УДК 517.956

С. А. Алдашев (Зап.-Казах. аграр.-техн. ун-т, Уральск, Казахстан)

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОГОМЕРНЫХ СМЕШАННЫХ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

We show that there exists a denumerable set of eigen functions of the Tricomi spectral problem for multidimensional mixed hyperbolic parabolic equations.

Показано, що існує зліченна множина власних функцій спектральної задачі Трікомі для багатовимірних мішаних гіперболо-параболічних рівнянь.

Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучена [1], а их многомерные аналоги, насколько известно автору, исследованы мало [2].

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ конусами $K_0 : |x| = t$, $K_1 : |x| = 1 - t$, $0 \le t \le 1/2$, а при $t < 0$ цилиндрической поверхностью $\Gamma =$ $= \{(x,t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = t_0 = \text{const}$, где $|x|$ — длина вектора $x =$ $= (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$. Части конусов K_0, K_1, ограничивающих области D^+, обозначим через S_0 и S^1 соответственно.

Пусть $S = \{(x,t) : t = 0, 0 < |x| < 1\}$, $\Gamma_0 = \{(x,t) : t = 0, |x| = 1\}$.

В области D рассмотрим смешанные гиперболо-параболические уравнения

$$\gamma u = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t) u_{x_i} + e(x,t) u, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где γ — действительное число, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$, $m \ge 2$.

Следуя [1], в качестве многомерной спектральной задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

Задача T_γ. Найти решение уравнения (1) в области D при $t \ne 0$ из класса $C(\bar{D} \setminus \Gamma_0) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{S_0} = 0, \quad u\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots$ $\ldots, m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$,

$$(m-2)!\,n!\,k_n = (n+m-3)!\,(2n+m-2), \qquad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}),$$

$W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [3].

Лемма. *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. *Если* $l \geq m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r)\, Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\tilde{e}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\overline{\tau}_n^k(r)$, $\overline{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты ряда (3) соответственно функций $a_i(t,\theta,t)\,\rho(\theta)$, $a_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\,\rho$, $c(r,\theta,t)\,\rho$, $d_i(r,\theta,t)\,\rho$, $d_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\,\rho$, $i = 1, \ldots, m$, $\rho(\theta)$, $\tau(r,\theta) = u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta) = u_t(r,\theta,0)$, причем $\rho(\theta) \in$ $\in C^{\infty}(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W_2^l(D^+)$, $d_i(x,t)$, $e(x,t) \in W_2^l(D^-) \subset C(\bar{D}^-)$, $l \geq m+1$, при этом $d_i(x,0) = e(x,0) = 0$, $0 < |x| < 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача* T_γ *для каждого* γ *имеет счетное множество собственных функций.*

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид

$$L_0(u) \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)\,u_{x_i} +$$

$$+ \; b(r,\theta,t)\,u_t + c(r,\theta,t)\,u = \gamma u, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n =$

$= n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

При $t \to -0$ на S получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau - \gamma\tau = \nu(r,\theta). \tag{5}$$

Решение задачи T_γ в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)\,Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению. Подставив (6) в (4), а затем умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [4, 5]

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1 - \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-1}^k - na_{in}^k\right)\right]\bar{u}_n^k - \gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\} = 0. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1, \tag{8}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \lambda_1\frac{\rho_1^k}{r^2}\bar{u}_1^k - \gamma\rho_1^k\bar{u}_1^k =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \tag{9}$$

$$\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}\bar{u}_n^k - \gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \right.$$
$$\left. + \tilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m\left(\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k\right)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы уравнений (8) – (10), то оно является и решением уравнения (7).

Заметим, что каждое уравнение системы (8) – (10) можно представить в виде

$$\bar{u}^k_{nrr} - \bar{u}^k_{ntt} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = \gamma\bar{u}^k_n + \bar{f}^k_n(r,t), \tag{11}$$

где $\bar{f}^k_n(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}^1_0(r,t) \equiv 0$.

