УДК 517.925

А. О. Игнатьев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ВИДЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

A system of linear differential equations with impulse effect at fixed times is considered. Sufficient conditions for the existence of a positive definite quadratic form are obtained. This form is such that its derivative along the solutions of differential equations and its variations at points of impulse effect are negative definite quadratic forms regardless of the moments of impulse effects.

Розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Отримано достатні умови існування додатно означеної квадратичної форми такої, що її похідна чинності диференціальних рівнянь та її зміни в точках імульсного впливу є негативно означеними квадратичними формами незалежно від моментів імпульсної дії.

1. Введение. При математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями во многих случаях длительностью возмущений удобно пренебречь и считать, что эти возмущения имеют „мгновенный” характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, иначе, дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Сейчас теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием представляет собой интенсивно развивающееся направление математики, различные аспекты которого изложены в монографиях [1, 2]. В последние годы опубликованы сотни прикладных работ, в качестве математических моделей которых использованы дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Вследствие этого заметно увеличилось число математических работ по исследованию различных аспектов теории импульсных систем [3 – 14]. Настоящая статья посвящена изучению устойчивости решений систем с импульсным воздействием.

2. Основные определения и постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \neq \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = J_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ — время, $i \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), τ_i — константы, $x \in \mathbb{R}^n$, f: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $J_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Уравнения (1), (2) описывают динамику системы, состоящей из двух частей: непрерывной (при $t \neq \tau_i$), описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, и дискретной (в моменты τ_i), когда решения системы получают скачкообразные изменения. Обозначим

$$B_H := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leq H\right\},$$

$$G_i := \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \tau_{i-1} < t < \tau_i,\ x \in B_H\right\}, \quad G := \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i .$$

Сформулируем гипотезы, которым может удовлетворять система (1), (2):

Γ_1. Функция $f = (f_1, \ldots, f_n) : G \to \mathbb{R}^n$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}_+ \times B_H$;

$f(t, 0) \equiv 0$, и существует константа $L > 0$ такая, что $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq$ $\leq L\|x - y\|$ при $(t, x) \in G$, $(t, y) \in G$, $x \in B_H$, $y \in B_H$.

Γ_2. Функции $J_i : B_H \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, непрерывны и удовлетворяют условию Липшица с константой L в B_H и $J_i(0) = 0$ при $i \in \mathbb{N}$.

Γ_3. Существует константа $h \in (0, H)$ такая, что если $x \in B_h$, то $x +$ $+ J_i(x) \in B_H$ при $i \in \mathbb{N}$.

Γ_4. Константы τ_i удовлетворяют условиям

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots, \quad \lim_{i \to \infty} \tau_i = \infty.$$

Будем обозначать через $x(t, t_0, x_0)$ при $t > t_0$ решение системы (1), (2), удовлетворяющее условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ в случае, когда $t_0 \neq \tau_i$, $i \in \mathbb{N}$. Если же $t_0 = \tau_i$ при каком-либо натуральном i, то под выражением $x(t, t_0, x_0)$ будем понимать $x\big(t, t_0 + 0, x_0 + J_i(x_0)\big)$ (при $t > t_0$). Значение этого решения в момент t также будем обозначать $x(t, t_0, x_0)$. Это решение будем предполагать непрерывно дифференцируемым по t на любом из множеств G_i и непрерывным слева в точках разрыва: $x(\tau_i, t_0, x_0) = x(\tau_i - 0,$ $t_0, x_0)$.

При выполнении гипотез $\Gamma_1 - \Gamma_3$ система (1), (2) допускает тривиальное решение

$$x \equiv 0. \tag{3}$$

Сформулируем понятия устойчивости и притяжения тривиального (нулевого) решения системы (1), (2).

Определение 1. *Тривиальное решение системы* (1), (2) *называется устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *можно указать* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что если* $\|x_0\| \leq \delta$, *то* $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ *при* $t > t_0$. *Если при этом* δ *можно выбрать не зависящим от* t_0, *то решение* (3) *называется равномерно устойчивым.*

Определение 2. *Решение* (3) *системы* (1), (2) *называется*:

притягивающим, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *существует* $\lambda = \lambda(t_0) > 0$ *и для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $x_0 \in B_\lambda$ *существует* $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$ *такое, что* $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ *для всех* $t \geq t_0 + \sigma$;

равномерно притягивающим, если имеется такое $\lambda > 0$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любых* $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\lambda$, $t \geq$ $\geq t_0 + \sigma$ *справедливо* $x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon$.

