УДК 517.51

В. К. Маслюченко, В. В. Нестеренко (Чернів. нац. ун-т)

ТОЧКИ СУКУПНОЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ВЕЛИКІ КОЛИВАННЯ

For the topological spaces X and Y and a metric space Z, we introduce a new class $\mathcal{N}(X\times Y,Z)$ of mappings $f\colon X\times Y\to Z$, which includes all mappings horizontally quasicontinuous and continuous with respect to the second variable. We establish that, for each mapping f from this class and each arbitrary countable-type set B in Y, the set $C_B(f)$ of all points x from X such that f is jointly continuous in every point of the set $\{x\}\times B$ is residual in X. We also prove that if X is a Baire space, Y is a metrizable compact, Z is a metric space, and $f\in\mathcal{N}(X\times Y,Z)$, then for each $\varepsilon>0$, the projection onto X of the set $D^\varepsilon(f)$ of all points $p\in X\times Y$, at which oscillations $\omega_f(p)\ge\varepsilon$, is a closed nowhere dense set in X.

Для топологических пространств X, Y и метрического пространства Z введен новый класс $\mathcal{N}(X\times\times Y,Z)$ отображений $f\colon X\times Y\to Z$, содержащий все горизонтально квазинепрерывные и непрерывные относительно второй переменной отображения, и установлено, что для каждого отображения f из этого класса и произвольного множества B исчислимого типа в Y множество $C_B(f)$ всех точек $x\in X$ таких, что f является совокупно непрерывным в каждой точке множества $\{x\}\times B$, есть остаточным в X. Кроме того, доказано, что если X — беровское пространство, Y — метризуемый компакт, Z — метрическое пространство и $f\in\mathcal{N}(X\times Y,Z)$, то для каждого $\varepsilon>0$ проекция на X множества $D^\varepsilon(f)$ всех тех точек $p\in X\times Y$, в которых колебание $\omega_f(p)\ge\varepsilon$, является замкнутым и нигде не плотным множеством в X.

1. Вступ. У дослідженнях множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій $f\colon X\times Y\to Z$ та їх аналогів, що беруть свій початок від славнозвісної дисертації Р. Бера [1], розставлено ще далеко не всі крапки над „і”, навіть у випадку, коли простір Z є метризовним, а на простір Y накладаються певні умови зліченності чи розглядаються їх модифікації, як-от множини зліченного типу, які були введені у праці [2]. Історію розвитку цієї тематики у XX столітті найповніше висвітлено у дисертації [3], а новітні результати — в дисертації [4]. У цих працях наводяться інтригуючі питання, на багато з яких і досі не знайдено відповіді (див. також [5 – 9]).

У даній статті будемо вивчати два аспекти даної тематики. Перший з них пов'язаний з теоремою Калбрі – Труалліка з [2], згідно з якою для довільних топологічних просторів X і Y, метризовного простору Z, нарізно неперервного відображення $f\colon X\times Y\to Z$ і множини B зліченного типу в Y множина $C_B(f)=\{x\in\in X\colon\{x\}\times B\subseteq C(f)\}$ є залишковою в X. Як безпосередні наслідки цього, в [2] отримано такі результати: якщо простір Y задовольняє першу (другу) аксіому зліченності, то для кожного $y\in Y$ множина $C_y(f)=C_{\{y\}}(f)$ є залишковою (множина $C_Y(f)$ є залишковою). Зрозуміло, що в них умови на X, Y, Z і f зберігаються. Ці наслідки в [10] було перенесено на KC-функції, а в [11] — на K_hC-функції (означення див. у п. 2), але аналога загальної теореми Калбрі – Труалліка для множин зліченного типу не було знайдено ні для KC-функцій, ні тим більше для K_hC-функцій. Ми заповнимо цю прогалину, узагальнивши теорему Калбрі – Труалліка не лише на K_hC-функції, а й на функції з ширшого класу $\mathcal{N}$, ввівши мінімальні умови на функцію f, які гарантують залишковість множини $C_B(f)$. При цьому будемо застосовувати новий метод, який використовує категорні міркування і не спирається, як у [2], на теорему Бера про точки розриву напівнеперервних функцій.

Другий аспект пов'язаний з великими коливаннями. Для функції $f\colon P\to Z$, що задана на топологічному просторі P і набуває значень у метричному просторі Z з метрикою $|\cdot - \cdot|_Z$, коливання на непорожній множині $E \subseteq P$ і в точці $p \in P$, як відомо, вводяться відповідно формулами

$$\omega_f(E) = \sup_{p',\, p'' \in E} |f(p') - f(p'')| \quad \text{i} \quad \omega_f(p) = \inf_{p \in \operatorname{int} U} \omega_f(U).$$

