УДК 517.518.86

В. В. Арестов (Урал. ун-т, Ин-т математики и механики Урал. отд-ния РАН, Россия)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ ПО МЕРЕ НА ОТРЕЗКЕ*

We study the problem of algebraic polynomials with given leading coefficient that deviate least from zero in measure on the segment $[-1,1]$ (more precisely, with respect to the functional $\mu(f) = \operatorname{mes}\{x \in [-1,1]\colon |f(x)| \geq 1\}$). We discuss a similar problem with respect to the integral functionals $\int_{-1}^{1} \varphi(|f(x)|)\,dx$ for functions φ which are defined, nonnegative, and nondecreasing on the half line $[0,+\infty)$.

Досліджується задача про алгебраїчні многочлени із заданим старшим коефіцієнтом, що найменше відхиляються від нуля за мірою на відрізку $[-1,1]$, а точніше, відносно функціонала $\mu(f) = \operatorname{mes}\{x \in [-1,1]\colon |f(x)| \geq 1\}$. Обговорюється аналогічна задача відносно інтегральних функціоналів $\int_{-1}^{1} \varphi(|f(x)|)\,dx$ для функцій φ, визначених, невід'ємних та неспадних на півосі $[0,+\infty)$.

1. Введение. Пусть $\mathcal{P}_m$ — множество алгебраических многочленов

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \tag{1.1}$$

порядка $m \geq 0$ с комплексными коэффициентами. При $m \geq 1$ на множестве $\mathcal{P}_m$ рассмотрим функционал

$$\mu(f_m) = \operatorname{mes}\left\{x \in [-1,1] : \left|f_m(x)\right| \geq 1\right\}, \tag{1.2}$$

значение которого есть мера Лебега множества точек $x \in [-1,1]$, в которых модуль многочлена $f_m \in \mathcal{P}_m$ больше либо равен 1. Для фиксированного $y \in \mathbb{R}$ введем величину

$$\sigma_m(y) = \inf\left\{\mu(y2^{m-1}x^m - f_{m-1}(x)) : f_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}\right\}, \tag{1.3}$$

которую можно интерпретировать как величину наилучшего приближения функции $y2^{m-1}x^m$ множеством $\mathcal{P}_{m-1}$ алгебраических многочленов порядка $m-1$ относительно функционала (1.2). Величину (1.3) можно записать в несколько иной форме. Пусть $\mathcal{P}_m(y)$ — множество алгебраических многочленов порядка m, старший коэффициент которых есть $y2^{m-1}$, т. е. многочленов вида

---

* Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00213) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3208.2010.1).

$$f_m(x) = \gamma 2^{m-1}x^m + f_{m-1}(x), \qquad f_{m-1}\in\mathcal{P}_{m-1}.$$

Тогда

$$\sigma_m(\gamma) = \inf\left\{\mu\left(f_m\right): f_m\in\mathcal{P}_m(\gamma)\right\}; \tag{1.4}$$

это уже есть вариант задачи о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля.

Важную роль в дальнейшем будут играть многочлены Чебышева первого рода, которые для $x\in[-1,1]$ определены формулой $T_m(x) = \cos(m\arccos x)$. При $m\ge 1$ старший коэффициент этого многочлена равен 2^{m-1} (см., например, [1], гл. 3). Поэтому задача (1.3), (1.4) нетривиальна лишь при $|\gamma|>1$; ясно, что достаточно ограничиться случаем $\gamma>1$.

Относительно задачи (1.4) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *При $m\ge 1$, $\gamma>1$ имеет место равенство*

$$\sigma_m(\gamma) = 2\left(1-\gamma^{-1/m}\right). \tag{1.5}$$

Более того, многочлен

$$f_m^*(x) = T_m\left(\gamma^{1/m}x\right) \tag{1.6}$$

и его сдвиги

$$f_m^*(x-h), \qquad |h| \le 1-\gamma^{-1/m}, \tag{1.7}$$

принадлежат множеству $\mathcal{P}_m(\gamma)$ и являются экстремальными многочленами в задаче (1.4) (многочленами, наименее уклоняющимися от нуля), и только такие многочлены решают задачу (1.4).

