УДК 517.9

Н. В. Харченко
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ

For conflict dynamical systems, we study the problem of the existence and the problem of the description of initial measures converging to measures that have prescribed spectral distributions.

Для динамических систем конфликта исследуется вопрос о существовании и задача об описании начальных мер, которые сходятся к мерам, имеющим наперед заданные спектральные распределения.

1. Вступ. У роботах [1, 2] введено поняття динамічної системи конфлікту в термінах імовірнісних мір:

$$\mu \overset{N-1}{\divideontimes} \nu = \mu^N, \qquad \nu \overset{N-1}{\divideontimes} \mu = \nu^N, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

де $\divideontimes$ позначає операцію конфліктної взаємодії, а граничні значення записуються у вигляді

$$\mu \overset{\infty}{\divideontimes} \nu = \mu^\infty, \qquad \nu \overset{\infty}{\divideontimes} \mu = \nu^\infty.$$

У згаданих роботах (див. також [3 – 5]) доведено існування граничних станів та досліджено пряму задачу — аналіз спектральної структури граничних розподілів. Зокрема, показано, що носії граничних імовірнісних мір μ^∞, ν^∞, як правило, мають фрактальну структуру, а міри є сингулярно неперервними.

У даній роботі будемо досліджувати обернену задачу. Нехай задано пару мір $\mu', \nu' \in \mathcal{M}_{\rm ss}$ (означення класу структурно подібних мір $\mathcal{M}_{\rm ss}$ див. у п. 2), що є граничною для деякої динамічної системи конфлікту (див. властивості у п. 4). Задача полягає в доведенні існування та описі такої пари ймовірнісних мір μ та ν, для яких граничною для динамічної системи конфлікту є наперед задана пара μ', ν'.

2. Структурно подібні міри. Розглянемо структурно подібну міру $\mu \in \mathcal{M}^{\rm ss}$, де ss — абревіатура від similar structure. Поняття структурно подібної міри було введено в роботі [6] (див. також [7]). Коротко нагадаємо означення структурно подібної міри на сегменті $\Delta_0 = [0, 1]$.

Нехай $G = \{G_{ik}\}_{i=1}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, $2 \le n < \infty$, позначає сім'ю стисків на прямій $\mathbb{R}^1$, що має наступні властивості. Для всіх k:

а) $0 < g \le g_{ik} < 1$, де g_{ik} позначає коефіцієнт стиску для G_{ik};

б) $\Delta_0 = \bigcup_{i=1}^n G_{ik}\Delta_0$;

в) $\lambda(G_{ik}\Delta_0 \bigcap G_{i'k}\Delta_0) = 0$, $i \ne i'$, де λ — міра Лебега.

Позначимо

$$U_{i_1\ldots i_k, i'_1\ldots i'_k} := G_{i_1 1}\ldots G_{i_k k}(G_{i'_1 1}\ldots G_{i'_k k})^{-1}, \quad 1 \le i_k, \quad i'_k \le n.$$

Говоримо, що множина $S \subseteq \Delta_0$ є структурно подібною, якщо для фіксованої сім'ї стисків G з зазначеними вище властивостями множина S припускає нескінченну послідовність зображень

$$S = \bigcup_{i_1=1}^n s_{i_1}, \quad s_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^n s_{i_1 i_2}, \quad \ldots, \qquad s_{i_1\ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^n s_{i_1 i_2\ldots i_k}, \ldots, \tag{1}$$

де для кожного фіксованого $k = 1, 2, \ldots$ всі непорожні підмножини $s_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ є подібними між собою:

$$s_{i_1 \ldots i_k} = U_{i_1 \ldots i_k, i'_1 \ldots i'_k} s_{i'_1 \ldots i'_k}. \tag{2}$$

Зауважимо, що на відміну від поняття самоподібної множини (див. [9, 10]) підмножини $s_{i_1}, s_{i_1 i_2}, \ldots, s_{i_1 \ldots i_k}, \ldots,$ взагалі кажучи, не є подібними. Зокрема, у загальному випадку вони не є подібними до всієї множини S.

Імовірнісну міру μ на Δ_0 називаємо структурно подібною, якщо її носій $\operatorname{supp} \mu = S_\mu = S$ є структурно подібною множиною і, крім того,

$$\mu(s_{i_1 \ldots i_k} \cap s_{i'_1 \ldots i'_k}) = 0, \tag{3}$$

якщо $i_l \neq i'_l$ принаймні для одного $1 \leq l \leq k$ та визначені для непорожніх множин відношення

$$\frac{\mu(s_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k})}{\mu(s_{i_1 \ldots i_{k-1}})} =: p_{i_k k} > 0 \quad (s_{i_0} \equiv \Delta_0), \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

є незалежними від індексів $i_1, \ldots, i_{k-1}$. Покладаємо $p_{i_k k} = 0$ для порожніх підмножин $s_{i_1 \ldots i_k}$. Множину всіх структурно подібних мір позначаємо через $\mathcal{M}^{\text{ss}}$.

