УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачів. держ. ун-т),
Р. А. Кацала (Ужгород. нац. ун-т)

ВЛАСТИВОСТІ ОБЕРНЕНИХ ПОХІДНИХ

New properties of reciprocal derivatives are established.

Установлены новые свойства обратных производных.

1. Вступ. Розвинення функцій у ланцюговий дріб належить до важливих задач теорії наближення разом із наближеннями степеневими рядами, ортогональними многочленами, апроксимаціями Паде і т. п. оскільки такі розвинення можна використовувати для обчислення значень функцій на комп'ютері [1, 2]. Розвинення функції у ланцюговий дріб отримують із розвинення функції у степеневий ряд шляхом побудови відповідного даному степеневому ряду правильного ланцюгового C-дробу [3 – 6]. Можна також отримати розвинення функції в ланцюговий дріб, якщо скористатися формулою Тіле [7, 8]. У роботі [9] встановлено еквівалентність цих двох способів розвинення функцій у правильний ланцюговий C-дріб.

У 1909 р. Т. Н. Тіле у роботі [7] увів до розгляду обернені поділені різниці, за допомогою яких визначив обернені похідні для функції однієї дійсної змінної й отримав аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів. Властивості обернених різниць та обернених похідних наведено в [7, 8, 10].

У даній роботі ми встановимо деякі нові властивості обернених похідних.

2. Інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле. Нехай функцію $f(x) \in \mathbf{C}([\alpha, \beta])$ задано значеннями в точках множини

$$\Lambda = \big\{x_i\colon\ x_i \in [\alpha,\beta],\ \ i = 0,1,\ldots,n,\ \ x_i \neq x_j \ \text{ при } \ i \neq j\big\},$$

і $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

За значеннями функції в точках множини Λ побудуємо інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле (ІЛДТ) [7]

$$D_n(x) = b_0 + \frac{x - x_0}{b_1} \underset{+}{} \frac{x - x_1}{b_2} \underset{+}{} \ldots \underset{+}{} \frac{x - x_{n-1}}{b_n} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{b_k}. \quad (1)$$

Коефіцієнти b_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, ІЛДТ (1) можна визначити з умови $y_k = D_n(x_k)$ за допомогою одного з двох еквівалентних методів:

а) обчислити послідовність обернених поділених різниць $\Phi_k[x_0, \ldots, x_k; f(x)]$, $k = 0, \ldots, n$, за формулою [10, 11]

$$\Phi_k\big[x_0, \ldots, x_k; f(x)\big] =$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{\Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k; f(x)] - \Phi_{k-1}[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_{k-1}; f(x)]},$$

де $\Phi_0[x; f(x)] = f(x)$, а тоді $b_k = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k; f(x)]$, $k = 0, 1, \ldots, n$;

б) використати рекурентну формулу [12]

$$b_0 = y_0, \quad b_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{-b_{k-1}} \underset{+}{} \ldots \underset{+}{} \frac{x_k - x_1}{-b_1} \underset{+}{} \frac{x_k - x_0}{y_k - b_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обернена поділена різниця $\Phi_k[x_0, \ldots, x_k; f(x)]$ є симетричною функцією лише двох останніх своїх аргументів, x_{k-1}, x_k. Водночас, як показано в [10, 11], лінійна комбінація обернених поділених різниць

$$\rho_k[x_0, \ldots, x_k; f(x)] = \Phi_k[x_0, \ldots, x_k; f(x)] + \Phi_{k-2}[x_0, \ldots, x_{k-2}; f(x)] + \ldots$$
$$\ldots + \Phi_{k-2[k/2]}\left[x_0, x_{k-2[k/2]}; f(x)\right],$$

яка називається оберненою різницею k-го порядку, симетрична відносно всіх своїх $k+1$ аргументу.