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [3], из (5) и из первого краевого условия (2) в силу (6) имеем

$$\bar{\tau}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}^k_n - \gamma\bar{\tau}^k_n(r) = \bar{\nu}^k_n(r), \quad 0 < r < 1, \tag{12}$$

$$\bar{u}^k_n(r,r) = 0, \quad 0 \le r \le 1, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{13}$$

Выполняя в (11) – (13) замену переменных $\bar{u}^k_n(r,t) = r^{(1-m)/2}u^k_n(r,t)$ и полагая $\xi = (r+t)/2$, $\eta = (r-t)/2$, соответственно получаем

$$Lu^k_n \equiv u^k_{n\xi\eta} + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u^k_n = \gamma u^k_n + f^k_n(\xi,\eta), \tag{14}$$

$$\tau^k_{n\xi\eta} + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau^k_n - \gamma\tau^k_n = \nu^k_n(\xi), \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$u^k_n(\xi,0) = 0, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{16}$$

$$f^k_n(\xi,\eta) = (\xi+\eta)^{(m-1)/2}\bar{f}^k_n(\xi+\eta, \xi-\eta), \quad \tau^k_n(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\tau}^k_n(2\xi),$$

$$\nu^k_n(\xi) = (2\xi)^{(m-1)/2}\bar{\nu}^k_n(2\xi), \quad \bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m)-4\lambda_n)}{4},$$

$$k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

С использованием общего решения уравнения (14) (см. [6]) в [5] показано, что решение задачи Коши для уравнения (14) имеет вид

$$u^k_n(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\tau^k_n(\eta)R(\eta,\eta;\xi,\eta) + \frac{1}{2}\tau^k_n(\xi)R(\xi,\xi;\xi,\eta) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi\left[\nu^k_n(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta) - \tau^k_n(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\Big|_{\xi_1=\eta_1}\right]d\xi_1 +$$

$$+ \int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta}\left[\gamma u^k_n(\xi_1,\eta_1) + f^k_n(\xi_1,\eta_1)\right]R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\,d\xi_1\,d\eta_1, \tag{17}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu(z) = P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ — функция Римана уравнения $Lu^k_n = 0$ [7], $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = n + \frac{m-3}{2}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial N}\right|_{\xi_1=\eta_1} = \left.\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial N^{\perp}}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial N^{\perp}}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)\right|_{\xi_1=\eta_1},$$ а $N^{\perp}$ — нормаль к прямой $\xi = \eta$ в точке (ξ_1, η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta \le \xi$.

Из уравнения (17) при $\eta = 0$ с учетом (16) получаем

$$0 = \frac{\tau_n^k(\xi)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\xi} \nu_n^k(\xi_1)\, P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu'\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1,$$

$$0 < \xi < \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Далее, из (15), (18) имеем

$$0 = \frac{\tau_n^k(\xi)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\xi}\left(\tau_{n\xi_1\xi_1}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi_1^2}\tau_n^k(\xi_1) - \gamma\tau_n^k(\xi_1)\right) P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1} P_\mu'\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1, \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Решение уравнения (19) будем искать в виде

$$\tau_n^k(\xi) = \xi^{\beta}, \quad 1 < \beta = \text{const}, \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получаем

$$\left[1 + \bar{\lambda}_n + \sqrt{2}\,(\beta - 1)\,\xi\right]\int_0^{\xi} \xi_1^{\beta-2} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = \gamma\int_0^{\xi} \xi_1^{\beta} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1,$$

$$0 < \xi < \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Из формулы [8]

$$\int_0^1 z^{\alpha} P_\mu(z)\, dz = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{-\alpha-1}\,\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha/2-\mu/2)\,\Gamma(\alpha/2+\mu/2+3/2)}, \quad \alpha > -1,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, следует, что если $\beta = \mu - 2s$, $s = 1, 2, \ldots$, то

$$\int_0^{\xi} \xi_1^{\beta-2} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = \int_0^{\xi} \xi_1^{\beta} P_\mu\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right) d\xi_1 = 0.$$

Следовательно, равенство (21) имеет место для любого γ.

Далее, подставив (20), (15) в (17), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$u_n^k(\xi, \eta) = \gamma\int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta} u_n^k(\xi_1, \eta_1) P_\mu(z)\, d\xi_1\, d\eta_1 + F_n^k(\xi, \eta), \tag{22}$$

$$F_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi^\beta+\eta^\beta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_\eta^\xi \left\{\left[(\beta(\beta-1)+\bar{\lambda}_n)\xi_1^{\beta-2} - \gamma\xi_1^\beta\right]P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\xi_1^{\beta-1}(\xi-\eta)}{\sqrt{2}(\xi+\eta)}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\eta}{\xi_1(\xi+\eta)}\right]\right\}d\xi_1 + \int_{1/2}^{\xi}\int_0^{\eta} f_n^k(\xi_1,\eta_1)P_\mu(z)\,d\xi_1\,d\eta_1. \qquad (23)$$

Таким образом, решив сначала задачу (8), (13) $(n=0)$, а затем (9), (13) $(n=1)$ и т. д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$ из (22), $k=\overline{1,k_n}$, $n=0, 1,\ldots$.

