УДК 517.925:62.50

**С. С. Жуматов**
(Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан, Алматы)

# ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОГРАММНОГО МНОГООБРАЗИЯ СИСТЕМ НЕПРЯМОГО УПРАВЛЕНИЯ

We obtain sufficient conditions of exponential stability of program manifold of indirect control systems. We establish conditions of regulator high speed, the reregulation, and of the monotonic attenuation of a transition process in the neighborhood of program manifold.

Встановлено достатні умови експоненціальної стійкості програмного многовиду систем непрямого керування, а також умови швидкодії регулятора, перерегулювання, монотонного згасання перехідного процесу в околі програмного многовиду.

Задача построения всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, была сформулирована в работе [1], где приведен и метод ее решения. Эта задача получила дальнейшее развитие как задача построения систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию, решения различных обратных задач динамики, построения систем программного движения. Следует отметить, что в процессе решения этих задач построение устойчивых систем, являясь одной из основных задач теории устойчивости, превратилось в самостоятельную теорию. Подробный обзор этих работ приведен в [2]. Построению систем автоматического управления по заданному многообразию посвящены работы [3 – 5]. В них системы управления были построены для случая, когда нелинейная функция $\varphi(\sigma)$ является скалярной. Установлены достаточные условия абсолютной устойчивости. В [6, 7] решены задачи построения систем автоматического управления, когда нелинейная функция является векторной и удовлетворяет условиям локальной квадратичной связи. Исследованию вопросов об экспоненциальной устойчивости тривиального решения посвящена работа [8]. В [9, 10] установлены условия экспоненциальной устойчивости для систем автоматического управления определенного класса. Задачи синтеза асимптотически устойчивых систем, обладающих заданным качеством, сформулированы в работе [11], где дан метод синтеза законов обратной связи. В [12 – 14] установлены условия приводимости к канонической форме и условия разрешимости задачи Коши, а также исследованы вопросы существования периодических решений для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В работе [15] получены достаточные условия асимптотической устойчивости программного многообразия вырожденных систем автоматического управления.

В настоящей работе решаются задачи установления условий экспоненциальной устойчивости программного многообразия и синтеза систем, обладающих наперед заданными свойствами в виде некоторого многообразия.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу построения устойчивой системы управления следующей структуры:

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T\omega - R_1\xi, \tag{1}$$

по заданному $(n-s)$-мерному гладкому интегральному многообразию $\Omega(t)$, определяемому векторным уравнением

$$\omega(x,t) = 0, \tag{2}$$

где $\omega$ — $(s \le n)$-мерный вектор, $t \in I = [0,\infty[$, при условии $R_1 > 0$, $f(t,x)$ — некоторая $n$-мерная вектор-функция, $B$, $P$ и $R$ — постоянные матрицы размерностей $n \times r$, $s \times r$ и $r \times r$ соответственно, $x$ — $n$-мерный, а $\xi, \sigma, \varphi$ — $r$-мерные векторы, нелинейная вектор-функция управления $\varphi(\sigma)$ по отклонению от заданной программы удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 < \sigma^T \varphi(\sigma) \le \sigma^T K \sigma \quad \forall \sigma \ne 0. \tag{3}$$

В пространстве $R^n$ выделим область $G(R)$:

$$G(R) = \left\{ (t, x) : t \ge 0 \wedge \left\| \omega(t, x) \right\| \le \rho < \infty \right\}. \tag{4}$$

Учитывая необходимое и достаточное условие того, что многообразие $\Omega$ будет интегральным для системы (1), имеем

$$\dot{\omega} = F(t, x, \omega) - HB\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega - R_1 \xi, \quad H = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \tag{5}$$

где $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{\partial \omega}{\partial x} f(t, x) = F(t, x, \omega)$, $F(t, x, \omega)$ — функция Еругина [2], удовлетворяющая условию $F(t, x, 0) \equiv 0$. При $F = F(t, \omega, \xi(\omega, t))$ система (5) называется замкнутой; $\xi = \xi(\omega, t)$ — множество законов обратной связи [11]. Полагая $F = -A\omega$, где $A$ — гурвицева матрица размерности $s \times s$, из (5) получаем

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \quad \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = P^T \omega - R_1 \xi. \tag{6}$$

Следует отметить, что при построении устойчивых систем автоматического управления на программное многообразие (2) также накладывается дополнительное требование устойчивости.

