф с одним циклом, то существует ребро $\gamma \in R$ такое, что для любого представления $\pi_{\tau,\omega}$, $\omega \in \Omega_\tau$, найдется единственное эквивалентное ему представление $\pi_{\tau,\tilde{\omega}}$, $\tilde{\omega} \in \Omega_\tau$, такое, что $\tilde{\omega}(R \setminus \{\gamma\}) = \{0\}$.*

3. *Пусть Γ — связный граф и $\nu = \nu(\Gamma) = |R| - |V| + 1$ — его циклический ранг. Тогда существует набор $R_0 \subset R$ из ν ребер такой, что для любого представления $\pi_{\tau,\omega}$, $\omega \in \Omega_\tau$, найдется единственное эквивалентное ему представление $\pi_{\tau,\tilde{\omega}}$, $\tilde{\omega} \in \Omega_\tau$, такое, что $\tilde{\omega}(R \setminus R_0) = \{0\}$.*

***Замечание* 1.** По существу, неэквивалентные представления алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ одномерными проекторами параметризуются элементами некоторого подмножества группы S^1-когомологии графа Γ.

***Замечание* 2.** Ситуация с возможными рангами неотрицательно определенных матриц $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ авторам не ясна. Поэтому в теореме нет утверждения о возможных размерностях пространства $\mathcal{H}_{\tau,\omega}$.

4.2. Описание всех простых неприводимых n-ок одномерных подпространств для связных графов.

Теорема 10. *Пусть Γ — связный граф и функция τ такова, что существует π — ненулевое неприводимое представление алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такое, что $\dim \mathcal{H}_k = 1$, $k \in V$, где $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} Q_k$, $Q_k = \pi(p_k)$. Тогда найдется функция $\omega\colon R \to [0, 2\pi)$ такая, что матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ является неотрицательно определенной и представление π унитарно эквивалентно представлению $\pi_{\tau,\omega}$.*

Доказательство. Для пары вершин $k, j \in V$, соединенных ребром, определим оператор

$$U_{kj} = -\frac{Q_k Q_j}{\tau_{kj}}.$$

Если сузить этот оператор на $\mathcal{H}_j$, то получим унитарный оператор, действующий из $\mathcal{H}_j$ в $\mathcal{H}_k$. Пусть $l = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ — путь в графе, определим

$$U_l = U_{j_1 j_2} U_{j_2 j_3} \ldots U_{j_{m-1} j_m}.$$

Очевидно, что сужение U_l на $\mathcal{H}_{j_m}$ является унитарным оператором из $\mathcal{H}_{j_m}$ в $\mathcal{H}_{j_1}$.

Зафиксируем $e_1 \in \mathcal{H}_1$ такое, что $\|e_1\| = 1$. Поскольку граф связный, для любой вершины k существует хотя бы один путь l_k из вершины 1 в вершину k; зафиксируем его. Положим $e_k = U_{l_k} e_1$. Очевидно, что $\|e_k\| = 1$ и система векторов

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

порождает $\mathcal{H}$, так как представление неприводимо и линейная оболочка этой системы инвариантна относительно представления.

Пусть $k < j$. Если $p_k p_j = 0$, то, очевидно, $\langle e_k, e_j \rangle = 0$. Если же $p_k p_j p_k = \tau_{kj}^2 p_k$, то

$$\langle e_k, e_j \rangle = \langle U_{l_k} e_1, U_{l_j} e_1 \rangle = -\tau_{kj} \langle U_{l_j}^* U_{jk} U_{l_k} e_1, e_1 \rangle.$$

Очевидно, что сужение оператора $U_{l_j}^* U_{jk} U_{l_k}$ на $\mathcal{H}_1$ действует как унитарный оператор в $\mathcal{H}_1$, но так как $\mathcal{H}_1$ — одномерное пространство, найдется число $\omega_{kj} \in [0, 2\pi)$ такое, что $\langle e_k, e_j \rangle = -e^{i\omega_{kj}} \tau_{kj}$.

Теорема доказана.

Объединяя теоремы 9 и 10, для систем подпространств получаем следующую теорему.

Теорема 11. *Пусть Γ — произвольный граф, $\nu = \nu(\Gamma) = |R| - |V| + 1$ — циклический ранг графа, $R_0 \subset R$ — фиксированное множество из ν ребер, после удаления которых граф все еще будет связным, Ω_τ — множество всех функций $\omega\colon R \to [0, 2\pi)$ таких, что $\omega(R \setminus R_0) = \{0\}$ и матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ неотрицательно определена.*

Неприводимая простая n-ка одномерных подпространств, соответствующая паре (Γ, τ), существует тогда и только тогда, когда множество Ω_τ не пусто, при этом, с точностью до унитарной эквивалентности, для каждого $\omega \in \Omega_\tau$ существует единственная ненулевая неприводимая простая n-ка одномерных подпространств $S_{\tau,\omega}$ и все они не эквивалентны между собой.

4.3. Примеры. **1.** Мы получили описание представлений $\pi_{\tau,\omega}$ одномерными проекторами алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, при этом необходимым и достаточным условием существования каждого такого представления является неотрицательная определенность матрицы $B_{\Gamma,\tau,\omega}$. Приведем некоторые достаточные условия положительной определенности матрицы $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ для любой функции ω.

Обозначим через $V_k \subset V$ множество вершин, соединенных ребром с вершиной k.

Утверждение 9. *Пусть для любого* $k \in V$

$$r_k = \sum_{j \in V_k} \tau_{kj} < 1. \tag{13}$$

Тогда для любой функции $\omega\colon R \to [0, 2\pi)$ *существует неприводимое представление* $\pi_{\tau,\omega}$.

Доказательство. Действительно, выполнение неравенства (13) означает, что матрица $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ является матрицей со строгим диагональным преобладанием, так как

$$b_{kk} = 1 > r_k = \sum_{j \in V_k} \tau_{kj} = \sum_{j \in V \setminus \{k\}} |b_{kj}|.$$

Далее, поскольку $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ — эрмитова матрица с положительными диагональными элементами, все ее собственные значения положительны, следовательно, $B_{\Gamma,\tau,\omega}$ — положительно определенная матрица (см., например, [40], теорема 6.1.10).

Утверждение доказано.