Итак, показано, что в области D^+

$$\int_H \rho(\theta)\,(L_0-\gamma)\,u dH = 0. \qquad (24)$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$ плотно в $L_2((t,1-t))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$ плотно в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$ плотно в $L_2((0,1/2))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V = V_0\otimes H\otimes V_1$, плотна в $L_2(D^+)$ [9].

Отсюда и из (24) следует, что

$$\int_{D^+} f(r,\theta,t)(L_0-\gamma)udD^+ = 0$$

и

$$L_0 u = \gamma u \qquad \forall (r,\theta,t)\in D^+.$$

Учитывая оценки [3]

$$|k_n| \le Cn^{m-2}, \qquad \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le Cn^{m/2+p-1},$$

$$C=\text{const}, \quad j=\overline{1,m-1}, \quad p=0,1,\ldots,$$

нетрудно показать, что ряд

$$\tau(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l}r^{\beta+(1-m)/2}Y_{n,m}^k(\theta) \qquad (25)$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l > 3m/2$, $\beta = \mu-2s > (m-1)/2$.

Таким образом, функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-l}r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta) \qquad (26)$$

является решением задачи (4), (2), (25) в области D^+, где функции $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n = 1, 2,\ldots$, находятся из (22) и принадлежат классу $C(\overline{D}^+)\cap$ $\cap\, C^1(D^+\cup S)\cap C^2(D^+)$.

Следовательно, мы пришли в области D^- к первой краевой задаче для уравнения

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t) u = \gamma u \quad (27)$$

с условиями

$$u\big|_S = \tau(r,\theta), \qquad u\big|_\Gamma = 0. \quad (28)$$

Решение задачи (27), (28) будем искать в виде (6).

Подставляя (6) в (27), имеем

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_{01}^1 - \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m} \left(\tilde{d}_{in-1}^k - n d_n^k \right) \right] \bar{u}_n^k - \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k \right\} = 0. \quad (29)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^t + \frac{m-1}{r}\rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1, \quad (30)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \lambda_1 \frac{\rho_1^k}{r^2} \bar{u}_1^k - \gamma \rho_1^k \bar{u}_1^k =$$

$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (31)$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} \bar{u}_n^k - \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k =$$

$$= -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left[\sum_{i=1}^{m} d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} \left(\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k \right) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right],$$

$$k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 2, 3, \ldots . \quad (32)$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы уравнений (30) – (32), то оно является и решением уравнения (29).

Заметим, что каждое уравнение системы (30) – (32) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = \gamma \bar{u}_n^k + \bar{g}_n^k(r,t), \quad (33)$$

где $\bar{g}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{g}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Выполняя в (33) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} u_n^k(r,t)$, получаем

$$Lu_n^k \equiv u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \gamma u_n^k = g_n^k(r,t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{34}$$

при этом краевое условие (28) принимает вид

$$u_0^1(r,0) = 0, \quad u_n^k(r,0) = n^{-l} r^{\beta}, \quad u_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{35}$$

$$g_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2} \bar{g}_n^k(r,t).$$

Решение задачи (34), (35) ищем в виде

$$u_n^k(r,t) = u_{1n}^k(r,t) + u_{2n}^k(r,t), \tag{36}$$

где $u_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$Lu_{1n}^k = g_n^k(r,t), \tag{37}$$

$$u_{1n}^k(r,0) = 0, \quad u_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{38}$$

а $u_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$Lu_{2n}^k = 0, \tag{39}$$

$$u_{20}^1(r,0) = 0, \quad u_{2n}^k(r,0) = n^{-l} r^{\beta}, \quad u_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{40}$$

Решение указанных выше задач, аналогично [10], рассмотрим в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{41}$$

при этом пусть

$$g_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s(t) R_s(r), \quad n^{-l} r^{\beta} = \sum_{s=1}^{\infty} b_s R_s(r). \tag{42}$$