Таким чином, для фіксованої сім'ї стисків G з властивостями а) – в) кожна структурно подібна міра μ асоційована з стохастичною матрицею

$$P \equiv \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty} = \{p_{ik}\}_{i=1,\, k=1}^{n,\, \infty}, \tag{5}$$

ненульові елементи якої задано формулами (4).

Далі сім'ю стисків G вважаємо фіксованою. Для мір з класу $\mathcal{M}^{\text{ss}}$ пишемо $\mu \in \mathcal{M}_{\text{pp}}, \mathcal{M}_{\text{ac}}, \mathcal{M}_{\text{sc}}$ (позначенням ss нехтуємо), якщо міра μ є чисто точковою ($\mu = \mu_{\text{pp}}$), чисто абсолютно неперервною ($\mu = \mu_{\text{ac}}$), або чисто сингулярно неперервною ($\mu = \mu_{\text{sc}}$) відповідно. Позначимо

$$P_{\max}(\mu) := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\}, \qquad \rho(\mu, G) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_{ik} g_{ik}} \right),$$

де g_{ik} — коефіцієнт стиску перетворення G_{ik} з фіксованої сім'ї стисків G.

Теорема 1 [8]**.** *Кожна міра $\mu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ має чистий спектральний тип*:

а) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$, *тоді і тільки тоді* $P_{\max}(\mu) > 0$,

б) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ac}}$, *тоді і тільки тоді* $\rho(\mu, G) > 0$,

в) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{sc}}$, *тоді і тільки тоді* $P_{\max}(\mu) = 0$ *та* $\rho(\mu, G) = 0$.

3. Динамічна система конфлікту. Розглянемо довільну пару структурно подібних мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$. Визначимо конструктивно послідовність пар мір μ^N, ν^N, $N = 1, 2, \ldots$, що формують динамічну систему конфлікту

$$\{\mu^{N-1}, \nu^{N-1}\} \xrightarrow{*} \{\mu^N, \nu^N\}, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

де відображення $\xrightarrow{*}$ (композиція конфлікту) позначає перетворення у просторі $\mathcal{M}^{\text{ss}} \times \mathcal{M}^{\text{ss}}$ пар структурно подібних мір. Тому всі міри μ^N, ν^N є структурно подібними. Вони будуються ітеративно, виходячи з пари початкових мір $\mu = \mu^0$, $\nu = \nu^0$, які пов'язані із стохастичними матрицями $P \equiv P^0$ та $R \equiv R^0$ вигляду (5).

Елементи матриць P^N та R^N, з якими взаємно однозначно пов'язані міри μ^N, ν^N, визначаються композицією $\circledast$ згідно з формулами

$$p_{ik}^N = \frac{p_{ik}^{N-1}(1 - r_{ik}^{N-1})}{1 - (\mathbf{p}_k^{N-1}, \mathbf{r}_k^{N-1})}, \qquad r_{ik}^N = \frac{r_{ik}^{N-1}(1 - p_{ik}^{N-1})}{1 - (\mathbf{p}_k^{N-1}, \mathbf{r}_k^{N-1})}, \tag{7}$$

де $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}_k^0 \equiv \mathbf{p}_k$, $\mathbf{r}_k^0 \equiv \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$, $p_{ik}^0 \equiv p_{ik}$, $r_{ik}^0 \equiv r_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Зрозуміло, що для коректності формул (7) необхідно припускати, що

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Неважко перевірити, що за умови (8) $(\mathbf{p}_k^N, \mathbf{r}_k^N) \neq 1$ для всіх $N = 1, 2, \ldots$ та $k = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2 [1, 4]. *Для довільної пари стохастичних матриць P, R вигляду* (5), *які задовольняють умову* (8), *для визначених в* (7) *послідовностей існують границі при $N \to \infty$:*

$$p_{ik}^\infty = \lim_{N \to \infty} p_{ik}^N, \qquad r_{ik}^\infty = \lim_{N \to \infty} r_{ik}^N, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

При цьому граничні вектори $\mathbf{p}_k^\infty$, $\mathbf{r}_k^\infty$ з координатами p_{ik}^∞, r_{ik}^∞ з необхідністю ортогональні, $\mathbf{p}_k^\infty \perp \mathbf{r}_k^\infty$, якщо $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k$, а якщо $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$, то $\mathbf{p}_k^\infty = \mathbf{r}_k^\infty$ і, більш того, всі ненульові координати цих векторів рівні між собою.

З теореми 2, яка по суті є теоремою існування, випливає існування граничних стохастичних матриць

$$P^\infty = \lim_{N \to \infty} P^N, \qquad R^\infty = \lim_{N \to \infty} R^N,$$

з якими однозначно пов'язані структурно подібні міри μ^∞, $\nu^\infty \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$. Як наслідок, це означає, що кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (6) збігається до нерухомої точки.

Наступна теорема (див. [3]) описує структуру мір μ^∞ і ν^∞, тобто дає формули для граничних значень координат p_{ik}^∞, r_{ik}^∞.