Очевидно, що $C(f) = \{p \in P\colon \omega_f(p) = 0\}$. Тому для множини $D(f) = P \setminus C(f)$ усіх розривів функції f маємо $D(f) = \{p \in P\colon \omega_f(p) > 0\}$. Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $D^\varepsilon(f) = \{p \in P\colon \omega_f(p) \geq \varepsilon\}$. Якщо ε є фіксованим, то про точки з множини $D^\varepsilon(f)$ кажуть як про такі, що мають великі коливання. Оскільки функція $\omega_f\colon P \to [0, +\infty]$ неперервна зверху, то множини $D^\varepsilon(f)$ завжди замкнені в P. Якщо $P = X \times Y$ — добуток двох топологічних просторів, то можна розглянути проекцію $\operatorname{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ множини $D^\varepsilon(f)$ на простір X, яка згідно з теоремою Куратовського [12, с. 200] про проекцію теж буде замкненою, якщо простір Y компактний. Р. Бер довів [1, с. 88–94], що у випадку $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$ і $Z = \mathbb{R}$ для кожної нарізно неперервної функції $f\colon X \times Y \to Z$ і кожного $\varepsilon > 0$ проекція $\operatorname{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ ніде не щільна в X. Метод Бера було проаналізовано у праці [13] і відповідним чином узагальнено, що дало змогу отримати такий же результат у тому випадку, коли простір X сильно зліченно повний і регулярний, Y — метризовний компакт, Z — метричний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — $\overline{C}C$-функція, у якої всі x-розрізи $f^x = f(x, \cdot)\colon Y \to Z$ неперервні та множина $Y_C(f)$ всіх тих $y \in Y$, для яких y-розрізи $f_y = f(\cdot, y)\colon X \to Z$ неперервні, є щільною в Y. У праці [14] ніде не щільність проекції $\operatorname{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ було доведено у випадку, коли простір X є берівським, Y і Z — метричні простори і $f\colon X \times Y \to Z$ — CU-відображення, яке неперервне відносно першої змінної і рівномірно неперервне відносно другої, а в [15] цей результат іншим методом було перенесено на $\overline{C}U$-функції. Це стало можливим в результаті розвитку попередніх підходів із праць [16, 17]. Г. Ган у монографії [18, с. 337] навів одну теорему про ніде не щільність проекції множини $D^\varepsilon(f)$ для нарізно неперервних функцій від n змінних, аналіз доведення якої привів до такого результату [3] (теорема 3.4.2): якщо X — берівський простір, Y — метризовний компакт, Z — метричний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — K_hC-функція, то для кожного $\varepsilon > 0$ множина $\operatorname{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ ніде не щільна в X. Крім того, як випливає з теореми Наміоки [19], це ж має місце у випадку, коли простір X сильно зліченно повний і регулярний, Y — компакт, Z — метричний простір і відображення $f\colon X \times Y \to Z$ є нарізно неперервним.

Оскільки доведення теореми з [3] про великі коливання K_hC-функцій ніде не опубліковано, ми наведемо його тут. Потім запропонуємо інший підхід, який дає змогу одержати відповідну теорему і для відображень з широкого класу $\mathcal{N}$, про який зазначено вище (його означення див. у п. 3).

Нарешті, буде наведено приклад відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, квазінеперервного відносно першої змінної і рівномірно неперервного відносно другої, у якого проекція множини $D^\varepsilon(f)$ на перший співмножник при $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ є скрізь щільною, бо збігається з $\mathbb{Q}$. Цей приклад свідчить про те, що результат Брекенріджа – Нішіури з [14] не можна перенести з CU-функцій на KU-функції. Крім того, визначимо функцію $f\colon \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, яка не входить до класу $\mathcal{N}$, але має властивість Гана, тобто для неї множина $C_Y(f)$ є залишковою з $Y = (0, +\infty)$.

2. Горизонтально квазінеперервні відображення та їх властивості. Нехай X і Y — топологічні простори, $f\colon X \to Y$ — відображення і $x \in X$. Нагадаємо, що відображення називається *квазінеперервним у точці* x, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y і кожного околу U точки x в X існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці $x \in X$. Відомо [2] (твердження 3.1.1), що відображення $f\colon X \to Y$ буде квазінеперервним тоді і тільки тоді, коли $f(U) \subseteq \overline{f(A)}$ для кожної відкритої множини U в X і для кожної щільної в U множини A в X. Поняття квазінеперервності ввів С. Кемпістий [20], відштовхуючись від відповідної властивості нарізно неперервних функцій багатьох дійсних змінних, яку встановили до нього В. Вольтерра і Р. Бер (для $n = 2$) та Г. Ган (для $n > 2$). Воно вивчається в огляді [21].

Нехай X, Y і Z — топологічні простори і $f\colon X \times Y \to Z$ — відображення. Воно називається *горизонтально квазінеперервним у точці* $p = (x, y) \in X \times Y$, якщо для довільного околу W точки $z = f(x, y)$ у просторі Z і довільних околів U і V точок x і y у просторах X і Y відповідно існують точка $b \in V$ і відкрита непорожня множина G в X такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$, і просто *горизонтально квазінеперервним*, якщо f є таким у кожній точці $p \in X \times Y$. Горизонтальна квазінеперервність була введена в [22] як розвиток умови (A) з праці К. Бегеля [23].

Для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$, як звичайно, покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Через $KC(X \times Y, Z)$ позначимо сукупність усіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$ таких, що відображення $f^x\colon Y \to Z$ неперервні для кожного $x \in X$, а відображення $f_y\colon X \to Z$ квазінеперервні для кожного $y \in Y$, а через $K_hC(X \times Y, Z)$ — сукупність усіх горизонтально квазінеперервних відображень $f\colon X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної. Елементи з класу $KC(X \times Y, Z)$ коротко називаються *KC-функціями*, а з $K_hC(X \times Y, Z)$ — *K_hC-функціями*. Зрозуміло, що $KC(X \times Y, Z) \subseteq K_hC(X \times Y, Z)$, але обернене включення, взагалі кажучи, не є правильним.