Обозначим через $\mu_k = |V_k|$ валентность вершины k и положим

$$\mu = \max_{k \in V} \mu_k.$$

Следствие 2. *Каждое из следующих двух условий является достаточным для существования неприводимого представление* $\pi_{\tau,\omega}$ *алгебры* $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ *при любой функции* $\omega\colon R \to [0, 2\pi)$:

1) *для любого* $\gamma_{kj} \in R$

$$\tau_{kj} < \frac{1}{\mu_k};$$

2) *для любого* $\gamma_{kj} \in R$

$$\tau_{kj} < \frac{1}{\mu}.$$

Действительно,

$$r_k = \sum_{j \in V_k} \tau_{kj} < \sum_{j \in V_k} \frac{1}{\mu_k} = 1.$$

2. Будем говорить, что система подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$, или система соответствующих ортопроекторов $\{P_k\}_{k=1}^n$, *симметрична*, если для любой перестановки $\sigma \in S_n$ системы проекторов $\{P_{\sigma(k)}\}_{k=1}^n$ и $\{P_k\}_{k=1}^n$ унитарно эквивалентны.

Пусть $\tau_0 \in (0, 1)$. Приведем описание всех простых симметричных систем одномерных подпространств $S = (\mathcal{H}; \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ таких, что $P_k P_j P_k = \tau_0^2 P_k$ для всех $k \neq j$.

Обозначим через ω_+ и ω_- функции на ребрах полного графа с n вершинами K_n такие, что $\omega_+(\gamma) = 0$, $\omega_-(\gamma) = \pi$, для любых $\gamma \in R_{K_n}$.

Утверждение 10. 1. *Если* $\tau_0 \in \left(0, \dfrac{1}{n-1}\right)$, *то существуют две неприводимые симметричные неэквивалентные системы одномерных подпространств* S_{τ_0,ω_+} *и* S_{τ_0,ω_-}. *При этом* $\dim \mathcal{H}_{\tau_0,\omega_+} = \dim \mathcal{H}_{\tau_0,\omega_-} = n$.

2. *Если* $\tau_0 = \dfrac{1}{n-1}$, *то существуют две неприводимые симметричные неэквивалентные системы одномерных подпространств* S_{τ_0,ω_+} *и* S_{τ_0,ω_-}. *При этом* $\dim \mathcal{H}_{\tau_0,\omega_+} = n$ *и* $\dim \mathcal{H}_{\tau_0,\omega_-} = n-1$.

3. *Если* $\tau_0 \in \left(\dfrac{1}{n-1}, 1\right)$, *то существует единственная симметричная неприводимая система одномерных подпространств* S_{τ_0,ω_+}. *При этом* $\dim \mathcal{H}_{\tau_0,\omega_+} = n$.

5. О сложности описания n-ок подпространств для графов с двумя и более циклами. В этом пункте мы приведем конструкцию, которая позволяет построить представления алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, параметризованные операторнозначными функциями, определенными на ребрах графа, образы которых лежат в унитарных операторах. Вопрос о существовании представления для такой функции будет сводится к вопросу о неотрицательной определенности соответствующей полуторалинейной формы. Будут получены критерий неприводимости такого представления, критерий эквивалентности двух таких представлений и показано, что любое неприводимое представление унитарно эквивалентно представлению, построенному с помощью этой конструкции. Для связных графов с двумя и более циклами задача описания представлений при малых $\tau(\gamma_{ij})$ содержит задачу об описании пар унитарных операторов в гильбертовом пространстве с точностью до унитарной эквивалентности, т. е. является $*$-дикой задачей.

5.1. Алгебра $\boldsymbol{TL_{\Gamma,\tau,\perp}}$. Случай, когда связный граф не является ни деревом, ни унициклическим графом, характеризуется условием $\nu(\Gamma) \geqslant 2$, где $\nu(\Gamma)$ — циклический ранг графа. В этом случае найдется вершина j такая, что существуют, по крайней мере, два различных пути

$$l_1 = (i_{11} = j, i_{12}, \ldots, i_{1m_1}) \quad \text{и} \quad l_2 = (i_{21} = j, i_{22}, \ldots, i_{2m_2})$$

такие, что вершины в каждом из путей не повторяются и вершины i_{1m_1}, i_{2m_2} соединены ребрами с вершиной j. Пусть

$$w_1 = p_{i_{11}} p_{i_{12}} \ldots p_{i_{1m_1}} \quad \text{и} \quad w_2 = p_{i_{21}} p_{i_{22}} \ldots p_{i_{2m_2}}$$

— нормальные слова алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, соответствующие путям l_1 и l_2. Тогда вследствие (9) для любого конечного набора чисел $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \ldots)$, $r_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, слово

$$w = w_1^{r_1} w_2^{r_2} w_1^{r_3} w_2^{r_4} w_1^{r_5} \ldots$$

является нормальным. Таким образом, в случае $\nu(\Gamma) \geqslant 2$ алгебра $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ содержит свободную алгебру с двумя образующими, следовательно, она является алгеброй экспоненциального роста.

5.2. Конструкция представлений алгебры $\boldsymbol{TL_{\Gamma,\tau,\perp}}$. Зафиксируем некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$. Пусть η — функция, которая сопоставляет каждому ребру графа унитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$:

$$\eta\colon\ R \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0).$$

Для каждой *упорядоченной* пары вершин (k,j), соединенной ребром $\gamma_{kj} \in R$, положим $V_{kj} = \eta(\gamma_{kj})$, если $k < j$, и $V_{kj} = V_{jk}^*$, если $k > j$. Определим набор операторов $B_{kj} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ формулой

$$B_{kj} = \begin{cases} I, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \quad \gamma_{kj} \notin R, \\ \tau_{kj} V_{kj}, & k \neq j, \quad \gamma_{kj} \in R. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{\mathcal{H}}$ — прямая сумма n копий пространства $\mathcal{H}_0$:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_0,$$

а Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — вложения $\mathcal{H}_0$ в $\tilde{\mathcal{H}}$ такие, что

$$\Gamma_k^* \colon \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}_0 \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k.$$

Обозначим $\tilde{\mathcal{H}}_k = \operatorname{Im} \Gamma_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Положим

$$B(x,y) = B_\eta(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle B_{jk} \Gamma_k^* x, \Gamma_j^* y \rangle, \quad x, y \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