Введемо деякі позначення:

$$d_{ik} = p_{ik} - r_{ik}, \qquad \mathbf{N}_{+,k} := \{i \colon d_{ik} > 0\},$$

$$\mathbf{N}_{-,k} := \{i \colon d_{ik} < 0\}, \qquad \mathbf{N}_{0,k} := \{i \colon d_{ik} = 0\}$$

та

$$D_k := \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} d_{ik} = - \sum_{i \in \mathbf{N}_{-,k}} d_{ik}.$$

Теорема 3 [3]. *Якщо $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k$, то*

$$p_{ik}^\infty = \begin{cases} d_{ik}/D_k, & i \in \mathbf{N}_{+,k}, \\ 0, & i \in \mathbf{N}_{-,k} \bigcup \mathbf{N}_{0,k}, \end{cases} \tag{10}$$

$$r_{ik}^\infty = \begin{cases} -d_{ik}/D_k, & i \in \mathbf{N}_{-,k}, \\ 0, & i \in \mathbf{N}_{+,k} \bigcup \mathbf{N}_{0,k}. \end{cases} \tag{11}$$

Якщо $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$, *то*

$$p_{ik}^{\infty} = r_{ik}^{\infty} = 1/m_k, \qquad (12)$$

де $m_k = \#\{i\colon p_{ik} = r_{ik} \neq 0\}$ — *кількість ненульових координат векторів* $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{r}_k$.

Використовуючи теореми 2, 3 та формули (7), за допомогою яких визначається перетворення конфлікту, легко встановити справедливість наступних тверджень.

Твердження 1. *Пара стохастичних векторів* $\mathbf{p}'_k$, $\mathbf{r}'_k$ *є парою граничних векторів деякої траєкторії динамічної системи конфлікту* (*тобто* $\mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k^{\infty}$, $\mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k^{\infty}$), *якщо виконується одна з умов*: *або* $\mathbf{p}'_k \perp \mathbf{r}'_k$, *або* $\mathbf{p}'_k = \mathbf{r}'_k$ *і при цьому в останньому випадку всі ненульові координати векторів є рівними між собою.*

Твердження 2. *Стохастичний вектор* $\mathbf{p}'_k$ *є граничним вектором деякої траєкторії динамічної системи конфлікту тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з наступних умов*: *усі його координати є рівними між собою, або він має принаймні одну координату, що дорівнює нулю.*

Твердження 3. *Якщо граничний вектор* $\mathbf{p}_k^{\infty}$ *деякої траєкторії динамічної системи конфлікту має всі координати вигляду* $1/n$, *то початкові вектори* $\mathbf{r}_k$ *і* $\mathbf{p}_k$, *тобто такі, що* $\mathbf{p}_k \overset{\infty}{\ast} \mathbf{r}_k = \mathbf{p}_k^{\infty}$, *з необхідністю є рівними.*

Твердження 4. *Якщо вектор* $\mathbf{p}_k$ *має нульову координату* $p_{ik} = 0$, *а* $\mathbf{r}_k$ — *будь-який стохастичний вектор такий, що* $(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1$, *то вектор* $\mathbf{p}_k^{\infty} = \mathbf{p}_k \overset{\infty}{\ast} \mathbf{r}_k$ *також має нульову* i*-ту координату:* $p_{ik}^{(\infty)} = 0$.

4. Обернена задача для пари структурно подібних мір. У роботах [1 – 5] введено поняття динамічної системи конфлікту в термінах імовірнісних мір, доведено існування граничних станів та розв'язано пряму задачу, яка полягає в дослідженні спектральної структури граничних розподілів.

У даній роботі досліджується обернена задача, яка полягає в доведенні існування та описі всіх пар імовірнісних структурно подібних мір μ та ν, для яких граничною для динамічної системи конфлікту є наперед задана пара $\mu', \nu' \in \mathcal{M}_{\mathrm{ss}}$.

Зауважимо, що кожна ймовірнісна структурно подібна міра асоційована зі стохастичною матрицею. Пара ймовірнісних мір $\mu', \nu' \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, асоційованих з матрицями $P' = \{\mathbf{p}'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $R' = \{\mathbf{r}'_k\}_{k=1}^{\infty}$, буде граничною тоді і тільки тоді, коли кожна пара вектор-стовпчиків $\mathbf{p}'_k$, $\mathbf{r}'_k$ є парою граничних векторів динамічної системи конфлікту, які описані у твердженні 1.

Розглянемо спочатку частинний випадок оберненої задачі. Нехай задано ймовірнісні міри μ та μ', для яких елементи відповідних матриць $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $P' = \{\mathbf{p}'_k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняють умову

$$p_{jk} = 0 \Rightarrow p'_{jk} = 0 \quad \forall j \in [1, n], \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (13)$$

тобто якщо для деяких $j \in [1, n]$, $k \in \mathbb{N}$ $p_{jk} = 0$, то виконується рівність $p'_{jk} = 0$.