Иными словами, решение (3) системы (1), (2) называется:

притягивающим, если для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\lambda$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0; \tag{4}$$

равномерно притягивающим, если предельное соотношение (4) выполняется равномерно по $x_0 \in B_\lambda$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Определение 3. *Тривиальное решение системы* (1), (2) *называется*:

асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее;

равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее.

Определение 4. *Тривиальное решение системы* (1), (2) *называется экспоненциально устойчивым, если существуют положительные константы* γ *и* α *такие, что решения системы* (1), (2) *обладают свойством* $\|x(t, t_0, x_0)\| \le$ $\le \gamma\|x_0\|e^{-\alpha t}$.

Очевидно, что если решение (3) системы (1), (2) экспоненциально устойчиво, то оно также равномерно асимптотически устойчиво.

Для исследования устойчивости решения (3) С. И. Гургулой и Н. А. Перестюком [15] предложено использовать метод функций Ляпунова, который предполагает существование положительно определенной функции $V(t, x)$, производная которой вдоль непрерывной системы (1) и вариация которой в силу дискретной системы (2) неположительны. В работах [3, 5, 10] при предположении выполнения гипотез $\Gamma_1 - \Gamma_4$ указаны условия, при которых теорема Гургулы – Перестюка об асимптотической устойчивости обратима.

При исследовании некоторых процессов, происходящих в реальном мире и описываемых дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием (1), (2), важным является построение (или хотя бы доказательство существования) положительно определенной функции Ляпунова такой, что

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t}, \qquad t \ne \tau_i, \quad x \in B_H,$$

и

$$\Delta V\big|_{t=\tau_i} = V\big(\tau_i + 0, x(\tau_i + 0)\big) - V(\tau_i, x), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

одновременно являются отрицательно определенными функциями [16 – 19]. В настоящей статье рассматривается линейная система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \ne \tau_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = Bx, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где A и B — квадратные невырожденные матрицы, элементами которых являются действительные числа.

Ставится задача: найти условия, при которых существует положительно определенная квадратичная форма $V(x) = x^T P x$ такая, что ее производная вдоль решений системы (5) и ее вариация на скачках системы, вычисленная в силу (6), являются отрицательно определенными относительно x. Здесь и в дальнейшем для матрицы K любой размерности K^T обозначает транспонированную матрицу.

Дискретную систему (6) запишем в виде

$$x(\tau_i + 0) = (E + B)\,x(\tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица.

Интуитивно понятно, что если τ_i удовлетворяют условию $\tau_{i+1} - \tau_i < \theta_1$, где $\theta_1 > 0$ достаточно мало, то существенный вклад в динамику системы (5), (6) вносят дискретные уравнения (6) и, следовательно, нужно потребовать, чтобы собственные числа матрицы $E + B$ лежали внутри единичного круга комплексной плоскости. Если же τ_i удовлетворяют условию $\tau_{i+1} - \tau_i > \theta_2$, где $\theta_2 > 0$ — достаточно большое число, то для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5), (6) необходимо, чтобы матрица A была гурвицевой. Поэтому представляется естественным следующее предположение.

Предположение 1. *Собственные числа матрицы A расположены в левой открытой полуплоскости комплексной плоскости, а собственные числа матрицы B — внутри круга единичного радиуса с координатами* $(-1, 0)$ *на комплексной плоскости.*

Рассмотрим теперь те случаи, где поставленная задача может быть решена.

3. Основные результаты. ***3.1. Матрицы A и B коммутируют.*** Матрицу P будем называть положительно определенной и обозначать $P > 0$, если квадратичная форма $x^T Px$ положительно определена.

В рассматриваемом случае нужно показать, что существует симметричная положительно определенная матрица P такая, что

$$x^T (A^T P + PA) x < 0, \tag{7}$$

$$x^T \Big[(E + B)^T P(E + B) - P \Big] x < 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если матрицы A и B коммутируют* $(AB = BA)$ *и выполнены условия предположения* 1, *то при любых τ_i, удовлетворяющих гипотезе Γ_4, и при любой положительно определенной матрице R функция*

$$V(x) = x^T Px, \tag{9}$$

являющаяся решением матричных уравнений Ляпунова

$$A^T Q + QA = -R, \tag{10}$$

$$(E + B)^T P(E + B) - P = -Q, \tag{11}$$

есть функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям (7) *и* (8).