Если непрерывная полуторалинейная форма B неотрицательно определена и $\tilde{\mathcal{H}}_0$ — ее ядро, то она задает скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\eta = \tilde{\mathcal{H}}/\tilde{\mathcal{H}}_0$. Обозначим соответствующий гомоморфизм через

$$\rho \colon \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H} \colon x \mapsto x + \tilde{\mathcal{H}}_0.$$

Построим $*$-представление $\pi_{\tau,\eta}$ алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$. Определим

$$\pi_{\tau,\eta} \colon TL_{\Gamma,\tau,\perp} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \colon p_k \mapsto P_k, \quad k \in V,$$

где P_k — ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{H}_k = \rho(\tilde{\mathcal{H}}_k)$. Заметим, что $\tilde{\mathcal{H}}_k \cap \tilde{\mathcal{H}}_0 = \{0\}$, поэтому ρ_k — сужение ρ на $\tilde{\mathcal{H}}_k$ — взаимно однозначно отображает $\tilde{\mathcal{H}}_k$ на $\mathcal{H}_k$. Следовательно, корректно определен идемпотент с образом $\tilde{\mathcal{H}}_k$:

$$\tilde{P}_k \colon \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}} \colon x \mapsto \rho_k^{-1}(P_k \rho(x)).$$

Тогда непосредственно из определения $\tilde{P}_k$ следует равенство

$$P_k \rho(x) = \rho(\tilde{P}_k x).$$

С каждым путем в графе $l = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, $m > 1$, можно связать число τ_l и набор операторов

$$P_l = P_{j_1} \ldots P_{j_m},$$

$$\tilde{P}_l = \tilde{P}_{j_1} \ldots \tilde{P}_{j_m},$$

$$B_l = B_{j_1 j_2} \ldots B_{j_{m-1} j_m},$$

$$\tau_l = \tau_{j_1j_2}\ldots\tau_{j_{m-1}j_m},$$

$$V_l = \frac{B_l}{\tau_l} = V_{j_1j_2}\ldots V_{j_{m-1}j_m}.$$

Заметим, что V_l — унитарный оператор, действующий в $\mathcal{H}_0$, а B_l — оператор, пропорциональный унитарному, такой, что для любых $x, y \in \tilde{\mathcal{H}}$ справедливо равенство

$$\langle B_l\Gamma^*_{j_m}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\rangle = \langle P_l\rho(x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}},$$

которое непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 11. *Для любых векторов $x, y \in \tilde{\mathcal{H}}$ справедливы равенства*

$$\big\langle P_j\rho(x), \rho(y)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \Big\langle \Gamma^*_j\tilde{P}_jx, \Gamma^*_j\tilde{P}_jy\Big\rangle, \quad j \in V, \tag{14}$$

$$\big\langle P_{j_1}P_{j_2}P_{j_3}\ldots P_{j_m}\rho(x), \rho(y)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle B_{j_1j_2}B_{j_2j_3}\ldots B_{j_{m-1}j_m}\Gamma^*_{j_m}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\big\rangle, \tag{15}$$

где $j_1, \ldots, j_m \in V$, $m > 1$, — произвольный набор вершин графа.

Доказательство. Установим сначала равенство (15) для случая $m = 2$. Действительно, для любых $x, y \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\big\langle P_{j_1}P_{j_2}\rho(x), \rho(y)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle \rho(\tilde{P}_{j_2}x), \rho(\tilde{P}_{j_1}y)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle B_{j_1j_2}\Gamma^*_{j_2}\tilde{P}_{j_2}x, \Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\big\rangle.$$

Как следствие получаем два утверждения:

1) если вершины j_1 и j_2 различны и не соединены ребром, то проекторы P_{j_1} и P_{j_2} ортогональны;

2) если $j_1 = j_2 = j$, то $P_jP_j = P_j$ и $B_{jj} = I$, и мы получили равенство (14).

Установим равенство (15) для случая $m > 2$. Без ограничения общности можно рассматривать только наборы, соответствующие путям в графе. Действительно, если для некоторого $1 \leqslant i < m$ вершины j_i и j_{i+1} различны и не соединены ребром, то $B_{j_ij_{i+1}} = 0$ и равенство очевидно. Если же $j_i = j_{i+1}$, то $B_{j_ij_{i+1}} = 1$ и можно заменить эти два проектора в произведении одним.

Пусть $l = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ — произвольный путь из $m > 2$ вершин, а $\hat{l} = (j_1, j_2, \ldots, j_{m-1})$ — путь, который получится, если удалить из l последнюю вершину.

Допустим, что равенство установлено для любого набора, который соответствует пути из менее чем m вершин графа, тогда

$$\begin{aligned}\langle P_l\rho(x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle P_{\hat{l}}\rho(\tilde{P}_{j_m}x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}} = \\ &= \langle B_{\hat{l}}\Gamma^*_{j_{m-1}}\tilde{P}_{j_{m-1}}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\rangle = \\ &= \langle \Gamma^*_{j_{m-1}}\tilde{P}_{j_{m-1}}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_{m-1}}\Gamma_{j_{m-1}}B^*_{\hat{l}}\Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\rangle = \\ &= \langle P_{j_{m-1}}P_{j_m}\rho(x), \rho(\Gamma_{j_{m-1}}B^*_{\hat{l}}\Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y)\rangle_{\mathcal{H}} = \\ &= \langle B_{j_{m-1}j_m}\Gamma^*_{j_m}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_{m-1}}\tilde{P}_{j_{m-1}}\Gamma_{j_{m-1}}B^*_{\hat{l}}\Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\rangle_{\mathcal{H}} = \\ &= \langle B_{\hat{l}}B_{j_{m-1}j_m}\Gamma^*_{j_m}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\rangle_{\mathcal{H}} = \\ &= \langle B_l\Gamma^*_{j_m}\tilde{P}_{j_m}x, \Gamma^*_{j_1}\tilde{P}_{j_1}y\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение 11 доказано по индукции.