Экстремальные многочлены в рассмотренных в данной работе задачах оказались вещественными, поэтому результаты работы (теоремы 1.1, 3.1 и 4.1) остаются справедливыми для многочленов (1.1) с вещественными коэффициентами.

Для тригонометрических полиномов задачи, подобные тем, которые обсуждаются в данной работе, и родственные им, исследованы ранее совместно автором и А. С. Менделевым [2].

2. Результаты П. Л. Чебышева и Г. Пойа относительно алгебраических многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. Задача (1.4) связана с несколькими другими экстремальными задачами для многочленов, в частности с задачей о многочленах с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющимися от нуля относительно равномерной нормы на компактах. Многочлены Чебышева (наименее уклоняющиеся от нуля с единичным старшим коэффициентом) на компактах комплексной плоскости изучались многими математиками и имеют многочисленные приложения (см., например, [3]). Опишем более подробно результаты П. Л. Чебышева и Г. Пойа относительно алгебраических многочленов, наименее уклоняющихся от нуля.

Пусть $\mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}_m(R)$, $m\ge 1$, есть множество алгебраических многочленов

$$P_m(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k$$

с единичным старшим и произвольными (комплексными) остальными коэффициентами. П. Л. Чебышев [4] нашел наименьшее уклонение от нуля

$$E_m([-1,1]) \;=\; \inf\left\{\|P_m\|_{C[-1,1]} : P_m \in \mathcal{P}_m\right\} \tag{2.1}$$

на отрезке $[-1,1]$ многочленов из класса $\mathcal{P}_m$. А именно, он показал, что

$$E_m([-1,1]) \;=\; \frac{1}{2^{m-1}}, \qquad m \ge 1, \tag{2.2}$$

и экстремальным является многочлен

$$P_m^*(x) \;=\; \frac{1}{2^{m-1}} T_m(x), \qquad T_m(x) \;=\; \cos(m \arccos x).$$

С помощью линейной замены легко проверяется, что для любого отрезка $I = [a,b]$ длины $|I| = b - a = 2\rho$, $\rho > 0$, величина

$$E_m(I) \;=\; \inf\left\{\|P_m\|_{C(I)} : P_m \in \mathcal{P}_m\right\}$$

имеет значение

$$E_m(I) \;=\; 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^m;$$

соответственно пересчитывается экстремальный многочлен. К примеру, для отрезка $[-\rho,\rho]$ таковым является многочлен

$$g_m^*(x) \;=\; 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^m T_m\left(\frac{x}{\rho}\right). \tag{2.3}$$

Для компактного подмножества $Q \subset \mathbb{R}$ положим

$$E_m(Q) \;=\; \inf\left\{\|P_m\|_{C(Q)} : P_m \in \mathcal{P}_m\right\}. \tag{2.4}$$

Г. Пойа изучал наименьшее значение

$$E_m(2\rho) \;=\; \inf\left\{E_m(Q) : Q \in \mathcal{Q}(2\rho)\right\} \tag{2.5}$$

величины (2.4) по семейству $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(2\rho)$ всех компактных подмножеств $Q \subset \mathbb{R}$ числовой оси, мера которых равна фиксированному числу 2ρ, $\rho > 0$, и доказал следующее утверждение (см., например, [5, с. 23]).

Теорема 2.1. *При любом $\rho > 0$ для любого множества $Q \in \mathcal{Q}(2\rho)$ выполняется неравенство*

$$E_m(Q) \;\le\; 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^m,$$

причем знак равенства достигается лишь в том случае, когда Q есть отрезок (длины 2ρ). Как следствие,

$$E_m(2\rho) \;=\; 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^m. \tag{2.6}$$

3. Доказательство теоремы 1.1. Связь задач.

