УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т, Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Н. В. Парфинович (Днепропетр. нац. ун-т)

О ПОРЯДКЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ

In the case where $n \to \infty$, we obtain order equalities for the best L_q-approximations of classes W_p^r, $1 \le q \le p \le 2$, of differentiable periodical functions by splines from these classes are found.

Отримано порядкові рівності при $n \to \infty$ для найкращих L_q-наближень класів W_p^r, $1 \le q \le p \le 2$, диференційовних періодичних функцій сплайнами з цих класів.

Пусть C и L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$.

Наилучшим приближением функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике пространства L_p называется величина

$$E(f,H)_p := \inf_{h \in H} \|f - h\|_p.$$

Если H — подпространство констант, то вместо $E(f,H)_p$ будем писать $E(f)_p$.

Наилучшее приближение класса функций $M \subset L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p определяется равенством

$$E(M,H)_p := \sup_{f \in M} E(f,H)_p.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ и центрально-симметричного класса $M \subset L_p$ n-поперечником по Колмогорову в пространстве L_p называется величина

$$d_n(M, L_p) := \inf_{H_n} E(M, H_n)_p, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем подпространствам пространства L_p, размерность которых не превышает n.

Подпространства, реализующие инфимум в (1), называются экстремальными подпространствами. Последовательность подпространств $\{H_n\}$ такая, что

$$d_n(M, L_p) \asymp E(M, H_n)_p, \quad n \to \infty,$$

называется экстремальной по порядку.

Пусть теперь $M, M' \subset L_p$ — некоторые классы функций. Рассмотрим величину

$$d_n(M, L_p, M') := \inf_{H_n} E(M, H_n \cap M')_p, \tag{2}$$

где точная нижняя грань берется по всем подпространствам пространства L_p, размерность которых не превышает n.

Величину (2) называют относительным поперечником класса M в метрике пространства L_p. Отметим, что эти величины введены в рассмотрение В. Н. Коноваловым [1].

Как и для поперечников по Колмогорову, подпространства, реализующие инфимум в правой части (2), называются экстремальными подпространствами для относительных поперечников, а последовательность подпространств $\{H_n\}$, для которой

$$d_n(M, L_p, M') \asymp E(M, H_n \cap M')_p, \quad n \to \infty,$$

называется экстремальной по порядку.

Если $r \in \mathbb{N}$, то через W_p^r обозначим класс функций $f \in L_p$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ $(f^{(r-1)} \in AC_{\text{loc}})$ и таких, что $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$.

Известно (см., например, [2]), что для всех $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$

$$d_n(W_p^r, L_p) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Кроме того, для любого $r \in \mathbb{N}$

$$d_n(W_2^r, L_2, W_2^r) = d_n(W_2^r, L_2) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Однако поведение относительных поперечников $d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r)$ и $d_n(W_1^r, L_1, W_1^r)$ при $n \to \infty$ существенно отличается от поведения колмогоровских поперечников (3). Так, В. Н. Коновалов [1] доказал, что для всех $r = 2, 3, \ldots$

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Затем В. Ф. Бабенко [3] установил, что при $r = 3, 4, \ldots$

$$d_n(W_1^r, L_1, W_1^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Такое различие в поведении колмогоровских и относительных поперечников привлекло интерес к исследованию поведения при $n \to \infty$ величин $d_n(W_p^r, L_q, W_s^r)$ при разных значениях $1 \leq p, q, s \leq \infty$. Обзор известных результатов и дальнейшие ссылки можно найти, например, в [4–7]. При этом вопрос о поведении величин $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ при $p \neq 1, 2, \infty$ остается открытым.

Обозначим через $S_{2n,m}$, $m \in \mathbb{N}$, пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта 1 с узлами в точках $\dfrac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что при $p = 1$ и $p = \infty$ наряду с подпространствами тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$, которые являются экстремальными для поперечников $d_{2n-1}(W_p^r, L_p)$ и $d_{2n}(W_p^r, L_p)$, экстремальными для поперечников $d_{2n}(W_p^r, L_p)$ являются также подпространства сплайнов $S_{2n,m}$, $m \geq r-1$ (см., например, [8], теорема 5.4.8).

Известно также (см. [3, 9, 10]), что подпространства $S_{2n,r}$ являются экстремальными по порядку в соотношениях (5) и (6). Кроме того, как следует из результата Ю. Н. Субботина [11], подпространства $S_{2n,2r-1}$ реализуют поперечники $d_{2n}(W_2^r, L_2, W_2^r)$.