Лемма 1. *Отображение $\pi_{\tau,\eta}$ является представлением алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.*

Доказательство. Если $\gamma_{kj} \notin R$, то для любых $x, y \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\langle P_j P_k \rho(x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_{jk}\Gamma_k^* \tilde{P}_k x, \Gamma_j^* \tilde{P}_j y\rangle = 0.$$

Если $\gamma_{kj} \in R$, то для любых $x, y \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\langle P_k P_j P_k \rho(x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_{kj} B_{jk}\Gamma_k^* \tilde{P}_k x, \Gamma_k^* \tilde{P}_k xy)\rangle =$$

$$= \tau_{kj}^2 \langle \Gamma_k^* \tilde{P}_k x, \Gamma_k^* \tilde{P}_k y\rangle = \tau_{kj}^2 \langle P_k \rho(x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, $P_k P_j P_k = \tau_{kj}^2 P_k$.

Лемма доказана.

5.3. Критерии неприводимости представлений $\boldsymbol{\pi_{\tau,\eta}}$. Пусть $C\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — оператор, который коммутирует с проекторами P_k, $k \in V$. Тогда подпространства $\mathcal{H}_k$ и $\mathcal{H}_k^{\perp}$, $k \in V$, инвариантны относительно C. Определим операторы

$$\tilde{C}_k\colon \tilde{\mathcal{H}}_k \to \tilde{\mathcal{H}}_k, \quad k \in V,$$

формулой

$$\tilde{C}_k x = \rho_k^{-1}(C\rho(x)), \quad x \in \tilde{\mathcal{H}}_k, \tag{16}$$

тогда для любого $x \in \tilde{\mathcal{H}}_k$

$$C\rho(x) = \rho(\tilde{C}_k x). \tag{17}$$

Определим

$$C_k = \Gamma_k^* \tilde{C}_k \Gamma_k\colon\ \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0. \tag{18}$$

Утверждение 12. *Пусть оператор C коммутирует со всеми проекторами P_k, $k \in V$, а операторы C_k определены формулами* (16), (18)*. Тогда для любого пути $l = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$*

$$V_l C_{j_m} = C_{j_1} V_l.$$

Доказательство. Действительно, для любого пути l, любых $u, v \in \mathcal{H}_0$ имеем равенства

$$\langle B_l C_{j_m} u, v\rangle = \langle B_l \Gamma_{j_m}^* \tilde{C}_{j_m} \Gamma_{j_m} u, \Gamma_{j_1}^* \Gamma_{j_1} v\rangle =$$

$$= \langle P_l \rho(\tilde{C}_{j_m} \Gamma_{j_m} u), \rho(\Gamma_{j_1} v)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle P_l C \rho(\Gamma_{j_m} u), \rho(\Gamma_{j_1} v)\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \langle \rho(\Gamma_{j_1} C_{j_1} \Gamma_{j_1}^* \tilde{P}_l \Gamma_{j_m} u), \rho(\Gamma_{j_1} v)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle C_{j_1} \Gamma_{j_1}^* \tilde{P}_l \Gamma_{j_m} u, v\rangle =$$

$$= \langle \Gamma_{j_1}^* \tilde{P}_l \Gamma_{j_m} u, C_{j_1}^* v\rangle = \langle \rho(\tilde{P}_l \Gamma_{j_m} u), \rho(\Gamma_{j_1} C_{j_1}^* v)\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \langle P_l \rho(\Gamma_{j_m} u), \rho(\Gamma_{j_1} C_{j_1}^* v)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_l u, C_{j_1}^* v\rangle.$$

Таким образом, $B_l C_{j_m} = C_{j_1} B_l$, следовательно, $V_l C_{j_m} = C_{j_1} V_l$.

Утверждение доказано.

Пусть C_k — семейство операторов

$$C_k\colon\ \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0, \quad k \in V,$$

таких, что для любых $k, j \in V$, $k \neq j$, соединенных ребром γ_{kj}, выполнены равенства

$$C_k V_{kj} = V_{kj} C_j. \tag{19}$$

Поскольку любое $x \in \tilde{\mathcal{H}}$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k u_k, \quad u_k \in \mathcal{H}_0,$$

определим $C\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ равенством

$$C\rho(x) = \sum_{k=1}^{n} \rho(\Gamma_k C_k u_k), \quad u_k \in \mathcal{H}_0. \tag{20}$$

Утверждение 13. *Пусть $C_k\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$, $k \in V$, — семейство операторов, которые удовлетворяют равенству* (19), *а C — оператор, определенный равенством* (20). *Тогда C корректно определен и коммутирует с любым P_k, $k \in V$.*

Доказательство. Пусть $\rho(x) = 0$, тогда для любого

$$y = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j v_j, \quad v_j \in \mathcal{H}_0,$$

выполнены равенства

$$\big\langle C\rho(x), \rho(y)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big\langle \rho(\Gamma_k C_k u_k), \rho(\Gamma_j v_j)\big\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big\langle B_{jk} C_k u_k, v_j\big\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big\langle B_{jk} u_k, C_j^* v_j\big\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big\langle \rho(\Gamma_k u_k), \rho(\Gamma_j C_j^* v_j)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j=1}^{n} \big\langle \rho(x), \rho(\Gamma_j C_j^* v_j)\big\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Таким образом, оператор C корректно определен.

Если $x \in \tilde{\mathcal{H}}_k$, т. е. $x = \Gamma_k u_k$, то

$$C\rho(x) = \rho(\Gamma_k C_k u_k) = \rho(\Gamma_k C_k \Gamma_k^* \Gamma_k u_k) = \rho(\tilde{C}_k x),$$

где $\tilde{C}_k = \Gamma_k C_k \Gamma_k^*$.

Покажем, что для любого $j \in V$ равенство

$$\Big\langle (CP_j - P_j C)\rho(x), \rho(x)\Big\rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

выполнено для любого $x \in \tilde{\mathcal{H}}$. Действительно,

$$\big\langle P_j C\rho(\Gamma_k u_k), \rho(\Gamma_i u_i)\big\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \big\langle P_j \rho(\Gamma_k C_k u_k), \rho(\Gamma_i u_i)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle P_i P_j P_k \rho(\Gamma_k C_k u_k), \rho(\Gamma_i u_i)\big\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \big\langle B_{ij} B_{jk} C_k u_k, u_i\big\rangle = \langle C_i B_{ij} B_{jk} u_k, u_i\rangle,$$

$$\big\langle CP_j \rho(\Gamma_k u_k), \rho(\Gamma_i u_i)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle \rho(\Gamma_j C_j \Gamma_j^* \tilde{P}_j \Gamma_k u_k), \rho(\Gamma_i u_i)\big\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \left\langle B_{ij} C_j \Gamma_j^* \tilde{P}_j \Gamma_k u_k, u_i \right\rangle = \left\langle B_{ij} \Gamma_j^* \tilde{P}_j \Gamma_k u_k, C_i^* u_i \right\rangle =$$

$$= \left\langle P_i P_j \rho(\Gamma_k u_k), \rho(\Gamma_i C_i^* u_i) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_{ij} B_{jk} u_k, C_i^* u_i \rangle.$$

Таким образом, $\left\langle P_j C \rho(x), \rho(x) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle C P_j \rho(x), \rho(x) \right\rangle_{\mathcal{H}}$.

