УДК 517.5

Р. Р. Салимов, Е. С. Смоловая
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ПОРЯДКЕ РОСТА КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

For ring Q-homeomorphisms $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, an order of the growth at infinity is established.

Для кільцевих Q-гомеоморфізмів $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ встановлено порядок зростання на нескінченності.

1. Введение. Как известно, в основу геометрического определения квазиконформных отображений по Вяйсяля (см. [1]), заданных в области G из $\mathbb{R}^n$, положено условие

$$M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области G, где M — конформный модуль семейства кривых в $\mathbb{R}^n$, а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более чем в K раз.

Емкости и модули являются основным геометрическим методом в современной теории отображений. В связи с этим в монографии [2] изучался следующий класс отображений.

Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q: D \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f: G \to \overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ называется Q-*гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^n(x)\, dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ. Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Целью теории Q-гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей между различными свойствами мажоранты Q и самого отображения f.

Впервые неравенство вида (1) было установлено на плоскости для квазиконформных отображений (см. [3]). В дальнейшем в работе [4] для пространственных квазиконформных отображений то же неравенство получено с $Q(x) = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация f,

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$; $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках. Здесь

$$l(f'(x)) := \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Отметим, что неравенство вида (1) было установлено в работе [5] для так называемых отображений, квазиконформных в среднем. Подобные классы отображений в терминах емкостей исследовались также в работах В. М. Миклюкова (см., например, [6]).

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$ (пишут $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$), если

$$\int\limits_{\gamma} \rho \, ds \;\geq\; 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* (конформный) семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{G} \rho^n(x) \, dm(x),$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Проблемы локального и граничного поведения Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ изучались в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работе [7] (см. также [2]), $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работах [8 – 11]. В работе [12] установлено свойство ACL для Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$. Показана также принадлежность таких Q-гомеоморфизмов соболевскому классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и дифференцируемость почти всюду. Эти результаты были перенесены на кольцевые Q-гомеоморфизмы в работе [13]. В данной работе для кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ устанавливается порядок роста на бесконечности.

Пусть G и G' — область в $\overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 2$. Согласно работе [11] (см. также [14, 15]), будем говорить, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно точки* $x_0 \in G$, если

$$M\big(\Delta(fS_1, fS_2, G')\big) \;\leq\; \int\limits_{A} Q(x) \cdot \eta^n\left(|x - x_0|\right) dm(x) \tag{2}$$

выполняется для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\big\}$, $S_i = S(x_0, r_i) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\big\}$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$, и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r) \, dr \;\geq\; 1.$$

Будем также говорить, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом* в области G, если условие (2) выполнено для всех точек $x_0 \in G$.

При $n = 2$ понятие кольцевого гомеоморфизма было впервые введено и плодотворно использовалась для изучения вырожденных уравнений Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z)\, f_z \tag{3}$$

в работах [14, 15]. В указанных работах установлен ряд теорем существования решений (3), являющихся кольцевыми Q-гомеоморфизмами относительно каждой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ с

$$Q(z) = \frac{\left|1 - \dfrac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}\, \mu(z)\right|^2}{1 - |\mu(z)|^2}$$

(ср. с [16]). Таким образом, в случае кольцевых Q-гомеоморфизмов может быть $Q(z) < 1$ на множестве положительной меры, что существенно отличает их от Q-гомеоморфизмов.

Следуя работе [17], пару $E = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. E называем *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ — кольцо, т. е. если B — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. E называем *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят, что конденсатор $E = (A, C)$ лежит в области G, если $A \subset G$. Очевидно, что если $f : G \to \mathbb{R}^n$ — открытое отображение и $E = (A, C)$ — конденсатор в G, то (fA, fC) также конденсатор в fG. Далее $fE = (fA, fC)$.

Пусть $E = (A, C)$ — конденсатор. $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to R^1$ таких, что: 1) u принадлежит $C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для всех $x \in C$, 3) u принадлежит классу ACL, и пусть

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2\right)^{1/2}.$$

Величину

$$\operatorname{cap} E = \operatorname{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^u \, dm$$

называют емкостью конденсатора E.