Доказательство. Вначале покажем, что изменение ΔV функции V при $t = \tau_i$ является отрицательно определенной квадратичной формой относительно $x(\tau_i)$. Действительно,

$$\Delta V(x)\big|_{x=x(\tau_i)} = V\big(x(\tau_i + 0)\big) - V\big(x(\tau_i)\big) = x^T(\tau_i + 0) Px(\tau_i + 0) -$$
$$- x^T(\tau_i) Px(\tau_i) = x^T(\tau_i)(E + B)^T P(E + B) x(\tau_i) - x^T(\tau_i) Px(\tau_i) =$$
$$= x^T(\tau_i)\Big[(E + B)^T P(E + B) - P \Big] x(\tau_i) = -x^T(\tau_i) Qx(\tau_i).$$

Поскольку собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, а матрица R положительно определена, матрица Q, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова (10), также положительно определена, следовательно,

$$\Delta V(x)\big|_{x=x(\tau_i)} = -x^T(\tau_i) Qx(\tau_i) < 0.$$

Теперь покажем, что $\dot{V} = x^T (A^T P + PA) x$ представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму или, другими словами, $A^T P + PA < 0$. Для этого найдем Q из (11) и подставим в (10). В результате получим

$$A^T \Big[P - (E + B)^T P(E + B) \Big] + \Big[P - (E + B)^T P(E + B) \Big] A = -R. \tag{12}$$

Так как матрицы A и B коммутируют, то

$$(E + B)A = A(E + B), \qquad A^T(E + B)^T = (E + B)^T A^T. \tag{13}$$

Перепишем равенство (12), использовав (13):

$$(A^T P + PA) - (E + B)^T (A^T P + PA)(E + B) = -R.$$

Поскольку по предположению собственные числа матрицы $E + B$ расположены внутри единичного круга комплексной плоскости, а R положительно определена, матрица $A^T P + PA$ является отрицательно определенной [20, с. 215].

***Следствие* 1.** *При выполнении условий теоремы* 1 *нулевое решение системы* (5), (6) *экспоненциально устойчиво.*

3.2. Матрицы A и B симметричны. Рассмотрим случай, когда матрицы A и B симметричны, т. е. $A = A^T$, $B = B^T$.

Теорема 2. *Если матрицы A и B симметричны и выполнены условия предположения* 1, *то при любых* τ_i, *удовлетворяющих гипотезе* Γ_4, *нулевое решение системы* (5), (6) *экспоненциально устойчиво и существует положительно определенная квадратичная форма* (9) *такая, что выполняются условия* (7) *и* (8).

Доказательство. В силу предположения 1 и симметричности матриц A и B существуют действительные числа λ_1 и λ_2 такие, что $\lambda_1 > 0$, $|\lambda_2| < 1$, $(A + \lambda_1 E) < 0$,

$$(B + E)^2 - \lambda_2^2 E < 0. \tag{14}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x) = x^T x = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{15}$$

Оценим $\dot V$. На любом интервале непрерывности (τ_i, τ_{i+1})

$$\dot V = 2x^T A x \le -2\lambda_1 x^T x = -2\lambda_1 V. \tag{16}$$

В точках разрыва, учитывая симметричность матрицы B, имеем

$$\Delta V(x)\big|_{t=\tau_i} = V\big(x(\tau_i + 0)\big) - V\big(x(\tau_i)\big) = x^T(\tau_i)\Big[(E + B)^2 - E\Big]x(\tau_i),$$

откуда с учетом условия (14) получаем

$$\Delta V(x)\big|_{t=\tau_i} \le -\Big(1 - \lambda_2^2\Big) V\big(x(\tau_i)\big). \tag{17}$$

Не нарушая общности предположим, что начальный момент времени t_0 принадлежит интервалу $(0, \tau_1)$. Из оценок (16) и (17) при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ находим

$$V\big(x(t, t_0, x_0)\big) \le e^{-2\lambda_1(t - t_0)} \lambda_2^{2k} V(x_0).$$

Учитывая, что $|\lambda_2| < 1$, заключаем, что нулевое решение системы (5), (6) экспоненциально устойчиво, и в качестве функции Ляпунова можно выбрать квадратичную форму (15), что и требовалось доказать.