Якщо в оберненій різниці k-го порядку перейти до границі при $x_0,\ x_1, \ldots, x_k \to$ $\to x$, то отримаємо обернену похідну k-го порядку [7], яку позначають через ${}^{(n)}f(x)$. Отже,

$${}^{(n)}f(x) = \lim_{x_0, x_1, \ldots, x_n \to x} \rho_n\left[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)\right], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

і, зокрема,

$${}^{\backprime}f(x) = \lim_{x_1, x_2 \to x} \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{1}{f'(x)}. \tag{2}$$

Для обчислення обернених похідних вищих порядків використовують рекурентні співвідношення

$$\begin{gathered} {}^{(0)}f(x) = f(x), \qquad {}^{\backprime}f(x) = \frac{1}{f'(x)}, \\ {}^{(k)}f(x) = k\,{}^{\backprime}\left({}^{(k-1)}f(x)\right) + {}^{(k-2)}f(x), \quad k = 2, 3, \ldots . \end{gathered} \tag{3}$$

***Зауваження* 1.** Із (3) випливає, що ${}^{(k)}f(x) \neq {}^{\backprime}({}^{(k-1)}f(x))$ і

$${}^{\backprime}\big({}^{(k-1)}f(x)\big) = \frac{{}^{(k)}f(x) - {}^{(k-2)}f(x)}{k} \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Якщо припустити, що існують обернені похідні функції $f(x)$ в околі точки x_* до n-го порядку включно, то отримаємо формулу Тіле [7, 8]

$$f(x) \approx f(x_*) + \frac{x - x_*}{{}^{\backprime}f(x_*)} \; + \; \frac{x - x_*}{2\,{}^{\backprime}[{}^{\backprime}f(x_*)]} \; + \; \frac{x - x_*}{3\,{}^{\backprime}[{}^{(2)}f(x_*)]} \; + \; \ldots \; + \; \frac{x - x_*}{n\,{}^{\backprime}[{}^{(n-1)}f(x_*)]}.$$

3. Властивості обернених похідних. Нехай функція $f(x)$ у кожній точці відрізка $[\alpha, \beta]$ має похідні (скінченне значення, $+\infty$ чи $-\infty$) до n-го порядку, $n \geqslant 1$.

Твердження 1. 1. *Нехай у деякій точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x_0) = 0$. *Тоді* ${}^{\backprime}f(x_0) =$ $= +\infty$, *якщо функція* $f(x)$ *монотонно зростає в деякому околі точки* x_0, *і* ${}^{\backprime}f(x_0) =$ $= -\infty$, *якщо функція* $f(x)$ *монотонно спадає в деякому околі точки* x_0.

2. *Нехай у деякій точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ $f'(x_0) = \pm\infty$, *тоді* ${}^{\backprime}f(x_0) = 0$.

Твердження 1 безпосередньо випливає із (2) та властивостей похідних [13, 14].

***Зауваження* 2.** За аналогією із „звичайними” похідними для обернених похідних можна означити обернену ліву похідну ${}^{\backprime}f_-(x)$, обернену праву похідну ${}^{\backprime}f_+(x)$ та аналог похідних чисел [15].

Із твердження 1 та (3) безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай у деякій точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *має місце* ${}^{(n-2)}f(x_0) = C$, *де* $C = \mathrm{const}$, $C \neq 0$, $|C| < \infty$. *Тоді*: 1) *якщо* ${}^{(n-1)}f(x_0) = 0$, *то* ${}^{(n)}f(x_0) = +\infty$, *якщо в деякому околі точки* x_0 *обернена похідна* ${}^{(n-1)}f(x)$ *монотонно зростає, і* ${}^{(n)}f(x_0) = -\infty$, *якщо обернена похідна* ${}^{(n-1)}f(x)$ *монотонно спадає в деякому околі точки* x_0; 2) *якщо* ${}^{(n-1)}f(x_0) = \pm\infty$, *то* ${}^{(n)}f(x_0) = 0$.

Твердження 3. *Нехай існують обернені похідні функцій* $u = f(x)$ *та* $v = g(x)$. *Тоді обернені похідні суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами*

$$ {}^{\backprime}(u \pm v) = \frac{{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v \pm {}^{\backprime}u}, \tag{4} $$

$$ {}^{\backprime}(u\,v) = \frac{{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}u\,u + {}^{\backprime}v\,v}, \tag{5} $$

$$ {}^{\backprime}(u/v) = \frac{v^2\,{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v\,v - {}^{\backprime}u\,u}. \tag{6} $$

***Зауваження* 3.** Існування обернених похідних функцій $u = f(x)$ та $v = g(x)$ гарантує існування обернених похідних їх суми, різниці, добутку та частки тільки в тому випадку, коли ці похідні скінченні та відмінні від нуля.