Задача полягає в описі всіх імовірнісних мір ν таких, що $\mu \overset{\infty}{\ast} \nu = \mu' \equiv \mu^{\infty}$.

Зафіксувавши k, далі можемо розглядати поставлену задачу в термінах стохастичних векторів. А саме, нехай задано стохастичний вектор $\mathbf{p}_k$ та вектор $\mathbf{p}'_k$, координати якого задовольняють умову (13). Задача полягає в описі всіх стохастичних векторів $\mathbf{r}_k$ таких, що $\mathbf{p}_k \overset{\infty}{\ast} \mathbf{r}_k = \mathbf{p}'_k \equiv \mathbf{p}_k^{\infty}$.

Досить легко отримати розв'язок даної задачі для стохастичних векторів з простору $\mathbb{R}_+^n$, $n = 2$. Дійсно, у просторі $\mathbb{R}_+^2$ існують лише три інваріантні стани динамічної системи конфлікту:

1) $\mathbf{p}_k^\infty = (0,1)$, $\mathbf{r}_k^\infty = (1,0)$,
2) $\mathbf{p}_k^\infty = (1,0)$, $\mathbf{r}_k^\infty = (0,1)$,
3) $\mathbf{p}_k^\infty = \mathbf{r}_k^\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Легко переконатися, що до першої пари збігаються всі пари стохастичних векторів, для яких виконується наступне: $p_{1k} < r_{1k}$, $p_{2k} > r_{2k}$. Аналогічно, до другої пари збігаються всі пари стохастичних векторів таких, що $p_{1k} > r_{1k}$, $p_{2k} < r_{2k}$. А до третьої пари збігаються всі пари рівних між собою векторів: $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$ (за винятком пар, для яких $(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) = 1$). Отже, кожна з інваріантних точок (1)–(3) є граничною для нескінченної кількості різних траєкторій.

Далі будемо розглядати простір $\mathbb{R}_+^n$ з $n \geq 3$.

З теореми 2 випливає, що множини $\mathbf{N}_{+,k}$, $\mathbf{N}_{-,k}$, $\mathbf{N}_{0,k}$ можна означити еквівалентним чином:

$$\begin{gathered}\mathbf{N}_{+,k} := \{i \colon d_{ik} > 0\} = \{i \colon p_{ik}^{(\infty)} \neq 0\},\\ \mathbf{N}_{-,k} := \{i \colon d_{ik} < 0\} = \{i \colon r_{ik}^{(\infty)} \neq 0\},\\ \mathbf{N}_{0,k} := \{i \colon d_{ik} = 0\} = \{i \colon p_{ik}^{(\infty)} = r_{ik}^{(\infty)}\},\end{gathered} \tag{14}$$

де $d_{ik} = p_{ik} - r_{ik}$.

Теорема 4. *Нехай задано стохастичні вектори* $\mathbf{p}_k, \mathbf{p}'_k \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, *до того ж вектор* $\mathbf{p}'$ *є граничним вектором деякої траєкторії динамічної системи конфлікту та для всіх координат векторів* $\mathbf{p}$ *і* $\mathbf{p}'$ *виконується умова* (13). *Тоді існує стохастичний вектор* $\mathbf{r}_k$ *такий, що* $\mathbf{p}_k \overset{\infty}{\divideontimes} \mathbf{r}_k = \mathbf{p}'_k \equiv \mathbf{p}_k^\infty$, *і множина усіх таких векторів описується покоординатно таким чином*:

$$r_{ik} = p_{ik} - p'_{ik} D_k, \quad i \in \mathbf{N}_{+,k}, \tag{15}$$

$$p_{jk} \leq r_{jk} \leq 1, \quad j \notin \mathbf{N}_{+,k},$$

де параметр D_k *змінюється у межах*

$$0 < D_k \leq c_k \quad \left(c_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} \left\{\frac{p_{ik}}{p'_{ik}}\right\}\right), \tag{16}$$

а множину $\mathbf{N}_{+,k}$ *визначено в* (14).

Зокрема, якщо $\mathbf{N}_{+,k} = \varnothing$, *то вектор* $\mathbf{r}_k = \mathbf{p}_k$.

Доведення. Нехай вектор $\mathbf{p}'_k$ містить нульові координати. Позначимо через s_k кількість ненульових координат вектора $\mathbf{p}'_k$. Очевидно, $s_k < n$.