Утверждение доказано.

Пусть L_k — множество всех замкнутых путей с началом и концом в вершине k.

Лемма 2. *Представление $\pi_{\tau,\eta}$ алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ является неприводимым тогда и только тогда, когда множество унитарных операторов $\{V_l\}_{l \in L_1}$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть $\pi_{\tau,\eta}$ неприводимо. Возьмем произвольный $C_1 \colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0$ такой, что $C_1 V_l = V_l C_1$ для любого $l \in L_1$. Поскольку граф связный, для каждой вершины $k \in V$ существует некоторый путь $l_k = (1, \ldots, k)$. Зафиксируем его и положим

$$C_k = V_{l_k}^* C_1 V_{l_k}.$$

Покажем, что для любых $k, j \in V$, $k \neq j$, k и j соединены ребром, выполнено равенство (19). Так как j и k соединены ребром, путь $l' = l_k \cup (k,j) \cup l_j^* \in L_1$, следовательно,

$$V_{l_k} V_{kj} V_{l_j}^* C_1 = C_1 V_{l_k} V_{kj} V_{l_j}^*,$$

откуда получаем

$$V_{kj} C_j = V_{kj} V_{l_j}^* C_1 V_{l_j} = V_{l_k}^* C_1 V_{l_k} V_{kj} = C_k V_{kj}.$$

Таким образом, можно определить оператор C по формуле (20). Как мы показали, C коммутирует со всеми P_j, $j \in V$, следовательно, $C = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, I — единичный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда, очевидно, $C_k = \lambda I_0$, где I_0 — единичный оператор в $\mathcal{H}_0$. Следовательно, множество операторов $\{V_l\}_{l \in L_1}$ неприводимо.

Обратно, пусть множество операторов $\{V_l\}_{l \in L_1}$ неприводимо. Рассмотрим произвольный оператор C, коммутирующий со всеми P_j, $j \in V$, и построим C_k, $k \in V$, по формулам (16), (18). Тогда для операторов C_k выполнено равенство (19), откуда непосредственно следует, что для любого пути $l = (j_1, \ldots, j_m)$ выполнено $V_l C_{j_m} = C_{j_1} V_l$, и значит, для любого $l \in L_1$ оператор C_1 коммутирует с V_l. Итак, $C_1 = \lambda I_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, но тогда $C_k = V_{l_k} C_1 V_{l_k}^* = \lambda V_{l_k} V_{l_k}^* = \lambda I_0$, где $l_k = (k, \ldots, 1)$ — некоторый путь. Таким образом, $C = \lambda I$, и мы показали, что представление $\pi_{\tau,\eta}$ является неприводимым.

Лемма доказана.

Следствие 3. *Пусть Γ — дерево или унициклический граф. Тогда если $\pi_{\tau,\eta}$ неприводимо, то $\dim \mathcal{H}_0 = 1$.*

Доказательство. 1. Γ — дерево. Тогда для любого $l \in L_1$ найдется $k \in V$ такое, что $l = l_k^* \cup l_k$, следовательно, $V_l = V_{l_k}^* V_{l_k} = I$.

2. Γ — унициклический граф, тогда все отличные от единичного операторы среди V_l есть степени некоторого унитарного оператора или сопряженного к нему. Эта семья неприводима, только если $\dim \mathcal{H}_0 = 1$.

Следствие доказано.

5.4. Критерий унитарной эквивалентности представлений $\pi_{\tau,\eta}$.

Лемма 3. *Представления $\pi_{\tau,\eta}$ и $\pi_{\tau,\eta'}$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для всех $k \in V$ существуют унитарные операторы $U_k\colon \mathcal{H}'_0 \to \mathcal{H}_0$ такие, что*

$$V'_{jk} = U_j^* V_{jk} U_k. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $\pi_{\tau,\eta}$ и $\pi_{\tau,\eta'}$ унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарный оператор

$$U\colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$$

такой, что $P_k U = U P'_k$, $k \in V$. Очевидно, что $U(\mathcal{H}'_k) \subset \mathcal{H}_k$, следовательно, можно определить операторы $\tilde{U}_k\colon \tilde{\mathcal{H}}'_k \to \tilde{\mathcal{H}}_k$ формулой

$$\tilde{U}_k x = \rho_k^{-1}(U\rho'(x)), \qquad x \in \tilde{\mathcal{H}}'_k, \quad k \in V.$$

Тогда для любых $x, y \in \tilde{\mathcal{H}}'_k$

$$\left\langle \tilde{U}_k x, \tilde{U}_k y \right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_k} = \left\langle \rho_k^{-1}(U\rho'(x)), \rho_k^{-1}(U\rho'(y)) \right\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_k} =$$
$$= \left\langle U\rho'(x), U\rho'(y) \right\rangle_{\mathcal{H}_k} = \left\langle \rho'(x), \rho'(y) \right\rangle_{\mathcal{H}'_k} = \langle x, y \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}'_k}.$$

Таким образом, $\tilde{U}_k$ — унитарные операторы.