Припустимо, що праві частини в (4)–(6) визначено.

Доведення. Із (2) маємо

$$ {}^{\backprime}(u \pm v) = \frac{1}{(u \pm v)'} = \frac{1}{u' \pm v'} = \frac{1}{1/{}^{\backprime}u \pm 1/{}^{\backprime}v} = \frac{{}^{\backprime}v\,{}^{\backprime}u}{{}^{\backprime}v \pm {}^{\backprime}u}\ . $$

Міркуючи аналогічно, у випадку добутку функцій отримуємо

$$ {}^{\backprime}(u\,v) = \frac{1}{(u\,v)'} = \frac{1}{u'\,v + u\,v'} = \frac{1}{v/{}^{\backprime}u + u/{}^{\backprime}v} = \frac{{}^{\backprime}v\,{}^{\backprime}u}{{}^{\backprime}v\,v + {}^{\backprime}u\,u}. $$

У випадку частки функцій u і v маємо

$$ {}^{\backprime}(u/v) = \frac{1}{(u/v)'} = \frac{v^2}{u'\,v - u\,v'} = \frac{v^2}{v/{}^{\backprime}u - u/{}^{\backprime}v} = \frac{v^2\,{}^{\backprime}v\,{}^{\backprime}u}{{}^{\backprime}v\,v - {}^{\backprime}u\,u}. $$

Твердження 4. *Для всіх* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$ {}^{(2n)}(Cf(x)) = C\,{}^{(2n)}f(x)\ , \qquad {}^{(2n+1)}(Cf(x)) = \frac{1}{C}\,{}^{(2n+1)}f(x), \quad C = \mathrm{const}. $$

Доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції. При $n = 0, 1$

$$ {}^{\backprime}(Cf(x)) = \tfrac{1}{C}\,{}^{\backprime}f(x), $$

$$ {}^{\backprime\backprime}(Cf(x)) = 2\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}(Cf(x))) + Cf(x) = \frac{2}{\left(\dfrac{1}{C}\,{}^{\backprime}f(x)\right)'} + Cf(x) = C\,{}^{\backprime\backprime}f(x). $$

Припустимо, що твердження має місце при всіх $n = 1, 2, \ldots, k$. Тоді при $n = k + 1$ із (3) отримуємо

$$ {}^{(2k+2)}(Cf(x)) = \frac{2k + 2}{({}^{(2k+1)}(Cf(x)))'} + {}^{(2k)}(Cf(x)) = $$

$$= \frac{2k+2}{(\frac{1}{C}\,{}^{(2k+1)}f(x))'} + C\,{}^{(2k)}f(x) = C\,{}^{(2k+2)}f(x),$$

$${}^{(2k+3)}(Cf(x)) = \frac{2k+3}{({}^{(2k+2)}(Cf(x)))'} + {}^{(2k+1)}(Cf(x)) =$$

$$= \frac{2k+3}{(C\,{}^{(2k+2)}f(x))'} + \frac{1}{C}\,{}^{(2k+1)}f(x) = \frac{1}{C}\,{}^{(2k+3)}f(x)\;.$$

Отже, і в цьому випадку твердження справджується.

Твердження 5. *Нехай* $C = \mathrm{const}$. *Для кожного* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *мають місце співвідношення*

$${}^{(2n)}(f(x)+C) = {}^{(2n)}f(x) + C, \qquad {}^{(2n+1)}(f(x)+C) = {}^{(2n+1)}f(x)\;.$$