Розглянемо випадок, коли ненульові координати вектора $\mathbf{p}'_k$ не є рівномірно розподіленими. Тоді множина $\mathbf{N}_{+,k}$ має вигляд $\mathbf{N}_{+,k} = \{i_1, i_2, \ldots, i_{s_k}\}$. Для визначення координат шуканого вектора $\mathbf{r}_k$ скористаємося формулою (7) з $\mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k^\infty$. Отримаємо систему s_k рівнянь відносно величин $d_{i_1 k}, d_{i_2 k}, \ldots, d_{i_{s_k} k}$:

$$\begin{aligned} &d_{i_1 k} = p'_{i_1 k} \cdot D_k,\\ &d_{i_2 k} = p'_{i_2 k} \cdot D_k,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &d_{i_{s_k} k} = p'_{i_{s_k} k} \cdot D_k,\end{aligned} \tag{17}$$

де $D_k = \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} d_{ik}$. В системі (17) не всі рівняння є незалежними. Дійсно, додавши, наприклад, до першого рівняння інші $s_k - 1$ рівняння, отримаємо лінійну залежність невідомих $d_{i_1 k}, d_{i_2 k}, \ldots, d_{i_{s_k} k}$:

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} d_{ik} = D_k \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} p'_{ik}.$$

Враховуючи, що $\sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} d_{ik} = D_k$, а також $\sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} p'_{ik} = 1$ (оскільки вектор $\mathbf{p}'_k$ є стохастичним), робимо висновок, що система (17) має одну незалежну змінну.

За незалежну змінну можна вибрати величину $d_{i_1 k}$. Але оскільки

$$d_{i_1 k} = p'_{i_1 k} \cdot D_k,$$

то далі будемо вважати, що незалежною змінною є D_k.

Тепер розв'язок системи (17) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & d_{i_t k} = p'_{i_t k} \cdot D_k, \quad i_t \in \mathbf{N}_{+,k}, \\ & D_k \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{18}$$

де межі зміни параметра D_k треба дослідити.

Перепишемо (18) з використанням координат вектора $\mathbf{r}_k$:

$$\begin{aligned} & r_{i_t k} = p_{i_t k} - p'_{i_t k} \cdot D_k, \quad i_t \in \mathbf{N}_{+,k}, \\ & D_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

За теоремою 3 та внаслідок стохастичності вектора $\mathbf{r}_k$ для всіх $i \in \mathbf{N}_{+,k}$ повинна виконуватись умова $0 \le r_{ik} < p_{ik}$. Вона, очевидно, є еквівалентною умові $p_{ik} \ge$ $\ge d_{ik} > 0$. Звідси одержуємо

$$0 < \frac{d_{ik}}{p'_{ik}} \le \frac{p_{ik}}{p'_{ik}}, \tag{19}$$

де враховано те, що $p'_{ik} > 0$ для усіх $i \in \mathbf{N}_{+,k}$.

Згідно з (18) для параметра D_k виконується система рівностей $D_k = \dfrac{d_{ik}}{p'_{ik}}$, $i \in$ $\in \mathbf{N}_{+,k}$. Оскільки разом з цим повинні виконуватись умови (19), то незалежна змінна D_k має задовольняти всі нерівності:

$$0 < D_k \le \frac{p_{ik}}{p'_{ik}}, \quad i \in \mathbf{N}_{+,k}.$$

Це означає, що параметр D_k, як незалежна змінна в системі рівнянь (17), повинен задовольняти умови

$$D_k \in (0, c_k],$$

де

$$c_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} \left\{ \frac{p_{ik}}{p'_{ik}} \right\}.$$

Отже, доведено, що координати $r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{s_k k}$ вектора $\mathbf{r}_k$ мають вигляд (15).

Іншими $n - s_k$ координатами вектора $\mathbf{r}_k$ є будь-які невід'ємні числа, але такі, що $r_{jk} \geq p_{jk}$, $j \notin \mathbf{N}_{+,k}$, і при цьому повинна виконуватись умова стохастичності вектора $\mathbf{r}_k$: $\sum_{i=1}^{n} r_{ik} = 1$.

Неважко переконатись, що значення r_{jk}, $j \notin \mathbf{N}_{+,k}$, які задовольняють нерівності $r_{jk} \geq p_{jk}$, $j \notin \mathbf{N}_{+,k}$, завжди існують. Дійсно, оскільки згідно з (15) для r_{ik}, $i \in \mathbf{N}_{+,k}$, виконується рівність

$$\sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} r_{ik} = \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} p_{ik} - D_k \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} p'_{ik},$$

то внаслідок стохастичності маємо

$$\sum_{j \notin \mathbf{N}_{+,k}} r_{jk} = \sum_{j \notin \mathbf{N}_{+,k}} p_{jk} + D_k \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} p'_{ik}.$$

Отже,

$$\sum_{j \notin \mathbf{N}_{+,k}} r_{jk} > \sum_{j \notin \mathbf{N}_{+,k}} p_{jk},$$

оскільки $D_k > 0$. Тому будь-які значення $r_{jk} \geq p_{jk}$, $j \notin \mathbf{N}_{+,k}$, при умові $\sum_{i=1}^{n} r_{ik} = 1$ можна вибрати в якості координат вектора $\mathbf{r}_k$.

Розглянемо випадок, коли всі ненульові координати вектора $\mathbf{p}'_k$ є рівними між собою.