Нам будуть потрібні наступні прості властивості горизонтально квазінеперервних відображень.

Лема 1. *Нехай X, Y і Z — топологічні простори, $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, U і V — відкриті множини у просторах X і Y відповідно, $A \subseteq X$ і $U \subseteq \overline{A}$. Тоді $f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)}$.*

Доведення. Нехай $p = (x, y) \in U \times V$, $z = f(p)$ і W — окіл точки z у просторі Z. Оскільки f горизонтально квазінеперервне в точці p, то $f(G \times \{b\}) \subseteq W$ для деякої відкритої в X непорожньої множини $G \subseteq U$ і для деякої точки $b \in V$. Але $U \subseteq \overline{A}$, отже, $G \cap A \neq \varnothing$, тобто існує точка $a \in G \cap A$. Тоді $(a, b) \in A \times V$ і $W \cap f(A \times V) \neq \varnothing$, бо $f(a, b) \in W \cap f(A \times V)$. Це показує, що $z \in \overline{f(A \times V)}$.

На відміну від відповідної властивості для квазінеперервних функцій властивість, що встановлена в лемі 1, не є характеристичною для горизонтальної квазінеперервності.

Лема 2. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ скрізь щільна в $X \times Y$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, U і V — відкриті непорожні множини в X і Y відповідно. Покажемо, що $Q_\varepsilon(f) \cap (U \times V) \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $p = (x, y) \in U \times V$ і скористаємося горизонтальною квазінеперервністю f у точці p. Якщо взяти за W відкриту кулю з центром у точці $z = f(p)$ і радіусом $\dfrac{\varepsilon}{3}$ в Z, то існують непорожня відкрита в X множина G в X і точка $b \in V$ такі, що $G \subseteq U$ і $|f(u,b) - z|_Z < \dfrac{\varepsilon}{3}$, як тільки $u \in G$. Тоді для довільних $u', u'' \in G$ будемо мати

$$\big|f(u',b) - f(u'',b)\big|_Z \le |f(u',b) - z|_Z + |f(u'',b) - z|_Z < \frac{2\varepsilon}{3},$$

отже, $\omega_{f_b}(G) \le \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Тому $\omega_{f_b}(x) < \varepsilon$ для довільного $x \in G$. Взявши яку-небудь точку $a \in G$, отримаємо, що $(a,b) \in Q_\varepsilon(f) \cap (U \times V)$, що і дає нам рівність $\overline{Q_\varepsilon(f)} = X \times Y$.

3. Послаблення горизонтальної квазінеперервності і клас $\mathcal{N}$. Кажуть [2], що відображення $f\colon X \times Y \to Z$ має *властивість Гана*, якщо множина $C_Y(f) = \{x \in X\colon \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$ є залишковою в X, тобто її доповнення $X \setminus C_Y(f) = \mathrm{pr}_X(D(f))$ є множиною першої категорії в X, і *властивість Вестона*, якщо для кожного $y \in Y$ множина $C_y(f) = \{x \in X\colon (x,y) \in C(f)\}$ є залишковою в X. Зрозуміло, що з властивості Гана випливає властивість Вестона, але обернене, взагалі кажучи, не вірно. Як уже зазначалося, у праці [11] було доведено, що для метризовного простору Z і топологічного простору X кожна K_hC-функція $f\colon X \times Y \to Z$ має властивість Вестона (Гана), якщо простір Y задовольняє першу (другу) аксіому зліченності.

Наступний приклад показує, що горизонтальна квазінеперервність є занадто сильною умовою у цих теоремах.

***Приклад* 1.** Визначимо функцію $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ так:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \ne 0. \end{cases}$$

У кожній точці осі ординат $x = 0$ функція f не є горизонтально квазінеперервною, але вона має властивість Гана, бо $C_Y(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, і, крім того, f неперервна відносно другої змінної.

Щоб дати таке уточнення результату з [11], яке б включало і цей приклад, уведемо такі властивості відображення $f\colon X \times Y \to Z$:

i) для довільних відкритих непорожніх множин U і V відповідно в X і Y та довільної множини A в X, для якої $U \subseteq \overline{A}$, існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$;

ii) для кожного $\varepsilon > 0$ множина $Q_\varepsilon(f) = \{(x,y) \in X \times Y\colon \omega_{f_y}(x) < \varepsilon\}$ скрізь щільна у просторі $X \times Y$;

iii) множина $X_C(f) = \{x \in X\colon f^x$ — неперервне$\}$ є залишковою в X.

Як бачимо, умова i) є послабленням властивості, встановленої у лемі 1, а умова ii) — це висновок леми 2. Отже, горизонтально квазінеперервні відображення мають властивості i) та ii). Остання властивість iii) є послабленням умови $X_C(f) = X$, яка означає неперервність f відносно другої змінної. В умовах i) та iii) X, Y і Z — довільні топологічні простори, в умові ii) простір Z є метричним.