Известно, что

$$\operatorname{cap} E \geq \frac{(\inf m_{n-1} S)^n}{[m(A \setminus C)]^{n-1}}. \tag{4}$$

Здесь $m_{n-1} S$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия S, являющегося границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, где точная нижняя грань берется по всем таким S (см. предложение 5 из [18]). Из (4), применяя изопериметрическое неравенство, получаем

$$\operatorname{cap} E \geq n^n \Omega_n \left[\frac{m(C)}{m(A \setminus C)}\right]^{n-1}, \tag{5}$$

где Ω_n — n-мерный объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем будем использовать равенство

$$\operatorname{cap} E = M\big(\Delta(\partial A, \partial C; A\setminus C)\big), \tag{6}$$

где для множеств S_1, S_2 и S_3 в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Delta(S_1, S_2; S_3)$ обозначает семейство всех непрерывных кривых, соединяющих S_1 и S_2 в S_3 (см. [19 – 21]).

2. Основная лемма. В дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$. Для доказательства основного результата нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R < \infty$. *Тогда*

$$m\big(fB(x_0, r)\big) \leq m\big(fB(x_0, R)\big) \exp\left\{-n\int\limits_r^R \frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\}, \tag{7}$$

где $q_{x_0}(t)$ *— среднее значение функции* $Q(x)$ *по сфере* $S(x_0, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = t\}$.

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t(x_0) = \{x : t < |x - x_0| < t + \Delta t\}$. Пусть $C_t = \overline{B(x_0, t)}$, $A_{t+\Delta t} = B(x_0, t + \Delta t)$, имеем конденсатор $(A_{t+\Delta t}, C_t)$, тогда $(fA_{t+\Delta t}, fC_t)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$. Согласно (6) имеем

$$\operatorname{cap}(fA_{t+\Delta t}, fC_t) = M\Big(\Delta\big(\partial fA_{t+\Delta t}, \partial fC_t; fR_t(x_0)\big)\Big).$$

Определим функцию $\Phi(t)$ для данного гомеоморфизма f следующим образом: $\Phi(t) = m\big(fB(x_0, t)\big)$. В силу неравенства (5)

$$\operatorname{cap}(fA_{t+\Delta t}, fC_t) \geq n^n\Omega_n\left[\frac{m(fC_t)}{m\big(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t\big)}\right]^{n-1}. \tag{8}$$

Согласно критерию кольцевого Q-гомеоморфизма (см. например, [2, с. 137])

$$\operatorname{cap}(fA_{t+\Delta t}, fC_t) \leq \frac{w_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{sq_{x_0}^{1/(n-1)}(s)}\right)^{n-1}}. \tag{9}$$

Следовательно, из (8), (9) получаем

$$n^n\Omega_n\left[\frac{m(fC_t)}{m\big(fA_{t+\Delta t}\setminus fC_t\big)}\right]^{n-1} \leq \frac{w_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{sq_{x_0}^{1/(n-1)}(s)}\right)^{n-1}},$$

где w_{n-1} — $(n-1)$-мерная площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Далее имеем

$$n\frac{\Phi(t)}{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)} \leq \frac{1}{\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{sq_{x_0}^{1/(n-1)}(s)}}.$$

Разделив обе части на Δt, получим

$$n\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{ds}{sq_{x_0}^{1/(n-1)}(s)} \leq \frac{1}{\Phi(t)}\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}.$$

Устремляя Δt к нулю и учитывая монотонное возрастание функции Φ по t, для почти всех t имеем

$$n\frac{1}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{10}$$

Интегрируя обе части неравенства (10) по $t\in[r, R]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^R\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}dt \leq \ln\frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}$$

(см., например, теорему 7.4. гл. IV в [22]), получаем

$$n\int\limits_r^R\frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \leq \ln\frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}.$$

Следовательно,

$$\exp\left\{n\int\limits_r^R\frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} \leq \frac{\Phi(R)}{\Phi(r)}.$$

Наконец, поскольку $\Phi(r) = m(fB(x_0, r))$ и $\Phi(R) = m(fB(x_0, R))$, получаем оценку (7), что и требовалось доказать.

3. О поведении на бесконечности кольцевых Q-гомеоморфизмов. Формулируемая ниже теорема представляет собой аналог известной теоремы Лиувилля о несуществовании отличной от константы, ограниченной во всей плоскости аналитической функции. Для квазирегулярных отображений данное утверждение получено в работе [23]. Аналогичные вопросы для кольцевых Q-отображений исследовались в работах [24, 25].

Теорема 1. *Пусть* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *— кольцевой* Q*-гомеоморфизм относительно точки* $x_0\in\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R)\exp\left\{-\int\limits_{r_0}^R\frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} > 0, \tag{11}$$

где

$$L(x_0, f, R) = \sup_{|x-x_0|\leq R}|f(x)-f(x_0)|$$

и r_0 — *произвольное положительное число.*

Доказательство. Замечая, что $m(f\,B(x_0,\,R)) \le \Omega_n \cdot L^n(x_0,\,f,\,R)$, из леммы 1 получаем

$$m(fB(x_0,\,r_0)) \;\le\; \Omega_n\,L^n(x_0,f,R)\exp\left\{-n\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{tq_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\}. \tag{12}$$

Очевидно, что $m(fB(x_0,\,r_0)) > 0$ и от R не зависит. Переходя к нижнему пределу в (12) при $R \to \infty$, получаем (11).