Наличие таких хороших аппроксимативных свойств у пространств $S_{2n,m}$ наводит на мысль о применении их в решении задач о поведении поперечников $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ при $p \neq 1, \infty$.

Сплайны из $S_{2n,r-1}$ не принадлежат классам W_p^r, поэтому имеет смысл исследовать задачу о приближении классов W_p^r сплайнами из $S_{2n,m}$, $m \geq r$.

В данной работе мы изучим порядковое поведение при $n \to \infty$ последовательности величин $E(W_p^r, S_{2n,r} \cap W_p^r)_q$ при $1 \le q \le p \le 2$, $p \ne 1$, и покажем, что последовательность подпространств $\{S_{2n,r}\}$ не является экстремальной по порядку по крайней мере для поперечников $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ при $r \ge 3$.

Теорема 1. *Для всех* $r = 3, 4, \ldots$ *и* $1 \le q \le p \le 2$ *справедливы порядковые равенства*

$$E(W_p^r, S_{2n,r} \cap W_p^r)_q \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Замечание. Отметим, что при $p = q = 1$ этот результат получен В. Ф. Бабенко в [10].

Доказательство. Для сокращения записи будем полагать

$$E_n := E(W_p^r, S_{2n,r} \cap W_p^r)_q.$$

Пусть $q' = \dfrac{q}{q-1}$. Используя теорему двойственности для наилучших L_p-приближений выпуклым множеством [8] (предложение 1.4.1) и учитывая то, что множество $S_{2n,r} \cap W_p^r$ содержит константы, нетрудно установить, что

$$E_n = \sup_{f \in W_p^r} \sup_{\substack{\|g\|_{q'} \le 1 \\ g \perp 1}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \sup_{h \in S_{2n,r} \cap W_p^r} \int_0^{2\pi} g(t)h(t)\,dt \right\}.$$

После r-кратного интегрирования по частям получим

$$E_n = \sup_{\substack{\|f\|_p \le 1 \\ f \perp 1}} \sup_{g \in W_{q'}^r} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \sup_{h \in S_{2n,r} \cap W_p^r} \int_0^{2\pi} g(t)h^{(r)}(t)\,dt \right\}.$$

Учитывая, что r-я производная сплайна $h \in S_{2n,r}$ кусочно-постоянна $\Bigg($принимает значение c_k на интервале $\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1, \ldots, 2n\Bigg)$, и полагая $c = (c_1, \ldots$ $\ldots, c_{2n})$, условие $h \in S_{2n,r} \cap W_p^r$ записываем в виде $c \in \left(\dfrac{n}{\pi}\right)^{1/p} C$, где

$$C := \left\{ c = (c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \colon \ \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0, \ \sum_{k=1}^{2n} |c_k|^p \le 1 \right\}.$$

Теперь, используя теорему двойственности для наилучшего приближения вектора $\left(\displaystyle\int_0^{\pi/n} g(t)\,dt, \int_{\pi/n}^{2\pi/n} g(t)\,dt, \ldots, \int_{(2n-1)\pi/n}^{2\pi} g(t)\,dt\right)$ векторами $(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) \in \mathbb{R}^{2n}$, получаем

$$E_n = \sup_{g \in W_{q'}^r} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/p} \sup_{c \in C} \sum_{k=1}^{2n} c_k \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_{q'}^r} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/p} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(t)\,dt - \lambda \right|^{p'} \right)^{1/p'} \right\} =$$

$$= \sup_{g\in W^r_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/p} \inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(g(t) - \frac{\lambda n}{\pi}\right) dt \right|^{p'} \right)^{1/p'} \right\} =$$

$$= \sup_{g\in W^r_{q'}} \left\{ E\left(g - \frac{\lambda_0(g)n}{\pi}\right)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/p} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(g(t) - \frac{\lambda_0(g)n}{\pi}\right) dt \right|^{p'} \right)^{1/p'} \right\},$$

где $\lambda_0(g)$ таково, что

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(g(t) - \frac{\lambda n}{\pi}\right) dt \right|^{p'} \right)^{1/p'} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(g(t) - \frac{\lambda_0(g)n}{\pi}\right) dt \right|^{p'} \right)^{1/p'}.$$

Пусть $W^{r,0}_p$ — класс функций $f \in W^r_p$ таких, что $\lambda_0(g) = 0$. Учитывая, что $\left(g(t) - \dfrac{\lambda_0(g)n}{\pi}\right) \in W^{r,0}_p$, можем записать

$$E_n = \sup_{g\in W^{r,0}_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(t)\,dt \right|^{p'} \right)^{1/p'} \right\}. \tag{7}$$