**Определение 1.** *Программное многообразие* $\Omega(t)$ *называется экспоненциально устойчивым при* $t \to \infty$ *относительно вектор-функции* $\omega$, *если в области* (4) *существуют* $N > 0$, $\alpha > 0$ *такие, что выполняется*

$$\left\| z(t) \right\| \le N \left\| z(t_0) \right\| \exp[-\alpha(t - t_0)], \quad t \ge t_0, \tag{7}$$

*для любой функции* $\omega(t_0, x_0)$ *и* $\varphi(\sigma)$, *удовлетворяющей условиям* (3), $\left\| z \right\|^2 = \left\| \omega \right\|^2 + \left\| \xi \right\|^2$.

**Задача 1.** *Установим достаточные условия экспоненциальной устойчивости программного многообразия* $\Omega(t)$ *систем управления относительно вектор-функции* $\omega$.

Возьмем две сферы $\left\| \omega_0 \right\| = R$, $\omega_0 = \omega(t_0)$, $\left\| \omega(t_0^*) \right\| = \varepsilon$, $R >> \varepsilon$. Рассмотрим все множество решений уравнения (6), начинающихся на сфере $R$ и называемых $R$-решениями. Для асимптотически устойчивых систем для любого $\omega_0$ на сфере $R$ существует $t_0^*$ такое, при котором выполняются условия

$$\left\| \omega(t_0^*, t_0, \omega_0) \right\| = \varepsilon, \quad \left\| \omega(t, t_0, \omega_0) \right\| < \varepsilon \quad \forall t > t_0^*. \tag{8}$$

Пусть $t^* = \sup\limits_{\omega_0} t_0^*$.

**Определение 2.** *Интервал* $t^* - t_0$ *называется временем регулирования в* *замкнутой системе, если любое R-решение выходит на сферу* $\varepsilon$ *при* $t_0^* \le t^*$ *и остается внутри нее при* $t > t^*$.

**Задача 2.** *Дано множество* $M$ *законов обратной связи. Требуется определить его подмножество* $M_1$, *на котором выполняется условие* $t^*(R,\varepsilon,\xi) \le$ $\le t_з$ ($t_з$ *— заданное время*).

Задача решается для систем, асимптотически устойчивых относительно вектор-функции $\omega$.

**Экспоненциальная устойчивость программного многообразия.**

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi(\sigma)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и существует положительно определенная функция* $V(\omega,\xi) > 0$, *производная которой в силу системы* (6) *является отрицательно определенной* $-\dot V = W(\omega,\xi) > 0$. *Тогда программное многообразие* $\Omega(t)$ *экспоненциально устойчиво относительно вектор-функции* $\omega$.

***Доказательство.*** Для системы (6) строим положительно определенную функцию Ляпунова

$$V = \omega^T L_0 \omega + 2\omega^T L_1 \xi + \xi^T L_2 \xi + \int_0^\sigma \varphi^T \beta \, d\sigma, \qquad L = L^T > 0, \tag{9}$$

где $L = \begin{Vmatrix} L_0 & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{Vmatrix} > 0$, $\beta = \operatorname{diag}\|\beta_1, \ldots, \beta_r\| > 0$. Производная функции (9) по времени $t$ в силу системы (6) примет вид

$$-\dot V \equiv W = \omega^T G_0 \omega + 2\omega^T G_1 \xi + \xi^T g \xi + 2\omega^T G_2 \varphi + 2\xi^T G_1 \varphi + \varphi^T \rho \varphi > 0, \tag{10}$$

$$G_0 = A^T L_0 + L_0 A, \quad G_1 = L_0 B + A^T L_1, \quad g = BL_1 + L_0 B^T,$$

$$G_2 = -L_1 + \frac{1}{2} A^T P \beta, \quad G_3 = -L_2 + B^T P \beta, \quad \rho = \beta R_1,$$

$$G = \begin{Vmatrix} G_0 & G_1 & G_2 \\ G_1^T & g & G_3 \\ G_2^T & G_3^T & \rho \end{Vmatrix} > 0.$$

