УДК 512.662.5

Ю. В. Шарко (Ін-т математики НАН України, Київ)

КВАНТУВАННЯ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

For the state of equilibrium of an autonomous system of differential equations, we propose discrete conditions of the stability and asymptotic stability according to Lyapunov.

Для положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений предложены дискретные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову.

1. Вступ. В теорії диференціальних рівнянь для опису поведінки фазових кривих в околі особливої точки використовується теорія Ляпунова [1]. Зокрема, в другому методі Ляпунова суттєву роль відіграють функції Ляпунова. В роботі [2] запропоновано підхід, який базується на розгляді поведінки фазових кривих не вздовж всіх гіперповерхонь функції Ляпунова, а тільки на деякій їх послідовності. В даній роботі продовжено дослідження в цьому напрямку.

2. Вкладені гіперповерхні.

Означення 2.1. *Нехай* $\mathbf{H}^{n-1}$ — *зв'язна компактна гіперповерхня* (*гладкий компактний* $(n-1)$*-вимірний підмноговид*), *яка лежить в околі початку координат* $G \subset \mathbf{R^n}$. *Будемо говорити, що гіперповерхня* $\mathbf{H}^{n-1}$ *обмежує початок координат, якщо* $\mathbf{0} \notin \mathbf{H}^{n-1}$ *і* $\mathbf{H}^{n-1}$ *є межею компактної множини* $\mathbf{K}$, *до якої належить початок координат.*

Означення 2.2. *Нехай* $\mathbf{H}_i^{n-1} \subset \mathbf{R^n}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — *гіперповерхні, які обмежують початок координат. Будемо говорити, що* $\mathbf{H}_i^{n-1}$ *є збіжною послідовністю гіперповерхонь, якщо* $\mathbf{H}_i^{n-1}$ *не перетинаються та існують компактні множини* $\mathbf{K}_i$ *з межами* $\mathbf{H}_i^{n-1}$, *для яких виконуються умови* $\bigcap_i \mathbf{K}_i = \mathbf{0} \in \mathbf{R^n}$ *і* $\mathbf{K}_i \supset \mathbf{K}_j$ *для* $i < j$.

Лема 2.1. *Нехай в околі початку координат* G *задано додатно* (*від'ємно*) *визначену диференційовну функцію* $z = F(\mathbf{x})$ *таку, що* $F(\mathbf{0}) = 0$. *Тоді в околі* G *існує збіжна послідовність гіперповерхонь* $\mathbf{H}_i^{n-1}$. *Числа* $a_i = F(\mathbf{H}_i^{n-1})$ *є регулярними значеннями функції* $z = F(\mathbf{x})$. *Послідовність* (a_i) *прямує до* 0, *якщо* i *прямує до* ∞.

Доведення. Припустимо, що функція $z = F(\mathbf{x})$ є додатно визначеною. За теоремою Сарда [3] можна вибрати послідовність (a_i) різних регулярних значень функції $z = F(\mathbf{x})$, які монотонно збігаються до нуля. Розглянемо кулю D_ε радіуса ε з центром у початку координат. Зафіксуємо індекс i_0 та побудуємо множину $F^{-1}[0, a_{i_0}]$, вона може складатися з багатьох компонент зв'язності. Виберемо компоненту зв'язності P_{i_0}, до якої належить початок координат. Множина P_{i_0} є гладким многовидом з краєм і, взагалі кажучи, може бути некомпактною. Покажемо, що знайдеться значення функції a_{i_k}, для якого відповідна компонента зв'язності P_{i_k}, до якої належить початок координат, лежить всередині кулі D_ε. Припустимо протилежне, нехай для всіх значень a_i відповідні компоненти зв'язності P_i, до яких належить початок координат, не лежать всередині кулі D_ε і, отже, перетинають її межу — сферу S_ε^{n-1}. Зауважимо, що за побудовою для кожного індексу i

множина $Q_i = P_i \cap D_\varepsilon$ не є порожньою. Розглянемо звуження функції $z = F(\mathbf{x})$ на сферуS_ε^{n-1} і позначимо отриману функцію через $\widehat{F}$. Очевидно, що $\widehat{F}$ є диференційовною функцією. Оскільки сфера S_ε^{n-1} є компактним гладким підмноговидом, то значення функції $\widehat{F}$ належить сегменту $[d_0, d_1]$ такому, що $0 \overline{\in} [d_0, d_1]$. Нехай a_{j_0} — значення функції $z = F(\mathbf{x})$, строго менше ніж $[d_0]$. Очевидно, що компонента зв'язності P_{j_0} лежить всередині сфери S_ε^{n-1}, не перетинаючи її, бо на ній функція $z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ набуває значень із проміжку $[0, a_{j_0}]$ і початок координат належить P_{j_0}. Таким чином, край многовиду P_{j_0}, який позначимо через $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$, є гіперповерхнею, яка обмежує початок координат. Зрозуміло, що для всіх інших значень (a_j) функції $z = F(\mathbf{x})$, які менші ніж a_{j_0} відповідні компоненти зв'язності P_j будуть задовольняти умову $P_{j_0} \supset P_{j_0+1} \supset P_{j_0+2} \supset \ldots$. За побудовою межі многовидів P_j є збіжною послідовністю гіперповерхонь. Для від'ємно визначеної функції міркування аналогічні.