Введем обозначение $\overline{g}_n(t)$ для 2π-периодической функции, которая на интервале $\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$ принимает значение $\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(t)\,dt$, $k = 1,\ldots,2n$. Тогда из (7) получим

$$E_n = \sup_{g\in W^{r,0}_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{2n} |\overline{g}_n(t)|^{p'}\,dt \right)^{1/p'} \right\} =$$

$$= \sup_{g\in W^{r,0}_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} \right\} \le \sup_{g\in W^{r,0}_{q'}} \left\{ \|g\|_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} \right\}. \tag{8}$$

С помощью неравенства Гельдера нетрудно убедиться в том, что

$$\|g\|_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} \geq 0. \tag{9}$$

Применяя теорему Лагранжа, можно записать

$$\|g\|_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} = \left(\|g\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'} - \left(\|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \frac{(\xi_n)^{1/p'-1}}{p'} \left(\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}\right), \tag{10}$$

где ξ_n принадлежит интервалу $\left(\|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}, \|g\|_{p'}^{p'}\right)$.

Теперь из (8) и (10) будем иметь

$$E_n \leq \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|\overline{g}_n\|_{p'}^{1-p'}}{p'} \left(\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}\right). \tag{11}$$

Поскольку $\|\overline{g}_n\|_{p'} \to \|g\|_{p'}$ при $n \to \infty$, для достаточно больших n $\|\overline{g}_n\|_{p'} \geq \geq \frac{1}{2}\|g\|_{p'}$. Тогда из (11) получим

$$E_n \leq \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|g\|_{p'}^{1-p'}}{2^{1-p'} \cdot p'} \left(\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}\right). \tag{12}$$

Теперь разность $\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}$ оценим сверху.

Пусть t_k — точка из интервала $\left[\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right]$ такая, что

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(t)\,dt = g(t_k)\frac{\pi}{n},$$

а $\sigma_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, тогда

$$\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'}^{p'} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n} |g(t_k)|^{p'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'} + |g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right) dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'}\right) dt \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left| |g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'} \right| dt. \tag{13}$$

Известно (см., например, [12, с. 209, 210]), что для любой дважды непрерывно дифференцируемой на $\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$ функции $G(t)$

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \big(G(t) - G(\sigma_k)\big)dt \le \frac{1}{24}\,\|G''\|_C \left(\frac{\pi}{n}\right)^3. \qquad (14)$$

Поскольку при $p' \ge 2$ функция $|g(t)|^{p'}$ дважды непрерывно дифференцируема, используя (14), получаем

$$\left|\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'}\right)dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{24}\left(p'(p'-1)\|g\|_\infty^{p'-2}\|g'\|_\infty^2 + p'\|g\|_\infty^{p'-1}\|g''\|_\infty\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^3.$$

Учитывая, что для функции из класса $W_{q'}^{r,0}$ при $0 \le k \le r$ и $\alpha = \dfrac{r-k-1/q'}{r-1/q'+1/p'}$ имеет место неравенство (см. [13], теоремы 4.3.1 и 6.8.1)

$$\|g^{(k)}\|_\infty \le K\|g\|_{p'}^{\alpha}\|g^{(r)}\|_{q'}^{1-\alpha} \qquad (15)$$

с константой K, не зависящей от g, приходим к оценке

$$\left|\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'}\right)dt\right| \le C_1\|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-p'/q'}{r-1/q'+1/p'}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3, \qquad (16)$$

где C_1 не зависит от n.

Аналогично, с помощью (14) оценим разность

$$\frac{\pi}{n}|g(t_k) - g(\sigma_k)| = \left|\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} (g(t) - g(\sigma_k))\ dt\right| \le \frac{1}{24}\|g''\|_\infty\left(\frac{\pi}{n}\right)^3,$$

откуда

$$|g(t_k) - g(\sigma_k)| \le \frac{1}{24}\|g''\|_\infty\left(\frac{\pi}{n}\right)^2. \qquad (17)$$

Применив снова теорему Лагранжа, оценим разность

$$\left||g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right| = p'\,|g(\tau_k)|^{p'-1}\,||g(t_k)| - |g(\sigma_k)|| \le$$

$$\le p'\,|g(\tau_k)|^{p'-1}\,|g(t_k) - g(\sigma_k)|,$$

где τ_k таково, что $|g(\tau_k)|$ принадлежит промежутку с концами $|g(t_k)|$ и $|g(\sigma_k)|$.