Далее, определим унитарные операторы из $\mathcal{H}'_0$ в $\mathcal{H}_0$ формулой

$$U_k = \Gamma_k^* \tilde{U}_k \Gamma'_k.$$

Тогда для любых $u, v \in \mathcal{H}'_0$

$$\langle B'_{jk} u, v \rangle_{\mathcal{H}'_0} = \left\langle P'_j P'_k \rho'(\Gamma'_k u), \rho'(\Gamma'_j v) \right\rangle_{\mathcal{H}'} = \left\langle U P'_k \rho'(\Gamma'_k u), U P'_j \rho'(\Gamma'_j v) \right\rangle_{\mathcal{H}} =$$
$$= \left\langle P_k U \rho'(\Gamma'_k u), P_j U \rho'(\Gamma'_j v) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle P_j P_k \rho(\tilde{U}_k \Gamma'_k u), \rho(\tilde{U}_j \Gamma'_j v) \right\rangle_{\mathcal{H}} =$$
$$= \left\langle P_j P_k \rho(\Gamma_k U_k u), \rho(\Gamma_j U_j v) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle B_{jk} U_k u, U_j v \rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle U_j^* B_{jk} U_k u, v \rangle_{\mathcal{H}'_0}.$$

Мы показали, что $B'_{jk} = U_j^* B_{jk} U_k$, следовательно, справедливы равенства (21).

Обратно, пусть существуют унитарные операторы $U_k\colon \mathcal{H}'_0 \to \mathcal{H}_0$, для которых выполнены равенства (21).

Определим $U\colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ равенством

$$U\rho'(x) = \sum_{k=1}^{n} \rho(\Gamma_k U_k u_k), \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \Gamma'_k u_k, \quad u_k \in \mathcal{H}'_0. \tag{22}$$

Очевидно, что если $x \in \tilde{\mathcal{H}}'_k$, т. е. $x = \Gamma'_k u_k$, то

$$U\rho'(x) = \rho(\Gamma_k U_k u_k) = \rho(\Gamma_k U_k {\Gamma'_k}^* \Gamma'_k u_k) = \rho(\tilde{U}_k x).$$

Для произвольных

$$x = \sum_{k=1}^{n} \Gamma'_k u_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{n} \Gamma'_k v_k, \quad v_k,\ u_k \in \mathcal{H}'_0,$$

справедливы равенства

$$\big\langle U\rho'(x), U\rho'(y)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle \rho(\Gamma_k U_k u_k), \rho(\Gamma_j U_j v_j)\big\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle B_{jk}U_k u_k, U_j v_j\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle B'_{jk} u_k, v_j\rangle_{\mathcal{H}'_0} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big\langle P'_k\rho'(\Gamma'_k u_k), P_j\rho'(\Gamma'_j v_j)\big\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle\rho'(x), \rho'(y)\rangle_{\mathcal{H}'}.$$

Таким образом, U — корректно определенный унитарный оператор.

Лемма доказана.

5.5. О всех неприводимых представлениях алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.

Лемма 4. *Для любого неприводимого представления*

$$\pi\colon\ TL_{\Gamma,\tau,\perp} \to \mathcal{B}(\hat{\mathcal{H}})$$

найдутся пространство $\mathcal{H}_0$ и функция $\eta\colon R \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ такая, что полуторалинейная форма B_η неотрицательно определена и представление $\pi_{\tau,\eta}$ унитарно эквивалентно представлению π.

Доказательство. Обозначим $\hat{P}_j = \pi(p_j)$, $\hat{\mathcal{H}}_j = \operatorname{Im}\hat{P}_j$. Для каждого пути $l = (j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}, j_m)$ в графе определим унитарный оператор из $\hat{\mathcal{H}}_{j_m}$ в $\hat{\mathcal{H}}_{j_1}$ формулой

$$U_l = U_{j_1 j_2}\ldots U_{j_{m-1}j_m}, \qquad U_{jk} = \frac{\hat{P}_j\hat{P}_k}{\tau_{jk}}\Big\lceil_{\hat{\mathcal{H}}_k}.$$

Положим $\mathcal{H}_0 = \hat{\mathcal{H}}_1$. Зафиксируем для каждой вершины k путь $l_k = (k, \ldots, 1)$ и положим

$$\eta(\gamma_{jk}) = U^*_{l_{j'}} U_{j'k'} U_{l_{k'}}\colon\ \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0,$$

где $j' = \min\{j,k\}$, $k' = \max\{j,k\}$. Заметим, что тогда выполнено равенство

$$V_{jk} = U^*_{l_j} U_{jk} U_{l_k}.$$

По функции η построим пространство $\tilde{\mathcal{H}}$ и полуторалинейную форму B_η. Покажем, что она неотрицательно определена.

Действительно, для произвольного $x \in \tilde{\mathcal{H}}$ и произвольной пары вершин $j,k \in V$ справедливы равенства

$$\langle B_{jk}\Gamma^*_k x, \Gamma^*_j x\rangle = \langle \Gamma^*_k x, \Gamma^*_j x\rangle = \langle U_{l_k}\Gamma^*_k x, U_{l_j}\Gamma^*_j x\rangle, \quad k = j,$$

$$\langle B_{jk}\Gamma^*_k x, \Gamma^*_j x\rangle = 0 = \langle U_{l_k}\Gamma^*_k x, U_{l_j}\Gamma^*_j x\rangle, \quad \gamma_{kj} \notin R,$$

$$\langle B_{jk}\Gamma^*_k x, \Gamma^*_j x\rangle = \tau_{kj}\langle V_{jk}\Gamma^*_k x, \Gamma^*_j x\rangle = \langle U_{l_k}\Gamma^*_k x, U_{l_j}\Gamma^*_j x\rangle, \quad \gamma_{kj} \in R,$$

следовательно,

$$B_\eta(x,x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle B_{jk}\Gamma^*_k x, \Gamma^*_j x\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle U_{l_k}\Gamma^*_k x, U_{l_j}\Gamma^*_j x\rangle \geqslant 0.$$

Таким образом, существует представление $\pi_{\tau,\eta}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\eta$.