Лемма 3.1. *При любых $m \ge 1$, $\gamma > 1$ в задаче (1.4) существует экстремальный многочлен; все нули экстремального многочлена вещественны и лежат на отрезке $[-1,1]$.*

Доказательство. Многочлены $f_m \in \mathcal{P}_m(\gamma)$ можно записать в виде

$$f_m(x) = \gamma 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m}(x - z_k), \tag{3.1}$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ — (необязательно вещественные) корни многочлена f_m. При каждом k, $1 \le k \le m$, обозначим через x_k точку отрезка $I = [-1,1]$, ближайшую к точке z_k в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Положим

$$\tilde{f}_m(x) = \gamma 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m}(x - x_k).$$

Это есть многочлен из $\mathcal{P}_m(\gamma)$, все корни которого лежат на I. При этом выполняется неравенство $|\tilde{f}_m(x)| \le |f_m(x)|$, $x \in \mathbf{I}$. Если многочлен f_m имеет хотя бы один корень вне I, то всюду, кроме корней многочлена f_m, принадлежащих I, это неравенство будет строгим и, как следствие, имеет место строгое неравенство $\mu(\tilde{f}_m) < \mu(f_m)$. Следовательно, в задаче (1.4) можно ограничиться многочленами, все m корней которых принадлежат отрезку I.

Функционал $\mu(f_m)$, $f_m \in \mathcal{P}_m(\gamma)$, является непрерывной функцией корней многочлена f_m. На компакте $\mathbf{I}^m$ эта функция достигает своего наименьшего значения.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы **1.1.** Пусть $f_m \in \mathcal{P}_m(\gamma)$ есть экстремальный многочлен задачи (1.4). Его можно представить в виде

$$f_m(x) = \gamma 2^{m-1} g_m(x), \qquad g_m(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - x_j); \tag{3.2}$$

многочлен g_m принадлежит множеству $\mathcal{R}_m$ (и, в силу леммы 3.1, все его корни лежат на $[-1,1]$). Рассмотрим два (компактных) множества

$$H_m = \left\{x \in [-1,1] : |f_m(x)| \ge 1\right\},$$

$$G_m = \left\{x \in [-1,1] : |f_m(x)| \le 1\right\} = \left\{x \in [-1,1] : |g_m(x)| \le (\gamma 2^{m-1})^{-1}\right\};$$

имеем $|H_m| + |G_m| = 2$ и $|H_m| = \sigma_m(\gamma)$. Положим $p = 1 - \sigma_m(\gamma)/2$, тогда

$$2p = 2 - \sigma_m(\gamma) = |G_m|. \tag{3.3}$$

В силу определения (2.5) и утверждения (2.6) справедлива цепочка соотношений

$$2\left(\frac{\rho}{2}\right)^m = E_m(2\rho) \le E_m(G_m) \le \|g_m\|_{C(G_m)} = \frac{1}{\gamma 2^{m-1}}. \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что

$$2\rho \le 2\gamma^{-1/m}. \tag{3.5}$$

Соотношения (3.3) и (3.5) дают для величины (1.4) следующую оценку снизу:

$$\sigma_m(\gamma) = 2 - 2\rho \ge 2\left(1-\gamma^{-1/m}\right). \tag{3.6}$$

Многочлен (1.6) принадлежит множеству $\mathcal{P}_m(\gamma)$ и дает оценку, обратную (3.6). Таким образом, равенство (1.5) проверено. Одновременно доказано, что многочлен (1.6) является экстремальным в задаче (1.4). Очевидно, что тогда и все многочлены (1.7) будут экстремальными. Убедимся, что других экстремальных многочленов нет.

