УДК 517.5

Р. В. Товкач (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain the exact order of deviations of the Fejer sums on a class of continuous functions. This order is defined by the given majorant of the best approximations.

Получен точный порядок отклонений сумм Фейера на классе непрерывных функций, который определяется заданной мажорантой наилучших приближений.

У даній роботі встановлено порядок спадання точної верхньої грані відхилень сум Фейєра на класах 2π-періодичних функцій багатьох змінних, що визначаються обмеженнями на послідовність найкращих наближень. Зокрема, одновимірний результат С. Б. Стєчкіна поширено на випадок функцій багатьох змінних.

Розглянемо простір $C(T^d)$ неперервних 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x)$, $x \in T^d$, $T^d = (-\pi;\, \pi]^d$ з нормою $\| f \|_C = \max\limits_x | f(x) | < \infty$.

Позначимо через W множину, що складається з поліедрів V з раціональними вершинами, зіркових відносно початку координат, який є внутрішньою точкою V. Позначення nV слід розуміти як множину точок x таких, що $\frac{x}{n} \in V$, тобто $nV = \left\{ x : \frac{x}{n} \in V \right\}$.

Нехай $f(\cdot) \in C(T^d)$,

$$S_n(f;\, V;\, x) \;=\; \sum_{k \in nV} c_k e^{i(k,\, x)} \tag{1}$$

і

$$\sigma_n(f;\, V;\, x) \;=\; \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;\, V;\, x) \tag{2}$$

— відповідно частинні суми її ряду Фур'є і суми Фейєра.

Нехай далі $T_{n,V}$ — множина тригонометричних поліномів з гармоніками з nV, тобто

$$T_{n,V} \;=\; \left\{ t_n : t_n(x) = \sum_{k \in nV} a_k e^{i(k,\, x)} \right\},$$

де a_k — довільні комплексні числа.

Позначимо через $E_{n,V}(f)_C$ найкраще наближення функцій $f(\cdot)$ тригонометричними поліномами з $T_{n,V}$ в метриці C, тобто

$$E_{n,V}(f)_C \;=\; \inf_{t_n \in T_{n,V}} \| f - t_n(x) \|_C .$$

Для заданої послідовності $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, з монотонно спадними членами (тобто $\varepsilon_k \downarrow 0$, $k \to \infty$) позначимо через $C(\varepsilon)$ клас функцій $f \in C(T^d)$ таких, що

$$E_{n,V}(f)_C \;\le\; \varepsilon_{n+1} .$$

Метою даної роботи є визначення точного порядку спадання величини

$$U_n\big(C(\varepsilon), \sigma\big) = \sup_{f\in C(\varepsilon)} \| f(x) - \sigma_n(f; V; x)\|_{C(T^d)}.$$

Теорема. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *має місце співвідношення*

$$\frac{B_1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1} \le U_n\big(C(\varepsilon), \sigma\big) \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1}, \tag{3}$$

де константи B_1 *і* B_2 *залежать від розмірності* d *простору і гомотета* V, *але не залежать від* n *і* f.

В одновимірному випадку таке твердження доведено С. Б. Стєчкіним [2], а при $d > 1$ для $V = \Pi = \big\{x : |x_j| \le \gamma_j, j = 1, 2, \ldots, d\big\}$ — С. П. Байбородовим [3]. Також слід відмітити результати О. І. Кузнєцової [4] для поліедрів.

Доведення. Згідно з теоремою 2 в [1] для будь-яких $f \in C(\varepsilon)$ маємо

$$U_n(f; \sigma) = \| f(x) - \sigma_n(f; V; x)\|_{C(T^d)} \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_{k,V}(f)_C \le$$

$$\le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1}.$$

Тому

$$U_n\big(C(\varepsilon), \sigma\big) \le \frac{B_2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1}. \tag{4}$$

Для доведення оберненої нерівності для класу функцій $C(\varepsilon)$

$$U_n\big(C(\varepsilon), \sigma\big) \ge \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1} \tag{5}$$

побудуємо функцію $f_1(\cdot) \in C(\varepsilon)$, не залежну від n, для якої

$$U_n(f_1, \sigma) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k+1}. \tag{6}$$

Нехай $a_k > 0$ і $\sum_{k\in\mathbb{N}^d} a_k < \infty$. Тоді для функції

$$f_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d} a_k \prod_{j=1}^{d} \cos k_j x_j = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu\in lV\setminus(l-1)V} a_\nu \prod_{j=1}^{d} \cos \nu_j x_j \tag{7}$$