Припустимо, що існує такий індекс i, що координата $p'_{ik} = 0$, а $p_{ik} \neq 0$. Тоді за теоремою 3 вектор $\mathbf{r}_k$ є таким, що $r_{ik} > p_{ik}$, тобто початкові вектори є різними. Тобто можемо скористатись формулами (10), (11), а отже, доведення теореми є аналогічним випадку, коли координати вектора $\mathbf{p}'_k$ не є рівними між собою.

Тепер припустимо, що для всіх індексів i таких, що $p'_{ik} = 0$, відповідні координати вектора $\mathbf{p}_k$ також дорівнюють нулю, $p_{ik} = 0$. Тобто кількість ненульових координат вектора $\mathbf{p}_k$ та вектора $\mathbf{p}'_k$ є однаковою. Позначимо кількість ненульових координат векторів через m_k. За теоремою 3 координати граничного вектора $\mathbf{p}'_k$ мають вигляд $p'_{ik} = 1/m_k$, де m_k — кількість ненульових координат початкового вектора $\mathbf{p}_k$, лише у випадку, коли початкові вектори рівні, тобто $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$. Оскільки у випадку, що розглядається, множина $\mathbf{N}_{+,k} = \varnothing$, то вирази (15), що описують координати вектора $\mathbf{r}_k$, можна переписати у вигляді нерівності

$$p_{jk} \leq r_{jk} \leq 1, \quad j \notin \mathbf{N}_{+,k}.$$

Дійсно, оскільки $\mathbf{N}_{+,k} = \mathbf{N}_{-,k} = \varnothing$, внаслідок стохастичності вектора $\mathbf{p}_k$ отримаємо

$$p_{jk} = r_{jk} \leq 1, \quad j \in \mathbf{N}_{0,k}.$$

Теорему доведено.

Приклад. Нехай $\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^3$. Не втрачаючи загальності можемо вважати, що для $\mathbf{p}_k^{\infty}$ можливі лише два випадки:

1) $\mathbf{p}_k^{\infty} = (1, 0, 0)$;

2) $\mathbf{p}_k^{\infty} = (a, b, 0)$, $a, b \neq 0$, $a + b = 1$.

Очевидно, що для першого випадку в теоремі 4 коефіцієнт $c_k = p_{1k}$. Тоді вектор $\mathbf{r}_k$, який є розв'язком оберненої задачі, матиме координати, що задовольняють умови

$$r_{1k} = p_{1k} - D_k,$$

$$p_{2k} \le r_{2k} \le 1,$$

$$p_{3k} \le r_{3k} \le 1.$$

де параметр D_k змінюється у межах $0 < D_k \le p_{1k}$.

Розглянемо другий випадок. Тут коефіцієнт $c_k = \min\limits_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} \left\{ \frac{p_{1k}}{a}, \frac{p_{2k}}{b} \right\}$, а параметр D_k змінюється у межах $0 < D_k \le c_k$. Тоді координати вектора $\mathbf{r}_k$ будуть визначатися таким чином:

$$r_{1k} = p_{1k} - a \cdot D_k,$$

$$r_{2k} = p_{2k} - b \cdot D_k,$$

$$p_{3k} \le r_{3k} \le 1.$$

Отже, якщо задано вектори $\mathbf{p}_k$ та $\mathbf{p}_k^\infty$ так, що для вектора $\mathbf{p}_k^\infty$ виконується умова (13) для всіх $j \in [1, 2, \ldots, n]$, то теорема 4 описує всі вектори $\mathbf{r}_k$ такі, що $\mathbf{p}_k \overset{\infty}{\divideontimes} \mathbf{r}_k = \mathbf{p}_k^\infty$.

Тепер розглянемо обернену задачу в повному обсязі. Нехай задано пару ймовірнісних мір $\mu', \nu' \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$, що є граничною для деякої динамічної системи конфлікту, тобто вектор-стовпчики асоційованих з ними матриць P' та R' задовольняють умови твердження 1. Зафіксуємо ймовірнісну міру $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{ss}}$ таку, що асоційована з нею стохастична матриця P складається з вектор-стовпчиків $\mathbf{p}_k$, що задовольняє умову (13). Тоді обернена задача зводиться до відшукання всіх таких імовірнісних мір ν, що $\mu \overset{\infty}{\divideontimes} \nu = \mu' \equiv \mu^\infty$ та $\nu \overset{\infty}{\divideontimes} \mu = \nu' \equiv \nu^\infty$, з перебором всіх вказаних вище мір μ.

Зафіксуємо k і розглянемо дану задачу в термінах стохастичних векторів. Нехай задано пару векторів $\mathbf{p}'_k, \mathbf{r}'_k \in \mathbb{R}^n$, що є граничними для деякої динамічної системи конфлікту (див. твердження 1). Якщо зафіксувати стохастичний вектор $\mathbf{p}_k$, що задовольняє умову (13), то вектор $\mathbf{p}'_k$ буде для нього граничним. А тому обернена задача зводиться до відшукання векторів $\mathbf{r}_k$ таких, що $\mathbf{p}_k \overset{\infty}{\divideontimes} \mathbf{r}_k = \mathbf{p}'_k \equiv \mathbf{p}_k^\infty$ та $\mathbf{r}_k \overset{\infty}{\divideontimes} \mathbf{p}_k = \mathbf{r}'_k \equiv \mathbf{r}_k^\infty$, з перебором всіх вказаних вище $\mathbf{p_k}$.