Предположим, что многочлен $f_m \in \mathcal{P}_m(\gamma)$ является экстремальным в задаче (1.4) и $g_m \in \mathfrak{P}_m$ есть многочлен, связанный с f_m соотношением (3.2). На этих многочленах все неравенства (3.4), и, как следствие, (3.5), обратятся в равенство. В силу теоремы 2.1 равенство $E_m(2\rho) = E_m(G_m)$ означает, что множество G_m является отрезком $[h-\rho, h+\rho]$ длины 2ρ, $\rho = \gamma^{-1/m}$. Этот отрезок принадлежит $[-1,1]$. Следовательно, $G_m = [h-\rho, h+\rho]$, $|h| \le 1-\rho$. Равенство $E_m(G_m) = \|g_m\|_{C(G_m)}$ влечет теперь, что g_m является соответствующим сдвигом многочлена (2.3). Как следствие, $f_m(x) = T_m\left(\gamma^{1/m}(x-h)\right)$.

Теорема 1.1 доказана.

Из доказательства теоремы 1.1 (а, впрочем, формально из формулировок теорем 1.1 и 2.1) видно, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Задачи (1.4) и (2.5) связаны соотношениями*

$$E_m(2\rho) = \frac{1}{\gamma 2^{m-1}}, \quad 2 = 2\rho + \sigma_m(\gamma), \quad \rho = \gamma^{-1/m}, \quad \gamma > 1. \tag{3.7}$$

4. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля относительно интегральных функционалов. Задача о многочленах с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющихся от нуля, изучена не только относительно равномерной нормы. Она хорошо исследована (см., например, [6], § 15) в пространствах $L^p(-1,1)$, $1 \le p < \infty$, наделенных нормой

$$\|f\|_{L^p(-1,1)} = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}. \tag{4.1}$$

Впрочем, лишь при $p = 1$ и $p = 2$ многочлены наименьшего уклонения выписаны явно; а именно, таковыми являются (при соответствующей нормировке) многочлены Чебышева второго рода $(p = 1)$ и многочлены Лежандра $(p = 2)$ (см., например, [7], § 2.9). Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, известны [8] еще в пространстве $L^0(-1,1)$, а точнее, относительно функционала

$$\|f\|_{L^0(-1,1)} = \exp\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ln|f(x)|\,dx\right). \tag{4.2}$$

Пусть теперь Φ — множество функций φ, определенных, неотрицательных и неубывающих на полуоси $[0,+\infty)$. В данном пункте будет обсуждаться задача о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля относительно интегральных функционалов

$$\int_{-1}^{1}\varphi\big(|f(x)|\big)\,dx, \qquad \varphi\in\Phi. \tag{4.3}$$

Во множестве $\mathcal{P}_m$ алгебраических многочленов порядка m рассмотрим линейный оператор A_m, который многочлену (1.1) сопоставляет его старшую компоненту, нормированную множителем $2^{-(m-1)}$:

$$(A_m f_m)(t) = 2^{-(m-1)}a_m x^m, \qquad f_m\in\mathcal{P}_m. \tag{4.4}$$

Нетрудно понять, что задача о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля относительно (произвольной) нормы на пространстве $\mathcal{P}_m$, эквивалентна проблеме вычисления нормы оператора (4.4). В частности, результат П. Л. Чебышева (2.2) означает, что норма оператора (4.4) на множестве $\mathcal{P}_m$ с равномерной нормой равна единице.

Для функции $\varphi\in\Phi$ обозначим через $c_m(\varphi)$ наименьшую константу в неравенстве

$$\int_{-1}^{1}\varphi\Big(\big|2^{-(m-1)}a_m x^m\big|\Big)\,dx \le c_m(\varphi)\int_{-1}^{1}\varphi\big(|f_m(x)|\big)\,dx, \qquad f_m\in\mathcal{P}_m. \tag{4.5}$$

Положим

$$c_m^* = \sup\big\{c_m(\varphi):\ \varphi\in\Phi\big\}. \tag{4.6}$$

Ниже в теореме 4.1 будет указано точное значение этой величины.