Лему доведено.

Означення 2.3. *Нехай в околі початку координат G задано диференційовну функцію $z = F(\mathbf{x})$ таку, що $F(\mathbf{0}) = 0$. Будемо говорити, що функція $z = F(\mathbf{x})$ задовільняє умову $\mathbf{L}$, якщо існує послідовність її регулярних значень (a_i), яка збігається до 0, множина $F^{-1}(a_i)$ має компоненту зв'язності $\mathbf{H}_i^{n-1}$, яка є гладкою гіперповерхнею, що обмежує початок координат, і діаметри гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$ прямують до 0, якщо i прямує до ∞.*

З леми 2.1 випливає, що додатно (від'ємно) визначена диференційовна функція, яка задана в околі початку координат, задовольняє умову $\mathbf{L}$.

Припустимо, що в околі G задано диференційовну функцію $z = F(\mathbf{x})$, яка задовольняє умову $\mathbf{L}$. Виберемо деяку її збіжну послідовність гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$. У кожній точці $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$ визначено ненульовий вектор градієнта $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(\mathbf{x})$. Припишемо гіперповерхні знак $+$, якщо $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F(\mathbf{x})$ направлений в середину $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$, і знак $-$ у протилежному випадку. Знак гіперповерхні $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$ будемо позначати через $\varepsilon(\mathbf{H}_{i_0}^{n-1})$.

Лема 2.2. *Нехай в околі початку координат G задано диференційовну функцію $z = F(\mathbf{x})$ така, що $F(\mathbf{0}) = 0$. Припустимо, що початок координат є ізольованою компонентою зв'язності поверхні рівня $F^{-1}(0)$. Тоді функція $z = F(\mathbf{x})$ задовольняє умову $\mathbf{L}$.*

Доведення. Розглянемо кулю D^n з центром в початку координат і таку, що $D^n \bigcap F^{-1}(0) = \mathbf{0}$. Внаслідок ізольованості початку координат, компоненти зв'язності поверхні рівня $F^{-1}(0)$, така куля завжди існує. Виберемо довільну точку $\mathbf{x}$ з внутрішності D^n і нехай $a = F(\mathbf{x})$. Якщо $a > 0$, то для всіх точок кулі D^n, за винятком початку координат, значення функції $z = F(\mathbf{x})$ буде додатним. Припустимо протилежне, нехай існує в D^n точка $\mathbf{y}$ така, що $b = F(\mathbf{y})$ і $b < 0$. Розглянемо в кулі D^n неперервний шлях $\gamma(t)$, який з'єднує точки $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ і не проходить через початок координат. Звуження функції $z = F(\mathbf{x})$ на $\gamma(t)$ є неперервною функцією $g(\gamma(t))$, яка набуває на кінцях $\gamma(t)$ значення протилежних знаків. За теоремою про проміжні значення непервної функції $g(\gamma(t))$ повинна набувати значення 0, але за побудовою це неможливо. Отримана суперечність доводить той факт, що в кулі D^n функція $z = F(\mathbf{x})$ є додатно визначеною і, отже, задовільняє умову $\mathbf{L}$. У випадку $a < 0$ міркування аналогічні.

Лему доведено.

3. Дискретний аналог теореми про стійкість за Ляпуновим. Задамо на гіперповерхнях $\mathbf{H}_i^{n-1}$ одиничне нормальне векторне поле $\vec{N}(\mathbf{x})$, яке направлене у внутрішність K_i.

Теорема 3.1. *Нехай в околі початку координат G задано автономну систему звичайних диференціальних рівнянь*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

в якій початок координат є ізольованим положенням рівноваги. Припустимо, що в околі G існує збіжна послідовність гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$. Якщо в усіх точках $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_i^{n-1}$ значення функції

$$S(\mathbf{x}) = \langle \vec{N}(\mathbf{x}), \overrightarrow{f}(\mathbf{x}) \rangle \tag{3.2}$$

буде додатним, то положення рівноваги системи (3.1) *є стійким за Ляпуновим.* (*Ми позначили* $\overrightarrow{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$.)