Для довільних топологічних просторів X та Y і метричного простору Z символом $\mathcal{N}(X \times Y, Z)$ позначимо сукупність усіх відображень $f\colon X \times Y \to Z$, які мають усі три властивості i), ii) та iii), а елементи з $\mathcal{N}(X \times Y, Z)$ назвемо *$\mathcal{N}$-відображеннями*. З результатів попереднього пункту випливає, що $K_hC(X \times Y, Z) \subseteq \mathcal{N}(X \times Y, Z)$.

4. Множини зліченного типу та узагальнення теореми Кальбрі – Труалліка. Як і в [2], підмножину B топологічного простору Y називаємо *множиною зліченного типу*, якщо існує така не більш ніж зліченна система $\mathcal{V} = \{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ відкритих множин V_n в Y, що для кожної точки $y \in B$ система $\mathcal{V}(y) = \{V_n \colon y \in V_n\}$ є базою околів точки y у просторі Y. Така система $\mathcal{V}$ називається *зліченною базою для* B. Увесь простір Y є множиною зліченного типу тоді і тільки тоді, коли він має не більш ніж зліченну базу, тобто задовольняє другу аксіому зліченності, а виконання першої аксіоми зліченності в Y означає, що всі одноточкові множини $\{y\}$ в Y є множинами зліченного типу.

Наступна теорема узагальнює результати з [2, 12] і багато інших результатів такого типу.

Теорема 1. *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір, B — множина зліченного типу в Y і $f \colon X \times Y \to Z$ — $\mathcal{N}$-відображення. Тоді множина $C_B(f) = \big\{x \in X \colon \{x\} \times B \subseteq C(f)\big\}$ є залишковою в X.*

Доведення. Міркуючи від супротивного, припустимо, що доповнення $E_1 = X \setminus C_B(f) = \big\{x \in X \colon (\exists y_x \in B)((x, y_x) \in D(f))\big\}$ є множиною другої категорії в X. За умовою iii) множина $E_2 = X_C(f)$ залишкова в X, тобто доповнення $X \setminus E_2$ є множиною першої категорії в X. Тоді і різниця $E_1 \setminus E_2$ — це множина першої категорії в X, а отже, перетин $E_3 = E_1 \cap E_2$ є множиною другої категорії в X, бо інакше і множина $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \setminus E_2)$ була б множиною першої категорії в X. Оскільки об'єднання послідовності множин першої категорії залишається множиною першої категорії і $E_3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E_3 \colon \omega_f(x, y_x) \geq \dfrac{1}{n}\right\}$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що і $E = \big\{x \in E_3 \colon \omega_f(x, y_x) \geq \varepsilon\big\}$ є множиною другої категорії в X.

Нехай $\mathcal{V} = \{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ — зліченна база для B. Розглянемо множини

$$A_n = \left\{x \in E \colon \quad y_x \in V_n, \quad \omega_{f^x}(V_n) < \frac{\varepsilon}{6}\right\}.$$

Легко перевірити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = E$. Справді, нехай $x \in E$. Тоді $x \in X_C(f)$ і відображення $f^x \colon Y \to Z$ є неперервним, зокрема воно буде неперервним у точці y_x. Тому існує такий окіл V_0 точки y_x в Y, що $\omega_{f^x}(V_0) < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Але $y_x \in B$, отже, $\mathcal{V}(y_x)$ є базою околів точки y_x в Y. Тоді існує такий номер n, що $y_x \in V_n \subseteq V_0$, а значить, $y_x \in V_n$ і $\omega_{f^x}(V_n) < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Отже, $x \in A_n$.

Оскільки E — множина другої категорії в X і $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то існує такий номер m, що множина $A = A_m$ десь щільна в X, тобто відкрита множина $U_0 = \operatorname{int} \overline{A}$ не порожня. Тоді з умови ii) безпосередньо випливає, що існують точка $b \in V = V_m$ і відкрита непорожня множина U в X такі, що $U \subseteq U_0$ і $\omega_{f_b}(U) < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Використавши умову i), отримаємо, що існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G \times V) \subseteq \overline{f((G \cap A) \times V)}$.

Покажемо, що $\omega_f(G \times V) < \varepsilon$. Нехай $|\cdot - \cdot|_Z$ — метрика на Z і $p_i \in G \times V$ при $i = 1, 2$. Для кожного $i = 1, 2$ знайдемо таку точку $q_i \in (G \cap A) \times V$, що $\big|f(p_i) - f(q_i)\big|_Z < \dfrac{\varepsilon}{6}$. Нехай $u_i = pr_X(q_i)$ при $i = 1, 2$. Розглянемо точки $r_i = (u_i, b)$. Оскільки $u_i \in G \cap A \subseteq U$, то

$$\big|f(r_1) - f(r_2)\big|_Z = \big|f_b(u_1) - f_b(u_2)\big|_Z \leq \omega_{f_b}(U) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Покладемо $v_i = \mathrm{pr}_Y(q_i)$. Оскільки $v_i, b \in V = V_m$ і $u_i \in A = A_m$ при $i = 1, 2$, то з означення множини A_m випливає, що

$$\left|f(q_i) - f(r_i)\right|_Z = \left|f^{u_i}(v_i) - f^{u_i}(b)\right|_Z \leq \omega_{f_{u_i}}(V_m) < \frac{\varepsilon}{6}$$

при $i = 1, 2$. На основі цього маємо

$$\left|f(p_1) - f(p_2)\right|_Z \leq \left|f(p_1) - f(q_1)\right|_Z + \left|f(q_1) - f(r_1)\right|_Z + \left|f(r_1) - f(r_2)\right|_Z +$$

$$+ \left|f(r_2) - f(q_2)\right|_Z + \left|f(q_2) - f(p_2)\right|_Z < \frac{5\varepsilon}{6},$$

а отже, $\omega_f(G \times V) \leq \dfrac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon$.