Из последней оценки и (17) получим

$$\left||g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right| \le p'\|g\|_\infty^{p'-1}\frac{1}{24}\|g''\|_\infty\left(\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Из последнего неравенства и неравенства (15) непосредственно следует, что

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left| |g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'} \right| dt \le C_2 \|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-p'/q'}{r-1/q'+1/p'}} \left(\frac{\pi}{n}\right)^3, \tag{18}$$

где C_2 не зависит от n.

Сопоставляя (13), (16) и (18), заключаем, что

$$\|g\|_{p'}^{p'} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n} |g(t_k)|^{p'} \le C_3 \|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-p'/q'}{r-1/q'+1/p'}} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2, \tag{19}$$

где C_3 не зависит от n.

Из (12) и (19) при достаточно больших n будем иметь

$$E_n \le \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|g\|_{p'}^{1-p'}}{2^{1-p'}p'} C_3 \|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-p'/q'}{r-1/q'+1/p'}} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|g\|_{p'}^{\frac{1/p'-1/q'+r-3}{r-1/q'+1/p'}}}{2^{1-p'}p'} C_3 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что при $1 \le q \le p \le 2$ и $r \ge 3$ будет $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{q'} + r - 3 \ge 0$, и, следовательно,

$$E_n \le \frac{C_4}{n^2}, \tag{20}$$

где C_4 не зависит от n.

Необходимая оценка сверху для E_n получена.

Установим для E_n оценку снизу.

Пусть $\varphi_0(x) = \operatorname{sgn} \sin x$. Обозначим через $\varphi_r(x)$ r-й 2π-периодический интеграл от $\varphi_0(x)$ с нулевым средним значением на периоде. Ясно, что $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{1/q'} \varphi_r \in \in W_{q'}^r$. Тогда из (7) получим

$$E_n = \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(t)\, dt \right|^{p'} \right)^{1/p'} \right\} \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/q'} \left\{ E(\varphi_r)_{p'} - \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|\overline{\varphi}_{r,n}(t)\right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/q'} \left\{ \|\varphi_r\|_{p'} - \left\|\overline{\varphi}_{r,n}(t)\right\|_{p'} \right\}, \tag{21}$$

где через $\overline{\varphi}_{r,n}(t)$ обозначена функция, принимающая на промежутке $\left[\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$ значение $\dfrac{n}{\pi} \displaystyle\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \varphi_r(t)\, dt$, $k = 1, \ldots, 2n$.

Отметим, что, рассматривая подходящий сдвиг функции φ_r, мы без ограничения общности можем считать, что $\varphi_r(0) = 0$ и на $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция φ_r возрастает.

Как следует из (9),

$$\|\varphi_r\|_{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'} \geq 0. \tag{22}$$

Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\|\varphi_r\|_{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'} = \left(\|\varphi_r\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'} - \left(\|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= \frac{(\xi_n)^{1/p'-1}}{p'}\left(\|\varphi_r\|_{p'}^{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}\right), \tag{23}$$

где ξ_n — некоторая точка из интервала $\left(\|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}, \|\varphi_r\|_{p'}^{p'}\right)$.

Теперь из (21) и (23) с учетом (22) имеем

$$E_n \geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/q'} \frac{\|\varphi_r\|_{p'}^{1-p'}}{p'}\left(\|\varphi_r\|_{p'}^{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}\right). \tag{24}$$

Пусть t_k — точка из интервала $\left[\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right]$, $k = 1, \ldots, 2n$, такая, что

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \varphi_r(t)\,dt = \varphi_r(t_k)\frac{\pi}{n}.$$

Тогда

$$\|\varphi_r\|_{p'}^{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'} = 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(|\varphi_r(t)|^{p'} - |\varphi_r(t_k)|^{p'}\right) dt =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt. \tag{25}$$

Используя неравенство Гельдера, нетрудно установить, что

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(|\varphi_r(t)|^{p'} - |\varphi_r(t_k)|^{p'}\right) dt \geq 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Поэтому для порядковой оценки снизу последнего выражения в (25), с учетом (26), достаточно оценить только те слагаемые, для которых

$$\left[\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right] \subset [\alpha, \beta], \tag{27}$$

где α, β – некоторые фиксированные числа, такие, что $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Пусть k таково, что выполнено (27). Тогда, применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{t_k} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{k\pi/n} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt =$$

$$= \frac{p'}{2} \left\{ \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{t_k} \left(\varphi^2(\xi_k(t))\right)^{p'/2-1} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k}^{k\pi/n} \left(\varphi^2(\eta_k(t))\right)^{p'/2-1} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt \right\}, \tag{28}$$