Классу Φ принадлежит, в частности, функция φ^*, определенная соотношениями

$$\varphi^*(u) = \begin{cases} 0, & u\in[0,1),\\ 1, & u\in[1,+\infty).\end{cases} \tag{4.7}$$

Для этой функции функционалы (4.3) и (1.2) совпадают:

$$\int_{-1}^{1}\varphi^*\big(|f_m(x)|\big)\,dx = \mu(f_m). \tag{4.8}$$

Поэтому величина $\alpha_m = c_m(\varphi^*)$ является наименьшей константой в неравенстве

$$\mu\big(2^{-(m-1)}a_m x^m\big) \le \alpha_m\,\mu(f_m), \qquad f_m\in\mathcal{P}_m. \tag{4.9}$$

Теорема 4.1. *При любом* $m \ge 1$ *имеют место равенства*

$$c_m^* = \alpha_m = 1. \tag{4.10}$$

Теорема 4.1 вытекает из приведенных ниже лемм 4.1 и 4.2.

Рассмотрим несколько более общую ситуацию. Пусть Λ_m — произвольный линейный оператор в $\mathcal{P}_m$. Для функции $\varphi \in \Phi$ обозначим через $c_m(\varphi) = c_m(\Lambda_m, \varphi)$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$\int_{-1}^{1} \varphi\big(|(\Lambda_m f_m)(t)|\big)\,dt \le c_m(\Lambda_m, \varphi)\int_{-1}^{1} \varphi\big(|f_m(t)|\big)\,dt, \qquad f_m \in \mathcal{P}_m. \tag{4.11}$$

Отметим, что, например, для функции $\varphi_p(u) = u^p$ константа $(c_m(\Lambda_m, \varphi_p))^{1/p}$ является нормой оператора Λ_m на подпространстве $\mathcal{P}_m$, наделенном нормой пространства L_p. Представляет интерес наибольшая из констант $c_m(\Lambda_m, \varphi)$, т. е. величина

$$c_m(\Lambda_m) = \sup\{c_m(\Lambda_m, \varphi) : \varphi \in \Phi\}. \tag{4.12}$$

В силу (4.8) величина $\alpha_m(\Lambda_m) = c_m(\Lambda_m, \varphi^*)$ является наименьшей константой в неравенстве

$$\mu(\Lambda_m f_m) \le \alpha_m(\Lambda_m)\mu(f_m), \qquad f_m \in \mathcal{P}_m. \tag{4.13}$$

На множестве тригонометрических полиномов неравенства типа (4.13) изучал А. Г. Бабенко [9] в 1992 году. Он получил двусторонние оценки константы в таком неравенстве для довольно широкого класса операторов и, в частности, для классических операторов взятия старшей гармоники и дифференцирования.

Если $\Lambda_m \not\equiv 0$, то

$$\alpha_m(\Lambda_m) \ge 1. \tag{4.14}$$

Действительно, предположим, что многочлен $f_m \in \mathcal{P}_m$ обладает свойством $\Lambda_m f_m \not\equiv 0$. Рассмотрим семейство многочленов $\{u f_m,\ u > 0\}$. Имеем

$$\mu(u f_m) = \operatorname{mes}\{t \in [-1,1] : |f_m(t)| \ge 1/u\} \to 2, \qquad u \to +\infty.$$

Такое же свойство имеет и величина $\mu(\Lambda_m(u f_m)) = \mu(u\Lambda_m(f_m))$. Подставляя функции $\{u f_m,\ u > 0\}$ в (4.13), получаем неравенство (4.14).

Функция (4.7) принадлежит классу Φ, поэтому имеет место неравенство $\alpha_m(\Lambda_m) \le c_m(\Lambda_m)$. На самом же деле две последние величины совпадают. Этот факт, в общем-то, ясен. В классе тригонометрических полиномов он доказан в [10]; для полноты изложения приведем его доказательство в $\mathcal{P}_m$.