Оскільки $\varnothing \neq G \subseteq U \subseteq U_0 \subseteq \overline{A}$ і множина G відкрита, то існує точка $a \in G \cap A$. З означення множини A_m випливає, що $y_a \in V$, отже, $p = (a, y_a) \in G \times V$, звідки за доведеним отримуємо, що $\omega_f(p) \leq \omega_f(G \times V) < \varepsilon$. Але, з іншого боку, $a \in A \subseteq E$ і тому $\omega_f(p) = \omega_f(a, y_a) \geq \varepsilon$. Отримана суперечність завершує доведення теореми 1.

З теореми 1 безпосередньо випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай X і Y — топологічні простори, Z — метричний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — $\mathcal{N}$-відображення. Тоді*:

а) *якщо простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, то f має властивість Вестона*;

б) *якщо простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, то f має властивість Гана.*

5. Великі коливання: розвиток методу Гана. Щоб розвинути метод Гана з [18], нам потрібен один допоміжний результат (див. [15], доведення теореми 1).

Лема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y і Z — метричні простори з метриками $|\cdot - \cdot|_Y$ і $|\cdot - \cdot|_Z$ відповідно, $f\colon X \times Y \to Z$ — $\overline{C}C$-функція і δ та ε — додатні числа. Тоді множина*

$$A(\delta, \varepsilon) = \Big\{x \in X\colon \ \ (\forall y',\, y'' \in Y)(|y' - y''|_Y < \delta \Rightarrow |f^x(y') - f^x(y'')|_Y \leq \varepsilon)\Big\}$$

є замкненою в X.

Доведення. Нехай всі елементи узагальненої послідовності (x_γ) належать до множини $A(\delta, \varepsilon)$ і $x_\gamma \to a$ в X. Візьмемо довільні y' і y'' з Y, для яких $|y' - y''|_Y < \delta$. Оскільки f є $\overline{C}C$-функцією, то множина $Y_C(f) = \big\{y \in Y\colon f_y$ — неперервне відображення$\big\}$ скрізь щільна в Y. Тому існують такі послідовності елементів y'_j і y''_j з $Y_C(f)$, що $|y'_j - y''_j|_Y < \delta$ для кожного j і $y'_j \to y'$, а $y''_j \to y''$. Для довільних γ і j маємо

$$\left|f_{y'_j}(x_\gamma) - f_{y''_j}(x_\gamma)\right|_Z = \left|f^{x_\gamma}(y'_j) - f^{x_\gamma}(y''_j)\right|_Z \leq \varepsilon,$$

адже $x_\gamma \in A(\delta, \varepsilon)$ і $|y'_j - y''_j|_Y < \delta$. Відображення $f_{y'_j}$ і $f_{y''_j}$ неперервні, тому, перейшовши в даній нерівності до границі відносно γ, одержимо рівність

$$\left|f_{y'_j}(a) - f_{y''_j}(a)\right|_Z = \left|f^a(y'_j) - f^a(y''_j)\right|_Z \leq \varepsilon,$$

звідки, скориставшись неперервністю відображення f^a, отримаємо, перейшовши до границі відносно j, нерівність

$$\left|f^a(y') - f^a(y'')\right|_Z \leq \varepsilon,$$

з якої випливає, що $a \in A(\delta, \varepsilon)$. Це і показує, що множина $A(\delta, \varepsilon)$ є замкненою.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, Y — метризовний компакт, Z — метричний простір і $f \in K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множина $\mathrm{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X.*

Доведення. Зафіксуємо метрику $|\cdot - \cdot|_Y$ на Y, яка породжує його топологію, і нехай, як звичайно, $|\cdot - \cdot|_Z$ — метрика на просторі Z. Візьмемо $\varepsilon > 0$, $\eta = \dfrac{\varepsilon}{6}$, $\delta > 0$ і розглянемо множину $A(\delta, \eta)$ з леми 3. Нехай $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ — скрізь щільна в Y множина (така множина існує, бо Y, як метризовний компакт, є сепарабельним простором). З наслідку теореми 1 випливає, що множини $S_n = C_{b_n}(f)$ є залишковими у просторі X, адже Y, як метризовний простір, задовольняє першу аксіому зліченності. Тоді і множина $S = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ буде залишковою в X. Оскільки звуження $g|_{S\times Y} : S \times Y \to Z$ є $\overline{C}C$-функцією, то за лемою 3 множина $A_0 = A(\delta, \eta) \cap S$ є замкненою в S.