3.3. Двумерный случай. Обозначим

$$C = E + B. \tag{18}$$

Для произвольного (n-мерного) случая поставленная задача сводится к следующей: найти условия, при которых существуют симметричные положительно определенные матрицы P, Q_1, Q_2 такие, что

$$C^T PC - P + Q_1 = 0 \tag{19}$$

и

$$A^T P + PA + Q_2 = 0. \tag{20}$$

Умножая обе части уравнения (19) на 2 и преобразуя левую часть, получаем

$$(C^T - E) P(C + E) + (C^T + E) P(C - E) + 2 Q_1 = 0. \tag{21}$$

Поскольку единица не является собственным числом матрицы C, матрицы $C - E$ и $C^T - E$ являются невырожденными, следовательно, существуют $(C - E)^{-1}$ и $(C^T - E)^{-1}$, причем очевидно

$$(C^T - E)^{-1} = \left((C - E)^{-1}\right)^T. \tag{22}$$

Умножим обе части матричного равенства (21) слева на $(C^T - E)^{-1}$ и справа на $(C - E)^{-1}$. В результате будем иметь

$$P(C + E)(C - E)^{-1} + (C^T - E)^{-1}(C^T + E) P +$$

$$+ 2(C^T - E)^{-1} Q_1 (C - E)^{-1} = 0.$$

Обозначим $D = (C + E)\ (C - E)^{-1}$, $Q_* = 2\left((C - E)^{-1}\right)^T Q(C - E)^{-1}$. Заметим [21, с. 268, 618], что матрица D является гурвицевой. Учитывая равенство (22), убеждаемся, что C имеет собственные числа, лежащие в открытом единичном круге комплексной плоскости, тогда и только тогда, когда выполняется матричное уравнение Ляпунова

$$PD + D^T P + Q_* = 0, \tag{23}$$

где D — гурвицева матрица. С учетом того, что матрица C имеет вид (18), выразим матрицы D и Q_* непосредственно через B:

$$D = D(B) = (2E + B) B^{-1}, \qquad Q_* = Q_*(B, Q_1) = 2 (B^{-1})^T Q_1 B^{-1}.$$

Теперь перейдем к изучению случая, когда в системе (5), (6) $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Приведем два определения из [22] и две леммы, доказанные в [22].

Определение 5. *Пучком* $\sigma_\alpha[A, D]$ *матриц* A *и* D *назовем однопараметрическое семейство матриц* $\alpha A + (1 - \alpha) D$, *где* α *— действительный параметр из отрезка* $[0, 1]$.

Определение 6. *Пучок* $\sigma_\alpha[A, D]$ *называется гурвицевым, если матрица* $\alpha A + (1 - \alpha) D$ *является гурвицевой при любом* $\alpha \in [0, 1]$.

Лемма 1. *Для того чтобы существовали симметричные положительно определенные матрицы* P, Q_1, Q_2 *такие, что одновременно выполняются матричные равенства* (20) *и* (23), *необходимо и достаточно, чтобы пучки* $\sigma_\alpha[A, D]$ *и* $\sigma_\alpha\left[A, D^{-1}\right]$ *были гурвицевыми.*

Лемма 2. *Для того чтобы существовали симметричные положительно определенные матрицы* P, Q_1, Q_2 *такие, что одновременно выполняются матричные равенства* (20) *и* (23), *необходимо и достаточно, чтобы матрицы* AD *и* AD^{-1} *не имели действительных отрицательных собственных значений.*

Используя леммы 1 и 2, получаем следующие теоремы.

Теорема 3. *Если в системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (5), (6) *матрицы* A *и* B *таковы, что пучки* $\sigma_\alpha[A, D]$ *и* $\sigma_\alpha[A, D^{-1}]$, *где* $D = (2E + B)B^{-1}$, *являются гурвицевыми, то нулевое решение системы* (5), (6) *экспоненциально устойчиво при любом выборе* τ_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Теорема 4. *Если в системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием* (5), (6) A *и* B *таковы, что матрицы* AD *и* AD^{-1}, *где* $D = (2E + B)B^{-1}$, *не имеют действительных отрицательных собственных значений, то нулевое решение системы* (5), (6) *экспоненциально устойчиво при любом выборе* τ_i, $i = 1, 2, \ldots$.

4. Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим в качестве примера систему (5), (6), в которой $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что существуют положительно определенные квадратичные формы P, Q и R такие, что выполняются условия (10), (11), и нулевое решение системы (5), (6) экспоненциально устойчиво независимо от выбора τ_i $i = 1, 2, \ldots$.