Лемма 4.1. *При любом* $m \ge 1$ *для любого однородного (в частности, линейного) оператора* Λ_m *в* $\mathcal{P}_m$ *имеет место равенство*

$$\sup\{c_m(\Lambda_m, \varphi) : \varphi \in \Phi\} = \alpha_m(\Lambda_m). \tag{4.15}$$

Доказательство. Если $\Lambda_m \equiv 0$, то обе величины в (4.15) равны нулю. Будем считать, что $\Lambda_m \not\equiv 0$. На данном этапе имеем $1 \le \alpha_m(\Lambda_m) \le c_m(\Lambda_m)$.

Для обоснования леммы осталось доказать, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ выполняется неравенство

$$c_m(\varphi) = c_m(\Lambda_m, \varphi) \le \alpha_m(\Lambda_m);$$

при этом можно считать, что $\alpha_m(\Lambda_m) < +\infty$.

Обозначим через Φ_c множество функций φ, непрерывных, неотрицательных и неубывающих на полуоси $[0, \infty)$ со свойством $\varphi(0) = 0$. Предположим вначале, что $\varphi \in \Phi_c$. Пусть f — измеримая, ограниченная функция на $[-1, 1]$, к примеру, $f = f_m \in \mathcal{P}_m$. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\lambda(u) = \lambda(u; f) = \operatorname{mes}\left\{t \in [-1,1] : |f(t)| \ge u\right\}, \quad u \in [0, \infty), \qquad (4.16)$$

функции f. Как известно (см., например, [11], §10.12, впрочем, это легко проверить самостоятельно), имеет место формула

$$\int_{-1}^{1} \varphi\left(|f(t)|\right) dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi(u) d\lambda(u).$$

Взяв последний интеграл по частям, получим представление

$$\int_{-1}^{1} \varphi\left(|f(t)|\right) dt = \int_{0}^{\infty} \lambda(u) d\varphi(u). \qquad (4.17)$$

При любом $u > 0$ имеем (см. (4.16))

$$\lambda(u; f) = \lambda\left(1; \frac{f}{u}\right) = \mu\left(\frac{f}{u}\right).$$

Поэтому для любого многочлена f_m при любом $u > 0$ выполняется неравенство

$$\lambda(u; \Lambda_m f_m) \le \alpha_m(\Lambda_m) \lambda(u; f_m). \qquad (4.18)$$

Поскольку $\alpha_m(\Lambda_m) \ge 1$, это неравенство имеет место и при $u = 0$. В силу (4.17) и (4.18) имеем

$$\int_{-1}^{1} \varphi\left(|\Lambda_m f_m(t)|\right) dt = \int_{0}^{\infty} \lambda(u; \Lambda_m f_m) d\varphi(u) \le$$

$$\le \alpha_m(\Lambda_m) \int_{0}^{\infty} \lambda(u; f_m) d\varphi(u) = \alpha_m(\Lambda_m) \int_{-1}^{1} \varphi\left(|f_m(t)|\right) dt.$$

Следовательно, если $\varphi \in \Phi_c$, то $c_m(\varphi) \le \alpha_m(\Lambda_m)$.

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \Phi$. Она имеет не более чем счетное множество точек разрыва; обозначим это множество через $U = U(\varphi)$. Можно считать, что в каждой точке разрыва $u > 0$ функция φ непрерывна справа. Функцию φ можно представить в виде суммы $\varphi = \varphi_c + \varphi_s$ непрерывной функции $\varphi_c \in \Phi_c$ и функции скачков φ_s. Для функции φ_c (по доказанному) имеем $c_m(\varphi_c) \le \alpha_m(\Lambda_m)$. Убедимся, что такое же неравенство имеет место и для функции φ_s. Неравенство (4.18) можно интерпретировать как неравенство $c_m(\delta_u) \le \alpha_m(\Lambda_m)$ для функции скачка δ_u в точке $u > 0$, определенной формулами

$$\delta_u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < u, \\ 1, & t \ge u. \end{cases}$$