Доведення. Умови теореми гарантують, що фазова крива $\mathbf{X}(t)$ системи (3.1), яка починається в точці $\mathbf{x}$ на гіперповерхні $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$, буде при зростанні часу t лежати у внутрішності многовиду K_{i_0}, границею якої є $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$. В протилежному випадку для виходу цієї фазової кривої з многовиду K_{i_0} необхідно, щоб вона перетинала $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$ вздовж вектора, який направлений у зовнішність по відношенню до $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$ або буде дотичним до $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$. Але умова (3.2) забороняє таку поведінку фазової кривої. Це і означає стійкість положення рівноваги за Ляпуновим.

Теорему доведено.

Наслідок **3.1.** *Нехай в околі G задано систему* (3.1). *Якщо в околі $V \subset G$ існує диференційовна функція $z = F(\mathbf{x})$, яка задовільняє умову $\mathbf{L}$ і така, що знак її похідної $dF(\mathbf{x}(t))/dt$ вздовж довільної фазової траєкторії $\mathbf{X}(t)$ системи* (3.1) *у точках гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$ збігається зі знаком $\varepsilon(\mathbf{H}_i^{n-1})$, то положення рівноваги системи* (3.1) *є стійким за Ляпуновим.*

4. Умови асимптотичної стійкості за Ляпуновим.

Означення 3.4. *Нехай в околі початку координат G зафіксовано збіжну послідовність гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$. Будемо говорити, що гіперповерхні в послідовності $\mathbf{H}_i^{n-1}$ є різними, якщо для кожного натурального числа $n \in \mathbf{N}$ існують числа $k, l \in \mathbf{N}$ такі, що $k > l > n$ і гіперповерхні $\mathbf{H}_k^{n-1}$ та $\mathbf{H}_l^{n-1}$ не гомеоморфні.*

Теорема 3.2. *Нехай в околі початку координат G задано систему* (3.1) *та існує збіжна послідовність гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$, які є різними. Якщо в усіх точках $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_i^{n-1}$ значення функції $S(\mathbf{x}) = \left\langle \vec{N}(\mathbf{x}), \overrightarrow{f}(\mathbf{x}) \right\rangle$ буде додатним, то положення рівноваги системи* (3.1) *є стійким, але не асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. За теоремою 3.1 початок координат є стійким за Ляпуновим. Припустимо, що початок координат є асимптотично стійким за Ляпуновим. Тоді кожна фазова крива крива системи (3.1), яка починається на фіксованій гіперповерхні $\mathbf{H}_{i_0}^{n-1}$, при зростанні параметра t перетинає кожну гіперповерхню $\mathbf{H}_j^{n-1}$, $j > i_0$, тільки в одній точці. Тобто фазові криві системи (3.1) задають гомеоморфізми між гіперповерхнями $\mathbf{H}_i^{n-1}$. Але це неможливо, бо гіперповерхні в послідовності $\mathbf{H}_i^{n-1}$ є різними. Одержана суперечність доводить теорему.

Зауваження **3.1.** Використовуючи гомологічні неоднозв'язні сфери Σ^{n-1}, $n > 3$, можна побудувати збіжну послідовність гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$ в G , які є різними.

Серед $\mathbf{H}_i^{n-1}$ будуть гіперповерхні, які гомеоморфні, як стандартним S^{n-1}, так і гомологічним сферам Σ^{n-1}. Для таких гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$ неважко задати в G систему (3.1), яка задовольняє умови теореми 4.1.

Теорема 3.3. *Нехай в околі початку координат G задано систему* (3.1) *та існує збіжна послідовність гіперповерхонь $\mathbf{H}_i^{n-1}$. Якщо в усіх точках $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_i^{n-1}$ значення функції $S(\mathbf{x}) = \left\langle \overrightarrow{N}(\mathbf{x}), \overrightarrow{f}(\mathbf{x}) \right\rangle$ буде додатним і початок координат є єдиною інваріантною множиною, то положення рівноваги системи* (3.1) *є асимптотично стійким за Ляпуновим.*

Доведення. За теоремою 3.1 початок координат є стійким за Ляпуновим. Для кожної фазової траєкторії $\gamma(t)$, що проходить в околі початку координат, її $\omega(\gamma(t))$-гранична множина є інваріантною множиною. Отже, $\gamma(t)$ прямує до початку координат при $t \to \infty$. Отримана суперечність доводить теорему.

1. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
2. *Шарко Ю. В.* Дискретні умови стійкості за Ляпуновим // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 279 – 288.
3. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М.: Мир, 1979. – 279 с.

Одержано 30.03.10