За теоремою Куратовського про проекцію множина $E = \mathrm{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ буде замкненою в X. Припустимо, що вона там десь щільна. Тоді існує така відкрита в X непорожня множина G, що $G \subseteq E$.

Розглянемо замкнені в S множини $F_n = A\left(\dfrac{1}{n}, \eta\right) \cap S$. Оскільки за теоремою Кантора кожна функція $f^x : Y \to Z$ рівномірно неперервна, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = S$. Простір S є берівським в індукованій з X топології, адже X є берівським, а S — залишковою в X [25, c.117]. Тому множина $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{int}_S F_n$ є відкритою і скрізь щільною в S. Оскільки S, як залишкова множина у берівському просторі X, сама є скрізь щільною в X, то і H є скрізь щільною в X множиною. В такому разі $H \cap G \neq \varnothing$.

Таким чином, існує точка $x_0 \in H \cap G$. Оскільки $G \subseteq E$, то $x_0 \in E$, отже, існує така точка $y_0 \in Y$, що $p_0 = (x_0, y_0) \in D^\varepsilon(f)$. Крім того, $x_0 \in H$, отже, існує такий номер m, що $x_0 \in \mathrm{int}_S F_m$. Нехай $V = \left\{ y \in Y : |y - y_0|_Y < \dfrac{1}{2m} \right\}$. Виберемо таку точку $b \in B \cap V$, що $\big|f(x_0, b) - f(x_0, y_0)\big|_Z < \dfrac{\varepsilon}{18}$. Оскільки $x_0 \in S$ і $b \in B$, то $(x_0, b) \in C(f)$, зокрема $x_0 \in C(f_b)$. Тому існує такий відкритий окіл U точки x_0 в X, що $\big|f(x, b) - f(x_0, b)\big|_Z < \dfrac{\varepsilon}{18}$ при $x \in U$ і $U \cap S \subseteq F_m$.

Множина $W = U \times V$ є околом точки p_0 у добутку $X \times Y$ і $\omega_f(p_0) \geq \varepsilon$. Тому $\omega_f(W) \geq \varepsilon$, а отже, існує така точка $p_1 = (x_1, y_1) \in W$, що $\big|f(p_1) - f(p_0)\big|_Z > \dfrac{\varepsilon}{3}$. З горизонтальної квазінеперервності функції f у точці p_1 випливає, що існують точка $y^* \in V$ і відкрита в X непорожня множина U^* такі, що $U^* \subseteq U$ і $|f(x, y^*) - f(x_1, y_1|_Z < \dfrac{\varepsilon}{18}$ при $x \in U^*$. Оскільки множина S скрізь щільна в X, то існує точка $x^* \in S \cap U^*$.

В такому разі, з одного боку, будемо мати

$$\big|f(x^*, b) - f(x^*, y^*)\big|_Z \geq \big|f(p_1) - f(p_0)\big|_Z - \big|f(x^*, b) - f(x_0, b)\big|_Z -$$

$$-\big|f(x_0, b) - f(x_0, y_0)\big|_Z - \big|f(x^*, y^*) - f(x_1, y_1)\big|_Z >$$

$$> \frac{\varepsilon}{3} - 3 \cdot \frac{\varepsilon}{18} = \frac{\varepsilon}{6} = \eta,$$

а з іншого — за побудовою y^*, $b \in B$ і $x^* \in F_m$, бо $x^* \in S \cap U^* \subseteq S \cap U \subseteq F_m$, і, крім того,

$$|b - y^*|_Y \leq |b - y_0|_Y + |y_0 - y^*|_Y < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

отже, $|f(x^*, b) - f(x^*, y^*)|_Z \leq \eta$. Отримана суперечність і доводить теорему.

Зауважимо, що для KC-функцій це твердження іншим способом доведено в [14] (наслідок 3.8).

6. Новий підхід до задачі про великі коливання. У цьому пункті ми підсилимо теорему 2, застосувавши при цьому новий метод.

Теорема 3. *Нехай X — берівський простір, Y — метризовний компакт, Z — метричний простір і $f \in \mathcal{N}(X \times Y, Z)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ множина $\mathrm{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ є замкненою і ніде не щільною в X.*

Доведення. Будемо використовувати позначення з попереднього пункту.

Нехай G — довільна непорожня відкрита в X множина і $E = G \cap X_C(f)$. Оскільки простір X є берівським, то G — множина другої категорії в X. Множина $X_C(f)$ залишкова в X, бо f має властивість iii) з п. 3. Тому E — множина другої категорії в X.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і розглянемо множини $F_n = A\left(\frac{1}{n}, \eta\right) \cap E$, де $\eta = \frac{\varepsilon}{6}$. Зрозуміло, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$. Оскільки E є множиною другої категорії в X, то існує такий номер m, що множина F_m десь щільна в X, тобто $H = \mathrm{int}\,\overline{F}_m \neq \varnothing$. Оскільки множина H відкрита в X і $H \subseteq \overline{F}_m$, то $H \subseteq \overline{H \cap F_m}$, звідки випливає, що $H \cap F_m \neq \varnothing$. Множина $U_0 = H \cap G$, очевидно, відкрита і непорожня, бо $U_0 \supseteq H \cap F_m$. Покладемо $A_0 = U_0 \cap F_m$. Зрозуміло, що $A_0 \subseteq U_0 \subseteq \overline{A}_0$.

