УДК 519.21

К. С. Акбаш, І. К. Мацак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОРЯДКОВИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ТИПУ МАРЦИНКЕВИЧА – ЗИҐМУНДА

The Marcinkiewicz – Zygmund order law of large numbers is established for random variables in Banach lattices. Similar results are obtained also for the maximum scheme.

Для случайных величин в банаховых решетках установлен порядковый закон больших чисел Марцинкевича – Зигмунда. Подобные результаты получены и для схемы максимума.

1. Вступ. Основні результати. Нехай $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н. о. р. в. в.) в $\mathbb{R}$. У роботі Марцинкевича, Зиґмунда [1] було одержано таке узагальнення закону великих чисел (ЗВЧ) Колмогорова: для $1 \leqslant p < 2$ майже напевно (м. н.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0,$$

якщо $\mathbf{E}|\xi|^p < \infty$ і $\mathbf{E}\xi = 0$.

Нехай (X_i) — послідовність незалежних копій випадкового елемента (в. е.) X зі значеннями в сепарабельному банаховому просторі B і $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Відомо [2, с. 259], що для банахових просторів типу p, $1 \leqslant p < 2$, за умов

$$\mathbf{E}\|X\|^p < \infty \tag{1}$$

і $\mathbf{E}X = 0$ також виконується ЗВЧ Марцинкевича – Зиґмунда вигляду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \|S_n\| = 0 \quad \text{м. н.} \tag{2}$$

Далі через B позначатимемо сепарабельну банахову ґратку з модулем $|\cdot|$.

Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Банахова ґратка B називається p-опуклою, якщо існує така стала $D^{(p)} = D^{(p)}(B)$, що для будь-якого n і для будь-яких елементів $(x_i)_1^n \subset B$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant D^{(p)} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

і, аналогічно, q-вгнутою ($1 \leqslant q < \infty$), якщо для деякої сталої $D_{(q)} = D_{(q)}(B)$ виконується обернена нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant D_{(q)} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|.$$

Для послідовності X_i, $i \geqslant 1$, незалежних копій випадкового елемента (в. е.) X із значеннями в B покладемо

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^* = \sup_{k \leqslant n} |S_k|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

У роботі [3] показано, що при умові (1) ЗВЧ (2) у випадку p-опуклих $(1 \leqslant p < 2)$ та q-вгнутих $(1 \leqslant q < \infty)$ банахових ґраток можна підсилити до рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \|S_n^*\| = 0 \quad \text{м. н.}$$

У банаховій ґратці поряд із збіжністю за нормою можна розглядати порядкову збіжність (o-збіжність). Нагадаємо, що послідовність елементів (x_n) банахової ґратки B називається o-збіжною до елемента x, $x = o-\lim_{n\to\infty} x_n$, якщо існує така послідовність (v_n), що $|x - x_n| < v_n$ і $v_n \downarrow 0$, тобто $v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots$ і $\inf_{n\geqslant 1} v_n = 0$ [4, 5].

Для в. е. X зі значеннями у банаховій ґратці (з $\mathbf{E}X = 0$) можна розглянути порядковий закон великих чисел (o-ЗВЧ) Марцинкевича – Зиґмунда

$$o - \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{\frac{1}{p}}} = 0 \quad \text{м. н.} \tag{3}$$

При $p = 1$ маємо звичайний порядковий закон великих чисел у банаховій ґратці, який вивчався у роботі [6].

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $1 \leqslant p < p' \leqslant 2$, B — сепарабельна банахова ґратка, p'-опукла і q-вгнута при деякому q, $1 \leqslant q < \infty$, X — випадковий елемент із значеннями в B, $\mathbf{E}X = 0$. Тоді еквівалентні такі умови*:

i) *X задовольняє закон великих чисел* (2);

ii) *X задовольняє порядковий закон великих чисел* (3);

iii) *виконується умова* (1).