На основании свойства (3) и структуры обратной связи $\sigma$ справедливы следующие оценки:

$$0 < \int_0^\sigma \varphi^T(\sigma)\beta \, d\sigma < \frac{\beta_1 k_1}{2}\|\sigma\|^2, \qquad 0 < \|\varphi\|^2 < k_1^2 \|\sigma\|^2,$$
$$\rho_1\|\omega\|^2 + \nu_1\|\xi\|^2 \le \|\sigma\|^2 \le \rho_2\|\omega\|^2 + \nu_2\|\xi\|^2, \tag{11}$$

где $k_1 = \min\{k_i\}$, $\beta_1 = \{\beta_i\}$, $i = 1, \ldots, r$, $k_i$ — собственные числа матрицы $K$, а $\rho_1, \rho_2$ и $\nu_1, \nu_2$ определяются так:

$$\rho_1 = \min_{\omega\neq 0} \frac{\omega^T P P^T \omega}{\omega^T \omega}, \qquad \rho_2 = \max_{\omega\neq 0} \frac{\omega^T P P^T \omega}{\omega^T \omega},$$

$$\nu_1 = \min_{\xi\neq 0} \frac{\xi^T R_1 R_1^T \xi}{\xi^T \xi}, \qquad \nu_2 = \max_{\xi\neq 0} \frac{\xi^T R_1 R_1^T \xi}{\xi^T \xi}.$$

В силу положительной определенности функции $V$ (9) и ее производной $-\dot V$ (10) с учетом оценок (11) имеют место соотношения

$$\gamma_1\left(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2\right) \le V \le \gamma_2\left(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2\right), \tag{12}$$

$$g_1\left(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2\right) \le -\dot V \le g_2\left(\|\omega\|^2 + \|\xi\|^2\right). \tag{13}$$

Здесь

$$\gamma_1 = \min\left\{ l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\rho_1;\; l_1 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\nu_1 \right\},$$

$$\gamma_2 = \max\left\{ l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\rho_2;\; l_2 + \frac{\beta_1 k_1}{2}\nu_2 \right\},$$

$$g_1 = \min g_0 \left\{1 + k_1^2\rho_1;\; 1 + k_1^2\nu_1\right\}, \qquad g_2 = \max g_s \left\{1 + k_1^2\rho_2;\; 1 + k_1^2\nu_2\right\},$$

$l_1$, $l_2$, $g_0$, $g_s$ — наименьшие и наибольшие значения собственных чисел $L$ и $G$.

Пусть $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$. Тогда, принимая во внимание соотношения (12), (13), получаем оценки

$$\gamma_2^{-1} V_0 \exp\alpha_1(t - t_0) \le \|z\|^2 \le \gamma_1^{-1} V_0 \exp\alpha_2(t - t_0), \tag{14}$$

где

$$V_0 = z_0^T L z_0 + \int_0^{\sigma_0} \varphi^T(\sigma)\beta\, d\sigma, \qquad z_0 = z(t_0), \qquad \sigma_0 = \sigma(t_0),$$

$$\alpha_1 = -\frac{g_2}{\gamma_1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{g_1}{\gamma_2}.$$

Отсюда в силу неравенства (12) имеем

$$\|z(t)\|^2 \le \gamma_2\gamma_1^{-1}\|z(t_0)\|^2 \exp 2\alpha(t - t_0), \qquad t \ge t_0, \quad \alpha = \frac{\alpha_2}{2}.$$

Таким образом, при $t \ge t_0$ находим

$$\|z(t)\| \le N\|z(t_0)\| \exp\alpha(t - t_0), \qquad t \ge t_0,$$

где $N = \sqrt{\gamma_2\gamma_1^{-1}}$, а $\|z(t_0)\|$ достаточно мала.