Доведення. Скористаємося методом повної математичної індукції. Легко бачити, що при $n = 0$ твердження справджується. Припустимо, що воно справджується при $n = 1, \ldots, k$. Тоді при $n = k+1$ із (3) маємо

$${}^{(2k+2)}(f(x)+C) = \frac{2k+2}{({}^{(2k+1)}(f(x)+C))'} + {}^{(2k)}(f(x)+C) =$$

$$= \frac{2k+2}{({}^{(2k+1)}f(x))'} + {}^{(2k)}f(x) + C = {}^{(2k+2)}f(x) + C,$$

$${}^{(2k+3)}(f(x)+C) = \frac{2k+3}{({}^{(2k+2)}(f(x)+C))'} + {}^{(2k+1)}(f(x)+C) =$$

$$= \frac{2k+3}{({}^{(2k+2)}f(x)+C)'} + {}^{(2k+1)}f(x) = {}^{(2k+3)}f(x)\;.$$

І в цьому випадку твердження має місце.

Твердження 4 та 5 можна отримати з аналогічних тверджень для обернених різниць шляхом граничного переходу [10]. Крім того, обернені різниці мають наступні властивості.

Твердження 6. *Для кожного* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\rho\left[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}; \frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{\rho[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}; f(x)]},$$

$$\rho\left[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}; \frac{a+bf(x)}{c+df(x)}\right] = \frac{a+b\rho\,[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}; f(x)]}{c+d\rho[x_0, x_1, \ldots, x_{2n}; f(x)]},$$

де a, b, c, d — *сталі.*

Якщо у формулах твердження 6 перейти до границі при $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \to x$, то отримаємо наступні властивості для обернених похідних парного порядку.

Твердження 7. *При кожному* $n = 0, 1, 2, \ldots$

$${}^{(2n)}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{{}^{(2n)}f(x)}, \qquad {}^{(2n)}\left(\frac{a+bf(x)}{c+df(x)}\right) = \frac{a+b\,{}^{(2n)}f(x)}{c+d\,{}^{(2n)}f(x)},$$

де a, b, c, d — *сталі.*

За допомогою методу повної математичної індукції, використовуючи (4) та (5), легко довести наступне твердження.

Твердження 8. *Якщо при кожному $i, i = 1, 2, \ldots, n$, існує ${}^{\backprime}f_i(x)$, то*

$$ {}^{\backprime}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} {}^{\backprime}f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} {}^{\backprime}f_j(x)}, \tag{7} $$

$$ {}^{\backprime}\!\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \frac{\prod_{i=1}^{n} {}^{\backprime}f_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} {}^{\backprime}f_j(x)\, f_j(x)}. \tag{8} $$

***Зауваження* 4.** Як наслідок із (8) випливає

$$ {}^{\backprime}(f(x)^n) = \frac{{}^{\backprime}f(x)}{n\,(f(x))^{n-1}}\ . $$

Із (4), (5) та (8) легко отримати наступні допоміжні твердження.

Твердження 9. *Якщо функції $u = f(x)$ та $v = g(x)$ мають обернені похідні до другого порядку включно, то*

$$ {}^{\backprime}(u\,{}^{\backprime}u) = \frac{{}^{\backprime}({}^{\backprime}u)}{{}^{\backprime}({}^{\backprime}u) + u}, \tag{9} $$

$$ {}^{\backprime}(v\,{}^{\backprime}v - u\,{}^{\backprime}u) = \frac{{}^{\backprime}({}^{\backprime}u)\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}v)}{v\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}u) - u\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}v)}, \tag{10} $$

$$ {}^{\backprime}(v^2\,{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}v) = \frac{{}^{\backprime}({}^{\backprime}u)\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}v)}{v^2\,{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}u) + 2v\,{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}u)\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}v) + v^2\,{}^{\backprime}v\,{}^{\backprime}({}^{\backprime}v)}. \tag{11} $$

Використосуючи (3), (4) – (6) та (9) – (11), можна встановити формули для знаходження других обернених похідних від суми, різниці, добутку та частки двох функцій.