Нехай $\delta = \frac{1}{2m}$ і $V_\delta(y) = \{v \in Y \colon |v - y|_Y < \delta\}$. З відкритого покриття $\{V_\delta(y) \colon y \in Y\}$ компактного простору Y виділимо скінченне підпокриття, що складається з куль $V_k = V_\delta(y_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Розглянемо відкриту непорожню множину $U_0 \times V_1$ у добутку $X \times Y$. Оскільки f задовольняє умову ii), то множина $Q_\eta(f)$ скрізь щільна в $X \times Y$. Отже, існують точка $b \in V_1$ і непорожня відкрита в X множина G_1 такі, що $G_1 \subseteq U_0$ і $\omega_{f_b}(G_1) < \eta$. Згідно з умовою i) існує така відкрита в X і непорожня множина U_1, що $U_1 \subseteq G_1$ і $f(U_1 \times V_1) \subseteq \overline{f((U_1 \cap A_0) \times V_1)}$.

Покажемо, що $\omega_f(U_1 \times V_1) < \varepsilon$. Нехай p_1 і p_2 — довільні точки з $U_1 \times V_1$. Оскільки $f(p_i) \in \overline{f((U_1 \cap A_0) \times V_1)}$ при $i = 1, 2$, то для кожного $i = 1, 2$ існує така точка $q_i = (u_i, v_i) \in (U_1 \cap A_0) \times V_1)$, що $|f(p_i) - f(q_i)|_Z < \eta$. Розглянемо точки $r_i = (u_i, b)$ при $i = 1, 2$. Оскільки b і v_i — точки з кулі V_1, то

$$|b - v_i|_Y \leq |b - y_1|_Y + |y_1 - v_i|_Y < 2\delta = \frac{1}{m}.$$

Але $u_i \in A_0 \subseteq F_m$ при $i = 1, 2$. Тому згідно з означенням множини F_m маємо

$$|f(q_i) - f(r_i)|_Z = |f^{u_i}(v_i) - f^{u_i}(b)|_Z \leq \eta$$

при $i = 1, 2$. Крім того, $u_i \in U_1 \subseteq G_1$ при $i = 1, 2$, отже,

$$|f(r_1) - f(r_2)|_Z = |f_b(u_1) - f_b(u_2)|_Z \leq \omega_{f_b}(G_1) < \eta.$$

Тому

$$|f(p_1)-f(p_2)|_Z \le |f(p_1)-f(q_1)|_Z + |f(q_1)-f(r_1)|_Z +$$

$$+|f(r_1)-f(r_2)|_Z + |f(r_2)-f(q_2)|_Z + |f(q_2)-f(p_2)|_Z < 5\eta.$$

Звідси випливає, що $\omega_f(U_1\times V_1) \le 5\eta < \varepsilon$.

Повторивши цю побудову для множини $U_1\times V_1$, одержимо непорожню відкриту в X множину U_2 таку, що $U_2 \subseteq U_1$ і $\omega_f(U_2\times V_2) < \varepsilon$. Так крок за кроком ми зможемо визначити відкриті непорожні множини $U_1, U_2, \ldots, U_n$ в X такі, що $U_{k-1} \supseteq U_k$ і $\omega_f(U_k\times V_k) < \varepsilon$ при $k = 1,\ldots,n$.

Покладемо $U = U_n$. Зрозуміло, що $U \subseteq U_k$ для кожного $k = 1,\ldots,n$, а тому $\omega_f(U\times\ V_k) \le\ \omega_f(U_k\times V_k) < \varepsilon$. Для кожної точки $p = (x,y) \in U\times Y$ існує таке $k = 1,\ldots,n$, що $y \in V_k$, і тому $\omega_f(p) \le \omega_f(U\times V_k) < \varepsilon$, адже множини $U\times V_k$ відкриті в $X\times Y$. Таким чином, $(U\times Y)\cap D^\varepsilon(f) = \varnothing$, отже, $U\cap \operatorname{pr}_X(D^\varepsilon(f)) = \varnothing$. Оскільки множина U відкрита в X і $\varnothing \ne U \subseteq G$, то це і показує, що множина $\operatorname{pr}_X(D^\varepsilon(f))$ ніде не щільна в X. Замкненість цієї множини, як і раніше, випливає з теореми Куратовського.

7. Деякі приклади. Нехай X — берівський, Y — топологічний і Z — метричний простори і відображення $f\colon X\times Y\to Z$ має властивість Гана. Легко перевірити, що тоді f задовольняє умови ii) та iii), до того ж для виконання умови ii) досить і властивості Вестона. Наведемо приклад, який показує, що умова i) може при цьому не виконуватись.