**Условие быстродействия регулятора.** На основании оценок (13), (14) на сфере $R$ выполняется неравенство

$$\|z\|^2 \leq \gamma_1^{-1}\gamma_2 R^2 \exp \alpha_1 (t - t_0). \tag{15}$$

При $t = t_0^*$ из (15) получаем

$$\gamma_1^{-1}\gamma_2 R^2 \exp \alpha_1 (t_0^* - t_0) = \varepsilon^2,$$

откуда следует

$$t_0^* - t_0 = \alpha_2^{-1} \ln \frac{\varepsilon^2 \gamma_1}{R^2 \gamma_2}.$$

Условия быстродействия регулятора имеют вид

$$-\alpha_2^{-1} \sup_R \ln \frac{R^2\gamma_2}{\varepsilon^2\gamma_1} = t_з,$$

где $t_з$ — заданное время.

**Задача перерегулирования.** Рассмотрим любое $R$-решение замкнутой системы (6), определенное для какого-либо закона обратной связи $\xi = \xi(\omega, t)$, и произвольную положительную функцию $\Phi(\omega)$.

Отношение

$$\Pi = \sup_t \frac{\Phi(\omega) - S}{S}, \qquad S > 0, \tag{16}$$

называется перерегулированием [11], $S = \omega(\infty)$ — установившееся значение регулируемой величины после завершения переходного процесса.

**Задача 3.** *Дано множество $M$ законов обратной связи. Требуется определить такое его подмножество $M_2$, на котором выполняется неравенство* $\Pi = \Pi(R, S, \xi) \leq \Pi_з$ ($\Pi_з$ *— заданное число*).

Для решения задачи перерегулирования положим $\Phi(\omega, \xi) = V$, где $V$ определяется соотношением (9). Тогда на основании (15) перерегулирование $\Pi$ будет иметь вид

$$\Pi = \sup_t \frac{\gamma_1^{-1}\gamma_2 \exp \alpha_2 (t - t_0) - s}{s}, \quad s = z(\infty) > 0.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\alpha_2 < 0$, с учетом (14) находим

$$\Pi = \frac{\gamma_1^{-1}\gamma_2 R^2 - s}{s} > 0$$

при условии $R > \sqrt{\gamma_2^{-1}\gamma_1 s}$.

Если $\Pi_з$ — заданное число, то условие перерегулирования получим в виде

$$R^2 \leq s(\Pi_з + 1)\gamma_1\gamma_2^{-1}.$$

**Задача о монотонном затухании.** Переходный процесс в замкнутой системе называется монотонно затухающим [11], если существует такой закон обратной связи $\xi = \xi(\omega, t)$, что любое $R$-решение уравнения (6) удовлетворяет условию

$$\left\| \dot{\omega}(t, t_0, \omega_0) \right\| \le C \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right], \qquad C > 0, \quad \alpha > 0. \tag{17}$$

**Задача 4.** *Дано множество $M$ законов обратной связи. Требуется определить такое его подмножество $M_з$, на котором любое $R$-решение уравнения* (6) *затухает монотонно.*

Для получения условия монотонного затухания дополнительно требуется дифференцируемость вектор-функции $\varphi(\sigma)$ по $\sigma$ и чтобы частная производная удовлетворяла условию

$$K_1 \le \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \le K_2, \qquad K_1 > 0, \quad K_2 > 0.$$

Дифференцируя систему (6) по времени $t$, находим

$$\begin{aligned} \ddot{\omega} &= -A\dot{\omega} - N\dot{\xi}, \\ \ddot{\xi} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\dot{\sigma}, \\ \dot{\sigma} &= P^T\dot{\omega} - R\dot{\xi}. \end{aligned} \tag{18}$$

Строим функцию Ляпунова

$$V = \dot{\omega}^T L_0 \dot{\omega} + \dot{\xi}^T L_1 \dot{\xi}, \qquad L_0 = L_0^T > 0, \qquad L_1 = L_1^T > 0, \tag{19}$$