Очевидно, якщо граничні вектори $\mathbf{p}'_k, \mathbf{r}'_k$ рівні, то всі їхні ненульові координати є рівними між собою. Якщо для векторів $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{p}'_k$ виконується умова (13), то за теоремою 1 пара $\mathbf{p}'_k, \mathbf{r}'_k$ є граничною для всіх пар векторів $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{r}_k$, де $\mathbf{r}_k = \mathbf{p}_k$. Отже, далі будемо вважати, що $\mathbf{p}'_k \ne \mathbf{r}'_k$.

Теорема 5. *Нехай задано вектори* $\mathbf{p}_k, \mathbf{p}'_k, \mathbf{r}'_k \in \mathbf{R}^n$, $n \ge 2$, *де* $\mathbf{p}'_k, \mathbf{r}'_k$ — *пара граничних векторів деякої траєкторії динамічної системи конфлікту. Припустимо, що для всіх координат вектора* $\mathbf{p}'_k$ *виконується умова* (13). *Тоді існує стохастичний вектор* $\mathbf{r}_k$ *такий, що*

$$\mathbf{p}_k \overset{\infty}{\divideontimes} \mathbf{r}_k = \mathbf{p}'_k \equiv \mathbf{p}_k^\infty,$$

$$\mathbf{r}_k \overset{\infty}{\divideontimes} \mathbf{p}_k = \mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}_k^\infty.$$

При цьому, якщо $\mathbf{p}'_k \perp \mathbf{r}'_k$, *координати вектора* $\mathbf{r}'_k$ *описуються таким чином*:

$$r_{ik} = p_{ik} - p'_{ik} D_k, \quad i \in \mathbf{N}_{+,k},$$

$$r_{jk} = p_{jk} + r'_{jk} D_k, \quad j \in \mathbf{N}_{-,k},$$

$$r_{lk} = p_{lk}, \quad l \in \mathbf{N}_{0,k},$$

де параметр D_k змінюється у межах

$$0 < D_k \le c'_k, \qquad c'_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}, j \in \mathbf{N}_{-,k}} \left\{ \frac{p_{ik}}{p'_{ik}}, \frac{1 - p_{jk}}{r'_{jk}} \right\}.$$

Якщо $\mathbf{p}'_k = \mathbf{r}'_k$, то $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$.

Доведення. З теореми 4 (див. також твердження 4) випливає, що

$$\mathbf{N}_{0,k} = \{i \colon p'_{ik} = r'_{ik} = 0\},$$

$$\mathbf{N}_{-,k} = \{i \colon d_{ik} < 0\} = \{i \colon p'_{ik} = 0, r'_{ik} \ne 0\}.$$

Згідно з теоремою 4, координати r_{ik}, $i \in \mathbf{N}_{+,k}$, вектора $\mathbf{r}_k$ визначаються рівністю (15):

$$r_{ik} = p_{ik} - p'_{ik} D_k, \quad i \in \mathbf{N}_{+,k},$$

де параметр D_k змінюється у межах $0 < D_k \le c_k$ $\left(c_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} \left\{ \frac{p_{ik}}{p'_{ik}} \right\} \right)$.

Для зручності позначимо $\mathbf{N}_{+,k} = \{i_1, i_2, \ldots, i_{s_k}\}$, $\mathbf{N}_{-,k} = \{j_1, j_2, \ldots, j_{t_k}\}$.

Для координат $j \in \mathbf{N}_{-,k}$, використовуючи формули (10), (11), записуємо

$$d_{j_1 k} = -r'_{j_1 k} D_k,$$

$$d_{j_2 k} = -r'_{j_2 k} D_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_{j_t k} = -r'_{j_t k} D_k,$$

де $D_k = -\sum_{j \in ,k} d_{jk}$.

Як і при доведенні теореми 4, отримуємо розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} & D_k \in \mathbf{R}, \\ & r_{j_1 k} = p_{j_1 k} + r'_{j_1 k} D_k, \\ & r_{j_2 k} = p_{j_2 k} + r'_{j_2 k} D_k, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & r_{j_t k} = p_{j_t k} + r'_{j_t k} D_k. \end{aligned} \tag{20}$$

За теоремою 3 та внаслідок стохастичності вектора $\mathbf{r}_k$ для всіх $j \in \mathbf{N}_{-,k}$ повинна виконуватись умова $p_{jk} < r_{jk} \le 1$, тобто $p_{jk} < p_{jk} + r'_{jk} D_k \le 1$, звідки, враховуючи, що $r'_{jk} > 0$, знаходимо

$$0 < D_k \le \frac{1 - p_{jk}}{r'_{jk}}. \tag{21}$$

Оскільки умови (21) повинні виконуватись для всіх $j \in \mathbf{N}_{-,k}$, то незалежна змінна D_k повинна задовольняти нерівності

$$0 < D_k \leq c''_k, \quad c''_k = \min_{j \in \mathbf{N}_{-,k}} \left\{ \frac{1 - p_{jk}}{r'_{jk}} \right\}.$$