Поскольку представление неприводимо, а множество векторов вида

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad x_k \in \hat{\mathcal{H}}_k, \tag{23}$$

замкнуто и инвариантно относительно представления, любое $x \in \hat{\mathcal{H}}$ можно представить в виде (23). Определим оператор $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ формулой

$$Ux = \sum_{k=1}^{n} \rho(\Gamma_k U_{l_k}^* x_k).$$

Тогда для любых $x, y \in \hat{\mathcal{H}}$ имеют место равенства

$$\langle Ux, Uy\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \big\langle \rho(\Gamma_k U_{l_k}^* x_k), \rho(\Gamma_j U_{l_j}^* y_j)\big\rangle_{\mathcal{H}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle B_{jk} U_{l_k}^* x_k, U_{l_j}^* y_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x_k, y_j\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = \langle x, y\rangle_{\hat{\mathcal{H}}},$$

так как $\langle B_{jk} U_{l_k}^* x_k, U_{l_j}^* y_j\rangle = \langle x_k, y_j\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}$. Последнее равенство очевидно, если $\gamma_{jk} \notin$ $\notin R$, так как в этом случае правая и левая части равенства равны 0. Оно также очевидно, если $k = j$. В случае, когда $\gamma_{jk} \in R$,

$$\langle B_{jk} U_{l_k}^* x_k, U_{l_j}^* y_j\rangle_{\mathcal{H}_0} = \tau_{jk}\langle V_{jk} U_{l_k}^* x_k, U_{l_j}^* y_j\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = \tau_{jk}\langle U_{jk} x_k, y_j\rangle_{\hat{\mathcal{H}}} = \langle x_k, y_j\rangle_{\hat{\mathcal{H}}}.$$

Итак, оператор U корректно определен и является унитарным оператором.

Лемма доказана.

5.6. О $*$-дикости алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ в случае, когда $\nu(\Gamma) \geqslant 2$ и $\tau(\gamma_{ij})$ достаточно малы.

Утверждение 14. *Положим $\delta = \dfrac{1}{2|R|}$. Тогда если $\tau_{kj} \leqslant \delta$ для всех ребер $\gamma_{kj} \in R$, то для любой функции η полуторалинейная форма B_η является неотрицательно определенной. Если же $\tau_{kj} < \delta$ для всех ребер $\gamma_{kj} \in R$, то полуторалинейная форма B_η положительно определена.*

Доказательство. Действительно, так как $\tau_{kj} \leqslant \delta$ и

$$|\langle V_{kj}\Gamma_j^* x, \Gamma_k^* x\rangle| \leqslant \|V_{kj}\|\|\Gamma_j^* x\|\|\Gamma_k^* x\| \leqslant \|x\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}},$$

то

$$\big|B(x,x) - \|x\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}\big| = \left|\sum_{\gamma_{kj}\in R} \tau_{kj}(\langle V_{jk}\Gamma_k^* x, \Gamma_j^* x\rangle + \langle V_{kj}\Gamma_j^* x, \Gamma_k^* x\rangle)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2|R|\delta\|x\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}} = \|x\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $0 \leqslant B(x,x) \leqslant 2\|x\|^2_{\tilde{\mathcal{H}}}$. В случае $\tau_{kj} < \delta$ получаем строгие неравенства.

Утверждение доказано.

Теорема 12. *Пусть Γ — связный граф, а $\nu = \nu(\Gamma) = |R| - |V| + 1$ — его циклический ранг. Тогда если $\tau_{kj} \leqslant \delta$, где $\delta = \dfrac{1}{2|R|}$, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех неприводимых унитарно неэквивалентных наборов из ν унитарных операторов и множеством всех неприводимых унитарно неэквивалентных представлений алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$.*

Доказательство. Поскольку $\tau_{kj} \leqslant \delta$, по предыдущему утверждению для любой функции η определено представление $\pi_{\tau,\eta}$.

Циклический ранг связного графа $\Gamma = (V; R)$ можно трактовать как максимальное число ребер, которые можно удалить из него так, чтоб получившийся граф $\Gamma' = (V; R')$ был все еще связным. Очевидно, что из графа Γ' нельзя удалить ни одного ребра с сохранением связности, т. е. Γ' — дерево. Зафиксируем такое дерево Γ'. Обозначим $R_0 = R \setminus R'$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$ и функции $\eta_0 \colon R \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ такие, что $\eta_0(R') = \{I_0\}$, где I_0 — единичный оператор в $\mathcal{H}_0$.

Представление π_{τ,η_0} неприводимо тогда и только тогда, когда набор унитарных операторов $\{\eta_0(\gamma_{ij})\}_{\gamma_{ij} \in R_0}$ является неприводимым. Действительно, так как для каждого ребра $\gamma_{ij} \in R_0$ существует путь $l \in L_1$ такой, что все его ребра, за исключением γ_{ij}, принадлежат R', выбирая направление пути l, можно добиться равенства $V_l = \eta_0(\gamma_{ij})$.

Покажем, что представления π_{τ,η_0} и $\pi_{\tau,\eta_0'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы унитарных операторов $\eta_0(R_0)$ и $\eta_0'(R_0)$ унитарно эквивалентны. По лемме 3 представления π_{τ,η_0} и $\pi_{\tau,\eta_0'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует набор унитарных операторов $U_k \colon \mathcal{H}_0' \to \mathcal{H}_0$, $k \in V$ такой, что

$$\eta_0'(\gamma_{ij}) = U_i^* \eta_0(\gamma_{ij}) U_j, \quad i < j. \tag{24}$$

Пусть представления π_{τ,η_0} и $\pi_{\tau,\eta_0'}$ эквивалентны, тогда для ребра $\gamma_{ij} \in R'$ из равенства (24) получаем равенство $I_0' = U_i^* I_0 U_j$. Следовательно, $U_i = U_j$, но так как Γ' — связный граф, то для любой пары вершин i и j выполнено равенство $U_i = U_j$. Положим $U = U_i$, $i \in V$. Тогда для ребра $\gamma_{ij} \in R_0$ равенство (24) примет

$$\eta_0'(\gamma_{ij}) = U^* \eta_0(\gamma_{ij}) U, \tag{25}$$

т. е. наборы операторов $\eta_0(R_0)$ и $\eta_0'(R_0)$ унитарно эквивалентны. Обратно, пусть такие наборы унитарно эквивалентны, т. е. существует унитарный оператор U такой, что равенство (25) выполнено для ребер $\gamma_{ij} \in R_0$. Тогда, положив $U_i = U$, $i \in V$, получим, что для всех ребер $\gamma_{ij} \in R$ выполнено равенство (24).