Первый способ. Найдем произведения матриц AB и BA:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $AB = BA$, на основании теоремы 1 получаем, что действительно существуют положительно определенные квадратичные формы P, Q и R такие, что выполняются условия (10), (11), и нулевое решение системы (5), (6) экспоненциально устойчиво независимо от выбора τ_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Второй способ. Так как $n = 2$, можно воспользоваться теоремой 4. Для этого достаточно показать, что матрицы AD и AD^{-1} не имеют действительных отрицательных собственных значений, где $D = (2E + B)B^{-1}$. Проверим это. Для этого последовательно находим

$$2E + B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = (2E + B)B^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}, \quad AD = \begin{pmatrix} 27 & 21 \\ -21 & -15 \end{pmatrix},$$

$$D^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad AD^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -3 \\ 3 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрицы AD и AD^{-1} имеют кратные собственные значения (соответственно 6 и $2/3$), которые не являются отрицательными, что и следовало доказать.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
2. *Haddad W. M., Chellaboina V., Nersesov S. G.* Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. – 520 p.
3. *Гладилина Р. И., Игнатьев А. О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости для импульсных систем // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1035 – 1043.
4. *Слынько В. И.* Линейные матричные неравенства и устойчивость движения импульсных систем // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 68 – 71.
5. *Игнатьев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Мат. сб. – 2003. – **194**, № 10. – С. 117 – 132.
6. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 9. – С. 1516 – 1521.
7. *Ignatyev A. O., Ignatyev O. A., Soliman A. A.* Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action // Math. Notes. – 2006. – **80**, № 4. – P. 491 – 499.
8. *Hristova Snezhana G.* Razumikhin method and cone valued Lyapunov functions for impulsive differential equations with 'supremum' // Int. J. Dynam. Syst. Different. Equat. – 2009. – **2**, № 3 – 4. – P. 223 – 236.
9. *Hristova S. G.* Integral stability in terms of two measures for impulsive functional differential equations // Math. Comput. Modelling. – 2010. – **51**, № 1 – 2. – P. 100 – 108.
10. *Ignatyev A. O., Ignatyev O. A.* Investigation of the asymptotic stability of solutions of systems with impulse effect // Int. J. Math. Game Theory Algebra. – 2008. – **17**, № 3. – P. 141 – 164.
11. *Fu Xilin, Li Xiaodi.* New results on pulse phenomena for impulsive differential systems with variable moments // Nonlinear Anal. – 2009. – **71**, № 7 – 8. – P. 2976 – 2984.
12. *Li Xiaodi, Chen Zhang.* Stability properties for Hopfield neural networks with delays and impulsive perturbations // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2009. – **10**, № 5. – P. 3253 – 3265.
13. *Ignatyev A. O., Ignatyev O. A.* Stability of solutions of systems with impulse effect // Progress in Nonlinear Analysis Research. – New York: Nova Sci. Publ., 2009. – P. 363 – 389.
14. *Перестюк Н. А., Самойленко А. М., Станжицкий А. Н.* О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 8. – С. 1061 – 1079.
15. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем // Мат. физика. – 1982. – Вып. 31. – С. 9 – 14.
16. *Ahmed N. U.* Dynamic systems and control with applications. – New Jersey: World Sci., 2006. – 452 p.
17. *Ewens W. J.* Mathematical population genetics. I. Theoretical introduction. – Second ed. – New York: Springer, 2004. – 420 p.
18. *Haddad W. M., Chellaboina V. S., Hui Q.* Nonnegative and compartmental dynamical systems. – Princeton; Oxford: Princeton Univ. Press, 2010. – 608 p.
19. *Thieme H. R.* Mathematics in population biology. – Princeton; Oxford: Princeton Univ. Press, 2003. – 544 p.
20. *Elaydi S.* An introduction to difference equations. – Third Ed. – New York: Springer, 2005. – 544 p.
21. *Hinrichsen D., Pritchard A. J.* Mathematical systems theory I. Modelling, state space analysis, stability and robustness. – Berlin: Springer, 2005. – 808 p.
22. *Shorten R. N., Narendra K. S.* Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time–invariant systems // Int. J. Adapt. Control and Signal Processing. – 2002. – **16**, № 10. – P. 709 – 728.

Получено 28.06.10