***Приклад* 2.** Нехай $n\to r_n$ — бієкція натурального ряду $\mathbb{N}$ на множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел, $\mathbb{I} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ — множина всіх ірраціональних чисел і $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ — додатна піввісь. Розглянемо функцію $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, яка визначена таким чином: $f(x,y) = 1-2\left|y-n+\dfrac{1}{2}\right|$, якщо $x = r_n$, $n-1\le y\le n$, і $f(x,y) = 0$ в інших точках. Оскільки для кожного n маємо $D(f)\cap(\mathbb{R}\times[n-1,n]) = \{r_n\}\times(n-1,n)$, то $D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{r_n\}\times(n-1,n)$, отже, $\operatorname{pr}_{\mathbb{R}} D(f) = \mathbb{Q}$. Звідси безпосередньо випливає, що f має властивість Гана. Разом з тим f не задовольняє умову i). Справді, для довільної відкритої непорожньої множини G в $\mathbb{R}$ існує таке n, що $r_n\in G$, отже,

$$[0,1] = f(\{z_n\}\times(n-1,n)) \subseteq f(G\times\mathbb{R}^+) \subseteq [0,1],$$

а тому $f(G\times\mathbb{R}^+) = [0,1]$. Але $f((G\cap\mathbb{I})\times\mathbb{R}^+) = \{0\}$, а отже, і $\overline{f((G\cap\mathbb{I})\times\mathbb{R}^+)} = \{0\}$. Таким чином, $\overline{f((G\cap\mathbb{I})\times\mathbb{R}^+)} \not\supseteq f(G\times\mathbb{R}^+)$, незважаючи на те, що $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

Умова компактності в теоремі 2 є істотною, навіть якщо відображення буде квазінеперервним відносно першої змінної і рівномірно неперервним відносно другої. Це видно з наступного прикладу.

***Приклад* 3.** Нехай знову $n\to r_n\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ — бієкція. Визначимо функцію $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ так: $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1}{4}-(x-r_n)^2-(y-n)^2}$, якщо $r_n-\sqrt{\dfrac{1}{4}-(y-n)^2} \le x\le r_n$, і $f(x,y) = 0$ в решті точок. Всі горизонтальні y-розрізи f_y неперервні зліва, а отже, і квазінеперервні. Далі, оскільки функція $g(x,y) = \sqrt{\dfrac{1}{4}-x^2-y^2}$ рівномірно неперервна на компакті $x^2+y^2\le\dfrac{1}{4}$, то всі її x-розрізи g^x при $|x|\le\dfrac{1}{2}$ є одностайно рівномірно неперервними, звідки безпосередньо випливає і рівномірна неперервність всіх x-розрізів f^x функції f. Разом з тим для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $(r_n, n) \in D^\varepsilon(f)$ для кожного n. Отже, проекція A множини $D^\varepsilon(f)$ на вісь абсцис містить множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел, а отже, є скрізь щільною в $\mathbb{R}$. Більш того, легко перевірити, що $D^\varepsilon(f) = \{(r_n, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ і $A = \mathbb{Q}$.

1. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 3. – 1899. – **3**. – P. 1 – 123.
2. *Calbrix J., Troallic J. P.* Applications séparément continues // C.r. Acad. sci. A. – 1979. – **288**. – P. 647 – 648.
3. *Маслюченко В. К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.
4. *Михайлюк В. В.* Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень: Дис. . . . д-ра фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2008. – 333 с.
5. *Нестеренко В. В.* Різні типи квазінеперервності та їх застосування: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 111 с.
6. *Маслюченко О. В.* Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2001. – 164 с.
7. *Maslyuchenko V. K.* Connections between joint and separate properties of functions of several variables // Some Open Problems of Functional Analysis and Function Theory / Eds V. K. Maslychenko, A. M. Plichko. Extracts math. – 2005. – **20**, № 1. – P. 51 – 70.
8. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real Anal. Exch. – 1985 - 1986. – **11**, № 2. – P. 293 – 322.
9. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity II // Ibid. – 1989 - 1990. – **15**, № 1. – P. 248 – 256.
10. *Маслюченко В. К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 3 – 45.
11. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1711 – 1714.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
13. *Маслюченко В. К.* Часткова неперервність многозначних відображень і узагальнення однієї теореми Бера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 62 – 66.
14. *Breckenridge J. C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Acad. Sinica. – 1976. – **4**, № 2. – P. 191 – 203.
15. *Маслюченко В. К.* Задача Діні і рівномірна неперервність // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 80 – 87.
16. *Van Vleck E. B.* A proof of some theorems on pointwise discontinuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – **8**. – P. 180 – 204.
17. *Hahn H.* Theorie der reellen Funktionen. 1 Band. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. – VIII + 600 S.
18. *Hahn H.* Reelle Funktionen. 1 Teil. Punktfunktionen. - Leipzig: Acad. Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932. – 416 S.
19. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**, № 2. – P. 515 – 531.
20. *Kempisty S.* Sur les functions quasicontinues // Fund. Math. – 1932. – **19**. – P. 184 – 197.
21. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch. – 1988 - 1989. – **14**, № 3. – P. 259 – 306.
22. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Про розвиток одного результату Бегеля // Всеукр. наук. конф., присв. 70-річчю нар. проф. П. С. Казімірського (5 – 7 жовтня 1995). Тези доп. Ч. I. – Львів, 1995. – С. 80.
23. *Bögel K.* Über partiell differenzierbare Funktionen // Math. Z. – 1926. – **25**. – S. 490 – 498.
24. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. – М.: Наука, 1975. – 408 с.

Одержано 16.02.09