будемо мати

$$E_{n,V}(f_0)_C \le \| f_0(x) - S_n(f_0; V; x)\|_C \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{N}^d\setminus nV} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu. \tag{8}$$

Для величини $U_n(f_0, \sigma)$ знайдемо оцінку зверху, використавши нерівність (8):

$$U_n(f_0, \sigma) = \frac{1}{n+1}\left\| \sum_{k=0}^{n} \big(f_0(x) - S_k(f_0; V; x)\big)\right\|_C \le$$

$$\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\| f_0(x) - S_k(f_0;\, V;\, x)\right\|_C \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=k+1}^{\infty}\sum_{l\in\nu V\setminus(\nu-1)V} a_l =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu . \tag{9}$$

Крім того, враховуючи (7), маємо

$$U_n(f_0,\, \sigma) \geq \left| f_0(0) - \sigma_n(f_0;\, V;\, 0)\right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu - \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1} k \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu . \tag{10}$$

З співвідношень (9) і (10) випливає

$$U_n(f_0,\, \sigma) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu\in kV\setminus(k-1)V} a_\nu . \tag{11}$$

Позначимо через $s(n)$ кількість точок $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d)$, $k_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, d}$, у множині $nV\setminus(n-1)V$, тобто

$$s(n) = \sum_{k\in nV\setminus(n-1)V} 1 .$$

Тепер визначимо функцію $f_1(x)$ таким чином:

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}\sum_{\nu\in kV\setminus(n-1)V}\prod_{i=1}^{d}\cos \nu_i x_i . \tag{12}$$

Для так визначеної функції $f_1(x)$ згідно з (8) маємо

$$E_{n,V}(f_1)_C \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}\, s(k) = \varepsilon_{n+1} .$$

Отже, $f_1(\cdot)$ належить $C(\varepsilon)$.

Покажемо, що

$$U_n(f_1,\, \sigma) = \left\| f_1(x) - \sigma_n(f_1;\, V;\, x)\right\|_C = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1} .$$

На основі рівності (11) знайдемо

$$U_n(f_1,\, \sigma) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}\, s(k) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})\frac{1}{s(k)}\, s(k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_{k+1} .$$

Тобто для функції $f_1(x)$, визначеної рівністю (12), виконуються співвідношення (6), а отже, має місце і співвідношення (5).

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо* $f(\cdot)$ *належить* $C(T^d)$, *то для будь-якого* $r \in \mathbb{N}$

$$U_n(f, \sigma) \leq \frac{B_3}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \omega_r\left(f; \frac{1}{k+1}\right), \tag{13}$$

де B_3 *залежить від розмірності простору* d, *гомотета* V *і числа* r, *а*

$$\omega_r\left(f; \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \sup_{\sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_d^2} \leq \frac{1}{k+1}} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} C_\nu^r f(x_1 + \nu t_1, \ldots, x_d + \nu t_d) \right\|_C .$$

Доведення. Очевидно, що для довільного $k \in (\mathbb{N} \cup 0)$ існують числа μ_i, $\mu_i \in (\mathbb{N} \cup 0)$, такі, що

$$E_{k,V}(f)_C \leq E_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(f)_C, \tag{14}$$

де

$$E_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(f)_C = \inf_{t_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}} \left\| f(x) - t_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) \right\|_C$$

— повне найкраще наближення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in C(T^d)$ тригонометричними поліномами $t_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ порядку $\leq \mu_i$ відповідно по змінних x_i, $i = 1, 2, \ldots, d$. Тепер скористаємось узагальненою теоремою Джексона (див. [5, с. 113], теорема 2.4.1), на основі якої

$$E_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_d}(f)_C \leq B_3 \omega_r(f; \rho), \quad \rho = \sqrt{\mu_1^{-2} + \mu_2^{-2} + \ldots + \mu_d^{-2}} . \tag{15}$$

Враховуючи (3), (14) і (15), отримуємо співвідношення (13).

Наслідок доведено.

1. *Задерей Н. М., Товкач Р. В.* Наближення періодичних функцій багатьох змінних сумами Фейєра // Теорія наближень функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 341 – 347.
2. *Стечкин С. Б.* О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 48 – 60.
3. *Байбородов С. П.* О приближении функций многих переменных прямоугольными суммами Валле Пуссена // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 5. – С. 711 – 730.
4. *Кузнецова О. И.* Сильная суммируемость, неравенства Сидона, интегрируемость // Ряди Фур'є: теорія і застосування : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 142 – 150.
5. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. – Днепропетровск: Полиграфист, 2000. – 320 с.

Одержано 04.12.09,
після доопрацювання — 03.06.10