Покажем, что для любой функции η найдется η_0 такая, что представление $\pi_{\tau,\eta}$ унитарно эквивалентно представлению π_{τ,η_0}. Положим $\mathcal{H}_0' = \mathcal{H}_0$, $U_1 = I_0$. Без ограничения общности можно считать, что вершины упорядочены так, что для любого пути без возвратов $l = (i_0 = 1, i_1, \ldots, i_m)$ в дереве Γ' выполнены неравенства $1 = i_0 < i_1 < \ldots < i_m$. Тогда для каждой вершины j, за исключением вершины 1, существует единственная вершина i, соединенная с j, такая, что $i < j$. Определим U_j рекурсивно формулой

$$U_j = \eta(\gamma_{ij})^* U_i, \quad \gamma_{ij} \in R', \quad i < j,$$

и определим функцию η_0 равенством

$$\eta_0(\gamma_{ij}) = U_i^* \eta(\gamma_{ij}) U_j, \quad \gamma_{ij} \in R, \quad i < j.$$

Очевидно, что представления $\pi_{\tau,\eta}$ и π_{τ,η_0} унитарно эквивалентны, при этом $\eta_0(\gamma_{ij}) = I_0$, если $\gamma_{ij} \in R'$.

Теорема доказана.

Таким образом, в случае, когда τ_{ij} достаточно малы, задача описания с точностью до унитарной эквивалентности всех неприводимых представлений алгебры $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ эквивалентна задаче описания с точностью до унитарной эквивалентности всех неприводимых семейств, состоящих из $\nu(\Gamma)$ унитарных операторов. При $\nu(\Gamma) \geqslant 2$ такая задача является $*$-дикой.

Авторы искренне признательны М. А. Власенко, Р. В. Грушевому, Н. Д. Поповой, В. И. Рабановичу, С. В. Слободянюку, Л. Н. Тимошкевич, И. С. Фещенко за полезные советы и обсуждения результатов, приведенных в работе.

1. *Albeverio S., Ostrovskyi V., Samoilenko Y.* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**, № 2. – P. 567 – 582.
2. *Brenner S.* Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces // Ibid. – 1967. – **6**. – P. 100 – 114.
3. *Cvetković D. M., Doob M., Sachs H.* Spectra of graphs. Theory and applications. – Berlin: VEB Deutsch. Verlag Wiss., 1980 (рус. перевод: Киев: Наук. думка, 1984).
4. *Davis C.* Separation of two linear subspaces // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1958. – **19**. – P. 172 – 187.
5. *Dixmier J.* Position relative de deux variétés dans un espace de Hilbert // Rev. Sci. – 1948. – **86**. – P. 387 – 399.
6. *Dlab V., Ringel C.* Indecomposable representation of graphs and algebras // Mem. Amer. Math. Soc. – 1976. – **6**, № 173.
7. *Donovan P. W., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Math. Lect. Notes. – 1973. – **5**. – P. 1 – 119.
8. *Enomoto M., Watatani Y.* Relative position of four subspaces in a Hilbert space // Adv. Math. – 2006. – **201**. – P. 263 – 317.
9. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space // Hilbert Space Operators and Operator Algebras (Proc. Int. Conf., Tihany, 1970). – Amsterdam: North-Holland, 1972. – P. 163 – 237.
10. *Goodman F. M., Harpe P., Jones V. F. E.* Coxeter graphs and towers of algebras. – New York: Springer-Verlag, 1989.
11. *Graham J. J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras. – Ph.D. thesis, Univ. Sydney, 1995.
12. *Halmos P. R.* Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **144**. – P. 381–389.
13. *Ivanov S. V.* On $*$-representations of algebras given by graphs // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2007. – № 1. – P. 17 – 27.
14. *Jones V., Sunder V. S.* Introduction to subfactors // London Math. Soc. Lect. Note Ser., 234. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
15. *Jordan C.* Essaisur la géométrie à n dimensions // Bull. Soc. math. France. – 1875. – **3**. – P. 103 – 174.
16. *Kac V. G.* Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory // Invent. math. – 1980. – **56**. – P. 57 – 92.
17. *Kruglyak S. A., Samoĭlenko Yu. S.* On complexity of description of representations of $*$-algebras generated by indepotents // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – **128**, № 6. – P. 1655 – 1664.
18. *Ostrovskyĭ V. L., Samoĭlenko Yu. S.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators. – Amsterdam: Harwood Acad. Publ., 1999.
19. *Popova N. D.* On finite-dimensional representations of one algebra of Temperley – Lieb type // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 3. – P. 80 – 92.
20. *Popova N. D., Samoilenko Yu. S.* On the existence of configurations of subspaces in a Hilbert space with fixed angles // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Meth. Appl. – 2006. – **2**, № 055. – P. 1 – 5.
21. *Simson D.* Linear representations of partially ordered sets and vector space categories // Algebra, Logic, Appl. – 1992. – Vol. 4.
22. *Sunder V. S.* N subspaces // Can. J. Math. – 1988. – **40**. – P. 38 – 54.

23. *Temperley H. N. V., Lieb E. H.* Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // J. Proc. Roy. Soc. London Ser. A. – 1971. – **322**. – P. 251 – 280.
24. *Vlasenko M.* On the growth of an algebra generated by a system of projections with fixed angles // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2004. – **10**, № 1. – P. 98 – 104.
25. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Ч. 4 – 6. – М.: Мир, 1972.
26. *Власенко М. А., Попова Н. Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 606 – 615.
27. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 34 – 42.
28. *Завадский А. Г., Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества конечного роста // Там же. – 1982. – № 2. – С. 72 – 73.
29. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 32 – 41.
30. *Кругляк С., Рабанович В., Самойленко Ю.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
31. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Там же. – 2005. – **39**, № 2. – С. 13 – 30.
32. *Кругляк С. А., Самойленко Ю. С.* Об унитарной эквивалентности наборов самосопряженных операторов // Там же. – 1980. – **14**, № 1. – С. 60 – 62.
33. *Москалева Ю. П., Самойленко Ю. С.* Введение в спектральную теорию графов: Учеб. пособие. – Киев: Центр учебной лит., 2007.
34. *Назарова Л. А.* Представления четвериады // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**, № 6. – С. 1361 – 1378.
35. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Там же. – 1973. – **37**. – С. 752 – 791.
36. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 5 – 31.
37. *Самойленко Ю. С., Островський В. Л.* Про спектральні теореми для лінійно пов'язаних сімей самоспряжених операторів з заданими спектрами, асоційованих з розширеними графами Динкіна // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
38. *Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М.* Про спектральну теорію графів Кокстера // У світі математики. – 2009. – **15**, № 3. – С. 14 – 24.
39. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1990. – **57**. – С. 5 – 177.
40. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989.

Получено 09.10.09