Твердження 10. *Якщо функції $u = f(x)$ та $v = g(x)$ мають обернені похідні до другого порядку включно, то*

$$ {}^{\backprime\backprime}(u+v) = \frac{({}^{\backprime}u + {}^{\backprime}v)^2({}^{\backprime\backprime}u - u)({}^{\backprime\backprime}v - v)}{({}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u - u) + ({}^{\backprime}v)^2({}^{\backprime\backprime}v - v)} + u + v, $$

$$ {}^{\backprime\backprime}(u-v) = \frac{({}^{\backprime}v - {}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u - u)({}^{\backprime\backprime}v - v)}{({}^{\backprime}v)^2({}^{\backprime\backprime}v - v) - ({}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u - u)} + u - v, $$

$$ {}^{\backprime\backprime}(uv) = \frac{({}^{\backprime}uu + {}^{\backprime}vv)^2({}^{\backprime\backprime}u - u)({}^{\backprime\backprime}v - v)}{u({}^{\backprime}u)^2({}^{\backprime\backprime}u - u) - {}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}v({}^{\backprime\backprime}u - u)({}^{\backprime\backprime}v - v) + v({}^{\backprime}v)^2({}^{\backprime\backprime}v - v)} + uv, $$

$$ {}^{\backprime\backprime}\!\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{({}^{\backprime}vv - {}^{\backprime}uu)^2({}^{\backprime\backprime}u - u)({}^{\backprime\backprime}v - v)}{v(v^2\,({}^{\backprime}v)^2({}^{\backprime\backprime}v - v) + v\,{}^{\backprime}u\,{}^{\backprime}v({}^{\backprime\backprime}v - v)({}^{\backprime\backprime}u - u) - u({}^{\backprime}u)^2\,{}^{\backprime\backprime}v({}^{\backprime\backprime}u - u))} + \frac{u}{v}. $$

***Зауваження* 5.** Із твердження 10 випливає, що питання існування формули n-ї оберненої похідної для суми, добутку та частки двох функцій, тобто деякого аналога формули Лейбніца, залишається відкритим.

Твердження 11. *Нехай функція $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ має обернену похідну ${}^{\backprime}f(x_0)$, для функції $f(x)$ існує однозначна обернена функція $x = g(y)$, яка неперервна у відповідній точці $y = y_0$, де $y_0 = f(x_0)$. Тоді обернена похідна ${}^{\backprime}g(y_0)$ також існує і виконується*

$$ {}^{\backprime}g(y_0) = \frac{1}{{}^{\backprime}f(x_0)}. $$

Доведення. З означення оберненої похідної та умов, які накладено на функцію $f(x)$, випливає [13], що обернена функція $g(x)$ має похідну в точці y_0 і $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Тоді

$$ {}^{\backprime}g(y_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{1/f'(x_0)} = \frac{1}{{}^{\backprime}f(x_0)}. $$

Твердження 12. *Нехай функція $y = f(x)$ має обернену похідну в точці x_0, а функція $z = g(y)$ має обернену похідну в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді складна функція $z = F(x) = g\left(f(x)\right)$ також має в точці x_0 обернену похідну, до того ж*

$$ {}^{\backprime}F(x_0) = {}^{\backprime}g(y_0) \cdot {}^{\backprime}f(x_0). $$

Доведення. При умовах, накладених на функцію $f(x)$, з означення оберненої похідної випливає [13], що складна функція $F(x)$ має похідну в точці x_0 і $F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$. Тоді

$$ {}^{\backprime}F(x_0) = \frac{1}{F'(x_0)} = \frac{1}{g'(y_0)f'(x_0)} = \frac{1}{g'(y_0)} \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = {}^{\backprime}g(y_0){}^{\backprime}f(x_0). $$

1. *Khovanskii A. N.* The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
2. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Математика і інформатика. – 2007. – Вип. 14 – 15. – С. 107 – 116.
3. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
4. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd II. – 315 S.
5. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
7. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 S.
8. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin: Springer, 1924. – 551 S.
9. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C-дробів // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 7. – С. 1005 – 1009.
10. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: Гостехтеориздат, 1953. – 527 с.
11. *Hildebrand F. B.* Introduction to numerical analysis. – 2nd ed. – New York: Dover Publ., Inc, 1987. – 669 p.
12. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. – Вип. 1. – С. 72 – 79.
13. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1969. – Т. I. – 608 с.
14. *Харди Г. Х.* Курс чистой математики. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.– 512 с.
15. *Титчмарш Е.* Теория функций. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

Одержано 15.07.09