В силу неравенства (4.14) функция скачка в точке 0

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

обладает этим же свойством. Функция φ_s представима в виде

$$\varphi_s = \sum_{u \in U} q(u)\,\delta_u,$$

где $q(u) \ge 0$ есть величина скачка в точке разрыва u функции φ. Отсюда следует, что для функции скачков φ_s действительно выполняется неравенство $c_m(\varphi_s) \le \alpha_m(\Lambda_m)$. Окончательно имеем $c_m(\varphi) = \max\{c_m(\varphi_c), c_m(\varphi_s)\} \le \alpha_m(\Lambda_m)$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *При любом $m \ge 1$ для наилучшей константы α_m в неравенстве (4.9) имеет место формула*

$$\alpha_m = 1. \tag{4.19}$$

Доказательство. Для константы α_m справедлива формула

$$\alpha_m = \sup\left\{ \frac{\mu(2^{-(m-1)} a_m x^m)}{\mu(f_m)} : f_m \in \mathcal{P}_m^* \right\}; \tag{4.20}$$

здесь верхняя грань берется по множеству $\mathcal{P}_m^*$ многочленов $f_m \in \mathcal{P}_m$, для которых $\mu(f_m) > 0$ или, что то же самое, $\|f_m\|_{C[-1,1]} = \max\{|f_m(x)| : x \in [-1,1]\} > 1$. Представим старший коэффициент многочлена $f_m \in \mathcal{P}_m^*$ в виде $a_m = y 2^{m-1}$. Тогда, исходя из представления (4.20), можем записать

$$\alpha_m = \sup_{y>1} \frac{\mu(yx^m)}{\sigma_m(y)}.$$

При $y > 1$ имеем

$$\mu(yx^m) = 2\left(1 - y^{-1/m}\right).$$

Применяя теорему 1.1, получаем

$$\alpha_m = \sup_{y>1} \frac{\mu(yx^m)}{2(1 - y^{-1/m})} = 1;$$

тем самым равенство (4.19) проверено.

Лемма доказана.

Теорема 4.1 в силу леммы 4.2 является частным случаем леммы 4.1.

Следствие. *Для любой функции* $\varphi \in \Phi$ *во множестве* $\mathcal{P}_m$ *при* $m \ge 1$ *имеет место неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \varphi\left(\left|f_m(x)\right|\right) dx \;\ge\; \int_{-1}^{1} \varphi\left(\left|2^{-(m-1)} a_m x^m\right|\right) dx, \qquad f_m \in \mathcal{P}_m. \qquad (4.21)$$

При любом $m \ge 1$ *на классе всех функций* $\varphi \in \Phi$ *(а именно, на функции (4.7)) неравенство (4.21) неулучшаемо.*

Для сравнения отметим следующий факт. В пространстве $L^1(-1,1)$ наименее уклоняющимся от нуля (со старшим коэффициентом, равным 1) является нормированный многочлен Чебышева второго рода (см., например, [7], п. 2.9.31)

$$U_m(x) = \frac{1}{2^m} \frac{\sin(m+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и при этом

$$\int_{-1}^{1} \left|U_m(x)\right| dx = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Следовательно, для функции $\varphi_1(u) = u$ наилучшей в неравенстве (4.5) является константа

$$c_m(\varphi_1) = \frac{2}{m+1}.$$

1. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979.
2. *Арестов В. В., Менделев А. С.* О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля // Докл. АН. – 2009. – **425**, № 6. – С. 733 – 736.
3. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.; Л.: Наука, 1964.
4. *Чебышев П. Л.* Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева: В 5 т. Т. 2. Математический анализ. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – С. 23 – 51.
5. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов. – М.: ОНТИ, 1937.
6. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979.
7. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.
8. *Глазырина П. Ю.* Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Мат. заметки. – 2005. – **78**, № 1. – С. 59 – 65.
9. *Бабенко А. Г.* Неравенства слабого типа для тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд-ния РАН. – 1992. – **2**. – С. 34 – 41.
10. *Арестов В. В.* Некоторые экстремальные задачи для тригонометрических полиномов относительно функционалов типа φ-нормы // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. – Тула: Изд-во Тул. ун-та, 2007. – С. 18 – 21.
11. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

Получено 19.10.09