производная которой в силу системы (18) имеет вид

$$-\dot{V} = \dot{\omega}^T G_0 \dot{\omega} + 2\dot{\omega}^T G_1 \dot{\xi} + \dot{\xi}^T G_2 \dot{\xi}. \tag{20}$$

Здесь

$$G_0 = A^T L_0 + L_0 A, \qquad G_1 = L_0 N - P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}\right)^T L_1,$$

$$G_2 = M^T L_1 + L_1 M, \qquad M = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} R,$$

$$G = \begin{Vmatrix} G_0 & G_1 \\ G_1^T & G_2 \end{Vmatrix} > 0.$$

Из соотношений (19), (20) имеем

$$l_1\left( \|\dot{\omega}\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2 \right) \le V \le l_2\left( \|\dot{\omega}\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2 \right), \tag{21}$$

$$g_1(t)\left( \|\dot{\omega}\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2 \right) \le -\dot{V} \le g_2(t)\left( \|\dot{\omega}\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2 \right), \tag{22}$$

где $l_1 = \min\{l_i^{(0)}, l_i^{(1)}\}$, $l_2 = \max\{l_i^{(0)}, l_i^{(1)}\}$, $g_1(t) = \min\{g_i(t)\}$, $g_2(t) = \max\{g_i(t)\}$; $l_i^{(0)}$, $l_i^{(1)}$, $g_i(t)$ — собственные числа матриц $L_0$, $L_1$, $G$.

На основании оценок (21), (22) получаем

$$V_0 \exp \alpha_1 (t - t_0) \ \leq \ V \leq \ V_0 \exp \alpha_2 (t - t_0), \tag{23}$$

$$\alpha_1 = -l_1 / g_2, \qquad \alpha_2 = -l_2 / g_1, \qquad g_1 = \inf_t \{g_1(t)\}, \qquad g_2 = \sup_t \{g_2(t)\}.$$

Полагая $\|\dot{z}\|^2 = \|\dot{\omega}\|^2 + \|\dot{\xi}\|^2$, в силу (21), (23) имеем

$$\|\dot{z}\|^2 \leq \dot{R}_0^2 \exp \alpha_2 (t - t_0),$$

$$\dot{R}_0^2 = \|\dot{\omega}(t_0)\|^2 + \|\dot{\xi}(t_0)\|^2.$$

Отсюда находим условие монотонности затухания переходного процесса системы (18)

$$\|\dot{z}\| \leq \dot{R}_0 \exp \alpha (t - t_0),$$

где $\alpha = \alpha_2 / 2$.


1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16**, вып. 6. – С. 653 – 670.
2. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. – 1994. – № 1. – С. 5 – 21.
3. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. I // Дифференц. уравнения. – 1973. – № 5. – С. 846 – 856.
4. *Мухаметзянов И. А.* Об устойчивости программного многообразия. II // Там же. – № 6. – С. 1037 – 1048.
5. *Мухаметзянов И. А., Саакян А. О.* Некоторые достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных интегральных многообразий // Проблемы механики управляемого движения. – Пермь, 1979. – С. 137 – 144.
6. *Майгарин Б. Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата, 1980. – 316 с.
7. *Жуматов С. С., Крементуло В. В., Майгарин Б. Ж.* Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управления движением. – Алматы, 1999. – 228 с.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Физматгиз, 1967. – 472 с.
9. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. – М., 1975. – С. 74 – 180.
10. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Физматгиз, 1979. – 336 с.
11. *Летов А. М.* Математическая теория процессов управления. – М., 1981. – 256 с.
12. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993. – № 4. – С. 10 – 15.
13. *Яковець В. П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1278 – 1296.
14. *Яковець В. П.* Про структуру загального розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку // Там же. – 1998. – **50**, № 2. – С. 292 – 298.
15. *Жуматов С. С.* Устойчивость программного многообразия систем управлений с локально-квадратичными связями // Там же. – 2009. – **61**, № 3. – С. 418 – 424.


Получено 02.09.09