где, с учетом возрастания на $[\alpha, \beta]$ функции $\varphi_r^2(t)$,

$$\varphi_r^2(t) < \xi_k(t) < \varphi_r^2(t_k), \quad \frac{(k-1)\pi}{n} < t < t_k,$$

и

$$\varphi_r^2(t_k) < \eta_k(t) < \varphi_r^2(t), \quad t_k < t < \frac{k\pi}{n}.$$

Поскольку функция $\varphi_r^2(t)$ монотонно возрастает на $[\alpha, \beta]$ и разность $\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)$ на этом промежутке меняет знак с „$-$” на „$+$” ровно один раз в точке t_k, имеем

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt \ge$$

$$\ge \frac{p'}{2} \left\{ \left(\varphi^2(t_k)\right)^{p'/2-1} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{t_k} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt + \right.$$

$$\left. + \left(\varphi^2(t_k)\right)^{p'/2-1} \int\limits_{t_k}^{k\pi/n} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt \right\} =$$

$$= \frac{p'}{2} \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2-1} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt \ge$$

$$\ge \frac{p'}{2} \left(\varphi_r^2(\alpha)\right)^{p'/2-1} \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt. \tag{29}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt = \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\varphi_r(t) - \varphi_r(t_k)\right)^2 dt. \tag{30}$$

Теперь для каждого k из (27) с учетом выпуклости вверх функции $\varphi_r(t)$ на $[\alpha, \beta]$ можно записать

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\varphi_r(t) - \varphi_r(t_k)\right)^2 dt = \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\varphi_r'(\zeta_k(t))\right)^2 (t - t_k)^2 dt \geq$$

$$\geq \left(\varphi_r'(\beta)\right)^2 \int\limits_0^{\pi/2n} t^2\, dt \geq \frac{\left(\varphi_r'(\beta)\right)^2}{3} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^3 = \frac{C_5}{n^3}, \tag{31}$$

где $\zeta_k(t)$ — некоторая точка из промежутка с концами t и t_k, C_5 — константа, не зависящая от n.

Сопоставляя (29), (30) и (31), имеем

$$\int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt \geq \frac{C_6}{n^3}, \tag{32}$$

где C_6 не зависит от n.

Из (25) и (32) с учетом того, что при достаточно больших n количество интервалов, удовлетворяющих условию (27), не меньше $\dfrac{(\beta - \alpha)n}{2\pi}$, получаем

$$\|\varphi_r\|_{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'} \geq$$

$$\geq \frac{2}{p'} \|\varphi_r\|_{p'}^{1/p'-1} 4 {\sum}' \int\limits_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} \left(\left(\varphi_r^2(t)\right)^{p'/2} - \left(\varphi_r^2(t_k)\right)^{p'/2}\right) dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{p'} \|\varphi_r\|_{p'}^{1/p'-1} \frac{4(\beta - \alpha)n}{\pi} \frac{C_6}{n^3} = \frac{C_7}{n^2}. \tag{33}$$

В (33) ${\sum}'$ означает, что суммирование ведется только по тем k, для которых выполнено (27).

Из (21) и (33) следует необходимая оценка снизу

$$E_n \geq \frac{C_8}{n^2}. \tag{34}$$

Сопоставляя (20) и (34), получаем

$$E_n := E(W_p^r, S_{2n,r} \cap W_p^r)_q \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

1. *Коновалов В. Н.* Оценка поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, вып. 3. – С. 369 – 380.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
3. *Бабенко В. Ф.* Приближение в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9 – 18.
4. *Парфинович Н. В.* Относительные приближения функциональных классов: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск, 2002. – 140 с.
5. *Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В.* О наилучших L_1-приближениях функциональных классов сплайнами при наличии ограничений на их производные // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 435 – 444.
6. *Parfinovich N. V.* On the best approximation of classes of periodic functions by splines under restrictions on their derivatives // East J. Approxim. – 1999. – **5**, № 3. – P. 267 – 278.
7. *Парфинович Н. В.* О точных асимптотиках наилучших относительных приближений классов периодических функций сплайнами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 489 – 500.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
9. *Бабенко В. Ф.* О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Мат. заметки. – 1991. – **50**, вып. 6. – С. 24 – 30.
10. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие L_1-приближения классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1410 – 1413.
11. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 152 – 168.
12. *Дороговцев А. Я.* Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. – Киев, 2005. – 224 с.
13. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.

Получено 30.03.09