Подставляя (41) в (37), (38), с учетом (42) получаем

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{43}$$

$$R_s(0) = 0, \quad R_s(1) = 0, \tag{44}$$

$$T_{st} + \mu T_s = -a_s(t), \tag{45}$$

$$T_s(0) = 0. \tag{46}$$

Ограниченное решение задачи (43), (44) имеет вид [11]

$$R_s(r) = \sqrt{r}\, J_{\nu}(\mu_s r), \tag{47}$$

где $\nu = n + \frac{m-2}{2}$, $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя первого рода, μ_s — ее нули, $\mu = \gamma + \mu_s^2$.

Решение задачи (45), (46) имеет вид

$$T_s(t) = -\int_0^t a_s(\xi)\exp[-(\gamma+\mu_s^2)(t-\xi)]\,d\xi. \tag{48}$$

Подставляя (47) в (42), находим

$$r^{-1/2} g_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s(t) J_\nu(\mu_s r), \quad 0 < r < 1, \tag{49}$$

$$n^{-l} r^{\beta-1/2} = \sum_{s=1}^{\infty} b_s J_\nu(\mu_s r), \quad 0 < r < 1. \tag{50}$$

Ряды (49), (50) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [12], если

$$a_s(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]^2}\int_0^1 \sqrt{\xi}\, g_n^k(\xi,t)\, J_\nu(\mu_s\xi)\,d\xi, \tag{51}$$

$$b_s = \frac{2n^{-l}}{[J_{\nu+1}(\mu_s)]^2}\int_0^1 r^{\beta+1/2} J_\nu(\mu_s\xi)\,d\xi, \tag{52}$$

μ_s, $s = 1, 2, \ldots$, — положительные нули функций Бесселя, расположенные в порядке возрастания.

Из (47), (48) получим решение задачи (37), (38) в виде

$$u_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}\,J_\nu(\mu_s r)\left(\int_0^t a_s(\xi)\exp[-(\gamma+\mu_s^2)(t-\xi)]\,d\xi\right), \tag{53}$$

где $a_s(t)$ определяется из (51).

Далее, подставляя (41) в (39), (40), получаем уравнение

$$T_{st} + (\gamma+\mu_s^2)T_s = 0,$$

решением которого является

$$T_s(t) = \exp[-(\gamma+\mu_s^2)t]. \tag{54}$$

Из (47), (54) с учетом (42) получим решение задачи (39), (40):

$$u_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s\sqrt{r}\,J_\nu(\mu_s r)\exp[-(\gamma+\mu_s^2)t], \tag{55}$$

где b_s находится из (52).

Следовательно, решив сначала задачу (30), (35) $(n = 0)$, а затем (31), (35) $(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)$ из (36), где $u_{1n}^k(r,t)$, $u_{2n}^k(r,t)$ определяются из (53) и (55), при этом $u_{j0}^1(r,t) \equiv 0$, $j = 0, 1$.

Итак, показано, что в области D^-

$$\int_H \rho(\theta)(L_1-\gamma)\,u\,dH = 0. \tag{56}$$

Пусть $g(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$ плотно в $L_2((0,1))$,

$\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ плотно в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотно в $L_2((t_0, 0))$. Тогда $g(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$, плотна в $L_2(D^-)$.

Отсюда и из (56) следует, что

$$\int_{D^-} g(r, \theta, t)(L_1 - \gamma) u dD^- = 0$$

и

$$L_1 u = \gamma u \qquad \forall (r, \theta, t) \in D^- .$$

Таким образом, функция (26) является решением задачи (27), (28) в области D^-, где функции $u_n^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, определяются из (36) и принадлежат классу $C(\bar{D}^- \setminus \Gamma_0) \cap C^1(D^- \cup S) \cap C^2(D^-)$.

Следовательно, задача T_γ для каждого γ имеет собственные функции вида (26), причем в силу (23) и (52) их счетное множество.

Теорема доказана.

1. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
2. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1983. – 84 с.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
4. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 1. – С. 64 – 68.
5. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
6. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
7. *Copson E. T.* On the Riemann – Green function // J. Ration. Mech. and Anal. – 1958. – **1**. – P. 324 – 348.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 294 с.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 659 с.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т.2. – 295 с.

Получено 26.08.09