Зауважимо, що тут $D_k = -\sum_{j \in \mathbf{N}_{-,k}} d_{jk} = \sum_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} d_{ik}$, тобто параметр D_k повинен також задовольняти умову $0 < D_k \leq c_k$ $\left(c_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}} \left\{ \frac{p_{ik}}{p'_{ik}} \right\}\right)$.

Запишемо остаточно

$$0 < D_k \leq c'_k, \quad c'_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}, j \in \mathbf{N}_{-,k}} \left\{ \frac{p_{ik}}{p'_{ik}}, \frac{1 - p_{jk}}{r'_{jk}} \right\}.$$

Якщо $\mathbf{p}'_k = \mathbf{r}'_k$, то всі ненульові координати векторів є рівними між собою, оскільки за припущенням теореми пара векторів є граничною для деякої траєкторії динамічної системи конфлікту. За теоремою 3 в такому випадку початкові вектори є рівними між собою, тобто $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$.

Теорему доведено.

Твердження 5. *Умови теореми 5 є симетричними відносно векторів* $\mathbf{p}_k$ *та* $\mathbf{r}_k$.

Доведення. Зафіксуємо вектори $\mathbf{p}'_k$ та $\mathbf{r}_k$. Користуючись алгоритмом доведення теореми 5, легко показати, що координати вектора $\mathbf{p}_k$ визначаються за формулами, наведеними в теоремі:

$$p_{ik} = r_{ik} + p'_{ik} D_k, \quad i \in \mathbf{N}_{+,k},$$

$$p_{jk} = r_{jk} - r'_{jk} D_k, \quad j \in \mathbf{N}_{-,k},$$

$$r_{lk} = p_{lk}, \quad l \in \mathbf{N}_{0,k}.$$

Перевіримо, чи збігаються умови, визначені для параметра D_k.

Для $i \in \mathbf{N}_{+,k}$ внаслідок стохастичності вектора $\mathbf{p}_k$ $r_{ik} < p_{ik} \leq 1$, звідки випливає, що $0 < D_k \leq \dfrac{1 - r_{ik}}{p'_{ik}}$.

Для $j \in \mathbf{N}_{-,k}$ аналогічно $0 \leq p_{jk} < r_{jk}$, звідки $0 < D \leq \dfrac{r_{jk}}{p'_{jk}}$.

Отже,

$$0 < D_k \leq c'_k, \quad c'_k = \min_{i \in \mathbf{N}_{+,k}, j \in \mathbf{N}_{-,k}} \left\{ \frac{1 - r_{ik}}{p'_{ik}}, \frac{r_{jk}}{p'_{jk}} \right\}.$$

Твердження доведено.

З теореми 5 випливає, що до фіксованої точки, інваріантної відносно композиції конфлікту, збігається безліч різних траєкторій.

Нехай μ', ν' — пара ймовірнісних мір, що є граничною для динамічної системи конфлікту. P', R' — стохастичні матриці, асоційовані відповідно з мірами μ', ν'. Якщо перебрати всі стохастичні міри μ, ν такі, що для кожного вектор-стовпчика асоційованих з ними матриць P та R виконуються умови теореми 5, то одержимо розв'язок оберненої задачі для довільних структурно подібних мір. Тобто пари мір μ, ν будуть початковими точками таких траєкторій динамічної системи конфлікту, що збігаються до наперед заданої пари мір μ', ν'.

1. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // Math. Meth. Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303 – 313.
2. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 927 – 938.
3. *Albeverio S., Bodnarchyk M., Koshmanenko V.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2005. – **11**, № 4. – P. 309 – 319.
4. *Кошманенко В. Д.* Теорема про конфликт для пары стохастических векторов // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 555 – 560.
5. *Koshmanenko V., Kharchenko N.* Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochast. Process. – 2004. – **10**, № 3-4. – P. 73 – 81.
6. *Кошманенко В. Д.* Відновлення спектрального типу граничних розподілів у динамічних системах конфлікту // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 6. – С. 771 – 784.
7. *Karataeva T., Koshmanenko V.* Origination of the singular continuous spectrum in the conflict dynamical systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2009. – **14**, № 1. – P. 309 – 319.
8. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\widetilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions. – Bonn, 2002. – 12 p. – (Preprint / Univ. Bonn, SFB611).
9. *Hutchinson J. E.* Fractals and selfsimilarity // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – **30**. – P. 713 – 747.
10. *Triebel H.* Fractals and spectra related to Fourier analysis and functional spaces. – Basel etc: Birhäuser, 1997.

Одержано 30.12.08