Замечание. Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма можеть быть определено относительно ∞. В этом случае сформулированный выше результат можно распространить на отображение f, заданное в областях $G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, содержащих ∞ (см., например, [26]).

Следствие 1. *Пусть* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *кольцевой* Q-*гомеоморфизм относительно точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *с* $q_{x_0}(t) \equiv q$. *Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,\,f,\,R)}{R^{\gamma}} \;>\; 0\,,$$

где $\gamma = q^{1/(1-n)}$.

Следствие 2. *Пусть* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — *кольцевой* Q-*гомеоморфизм относительно точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $q_{x_0}(t) \le c\ln^{n-1}t$ *при* $t > t_0 \ge 1$. *Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,\,f,\,R)}{(\ln R)^{\gamma}} \;>\; 0\,,$$

где $\gamma = c^{1/(1-n)}$.

4. О поведении на бесконечности гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Пусть для отображения $f: G \to \mathbb{R}^n$, имеющего в G частные производные почти всюду, $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f в точке x, $J(x,f)$ — якобиан отображения f в точке x, т.е. детерминант $f'(x)$. В дальнейшем (см. [2])

$$\|f'(x)\| \;=\; \max_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|f'(x)\,h|}{|h|}$$

— *матричная норма* $f'(x)$. Пусть, кроме того,

$$l(f'(x)) \;=\; \min_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{|f'(x)\,h|}{|h|}\,.$$

Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x,\,f) \;=\; \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,\,f)|},$$

если $J(x, f) \neq 0$; $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Внутренняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x, f) \neq 0$; $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках.

Теорема 2. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— гомеоморфизм класса* $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *для которого* $K_0(x, f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *и* r_0 *— произвольное положительно число. Тогда*

$$\liminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R)\exp\left\{-\int_{r_0}^{R} \frac{dt}{t k_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}\right\} = M > 0,$$

где $k_{x_0}(t)$ *— среднее значение функции* $K_I(x, f)$ *по сфере* $S(x_0, t) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = t\right\}$.

***Следствие* 3.** *Если* $k_{x_0}(t) \le c\ln^{n-1}t$ *при* $t > t_0 \ge 1$, *то*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\gamma}} > 0,$$

где $\gamma = c^{1/(1-n)}$.

1. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **229**.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009.
3. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973.
4. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
5. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859 – 861.
6. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд-во Волгоград. ун-та, 2005.
7. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2005. – **30**. – P. 49 – 69.
8. *Игнатьев Ф., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
9. *Игнатьев А., Рязанов В.* К теории граничного поведения пространственных отображений // Там же. – 2006. – **3**, № 2. – С. 199 – 211.
10. *Рязанов В., Салимов Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Там же. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199 – 234.
11. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
12. *Салимов Р.* Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат. – 2008. – **72**, № 5. – С. 141 – 148.
13. *Салимов Р., Севостьянов Е.* *ACL* и дифференцируемость почти всюду кольцевых гомеоморфизмов // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2008. – **16**. – С. 171 – 178.
14. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equations // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117 – 150.

15. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Ukr. Math. Bull. – 2007. – **4**, № 1. – P. 79 – 115.
16. *Gutlyanski V., Martio O., Sugava T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – **357**, № 3. – P. 875 – 900.
17. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – 40 p.
18. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185 – 206.
19. *Gering F. W.* Quasiconformal mappings in complex analysis and its applications. – Vienna: Int. Atomic Energy Agency, 1976. – Vol. 2.
20. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. mat. – 1975. – **13**. – P. 131 – 144.
21. *Shlyk V. A.* On the equality between p-capacity and p-modulus // Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – **34**, № 6. – P. 216 – 221.
22. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
23. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. Math. – 1970. – **465**. – 13 p.
24. *Севостьянов Е.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Укр. мат. вісн. – 2008. – **5**, № 3. – С. 366 – 381.
25. *Севостьянов Е. А.* Устранение особенностей и аналоги теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса для Q-отображений // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 116 – 126.
26. *Севостьянов Е.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. мат. – 2010. – **74**, № 1. – С. 159 – 174.

Получено 07.12.09