***Наслідок* 1.** *Нехай $1 \leqslant p < 2$, $p < p' < \infty$, X — випадковий елемент із значеннями у просторі $L_{p'}$ $(l_{p'})$, $\mathbf{E}X = 0$. Тоді умови* i) – iii) *теореми* 1 *еквівалентні.*

***Зауваження* 1.** Контрприклад, наведений у п. 4, показує, що у просторі ℓ_p, $1 \leqslant p < 2$ (який має тип p), існує в. е., який задовольняє нерівність (1) і разом з тим для нього не виконується порядковий закон великих чисел Марцинкевича – Зиґмунда (3).

У наступній теоремі розглядаємо випадок, коли (X_n) — послідовність незалежних в. е., не обов'язково однаково розподілених.

Теорема 2. *Нехай $1 \leqslant p < p' \leqslant 2$, B — сепарабельна банахова ґратка, p'-опукла і q-вгнута при деякому q, $1 \leqslant q < \infty$, (X_n) — послідовність незалежних випадкових елементів зі значеннями в B і $\mathbf{E}X_n = 0$ для кожного n. Тоді умова*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{p'/p}} \mathbf{E}\|X_n\|^{p'} < \infty \tag{4}$$

є достатньою для справедливості порядкового закону великих чисел (3).

Зазначимо, що близькі до теореми 1 результати отримано і для схеми максимуму (див. п. 3).

2. Доведення теореми 1. Еквівалентність умов i) та iii) — це відомий результат [2].

Покажемо еквівалентність умов ii) та iii). Неважко помітити, що якщо виконується порядковий закон великих чисел (3), то

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{\|X_n\|}{n^{\frac{1}{p}}}\leqslant 2\sup_{n\geqslant 1}\frac{\|S_n\|}{n^{\frac{1}{p}}}\leqslant 2\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|<\infty \quad \text{м. н.}$$

Легко перевірити, що з умови

$$\sup_{n\geqslant 1}\frac{\|X_n\|}{n^{\frac{1}{p}}}<\infty \quad \text{м. н.}$$

випливає $\mathbf{E}\|X\|^p<\infty$.

Залишилося встановити зворотну імплікацію iii) $\Rightarrow$ ii).

Сепарабельна σ-повна банахова ґратка порядково ізометрична деякому банаховому ідеальному простору (БІП). Оскільки q-вгнута банахова ґратка звичайно буде σ-повною, то без обмеження загальності можна вважати, що B — сепарабельний q-вгнутий БІП, заданий на деякому вимірному просторі (T,Λ,μ), $\mu(T)=1$ (див. [4, 5]).

Для такого простору умови

$$\mu\big(t\in T\colon \lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)\big)=1, \tag{5}$$

існує $y=(y(t),t\in T)\in B$ такий, що

$$\mu(t\in T\colon |x_n(t)|\leqslant y(t))=1, \tag{6}$$

достатні для o-збіжності послідовності (x_n) до x [7].

Нехай

$$X_n=(X_n(t),t\in T),\quad S_n=(S_n(t),t\in T),$$

$$\tau=\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|.$$

Щоб встановити умови (5), (6), достатньо показати, що

$$\mu\left(t\in T\colon \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(t)}{n^{\frac{1}{p}}}=0\right)=1 \quad \text{м. н.}, \tag{7}$$

$$\tau<\infty \quad \text{м. н.} \tag{8}$$

Спочатку доведемо оцінку (8). При цьому скористаємось методом із роботи [6].

Припустимо спочатку, що X — симетричний в. е. Тоді можна вважати, що $X = \epsilon\hat{X}$, де $\hat{X}$ і ϵ незалежні, $\hat{X}$ — копія X, ϵ — симетрична в. в. Бернуллі.

Нехай (X_n), $(\hat{X}_n)$, (ϵ_n) — послідовності незалежних копій X, $\hat{X}$ та ϵ відповідно. Покладемо

$$\bar{X}_n=\hat{X}_nI(\|\hat{X}_n\|\leqslant n^{\frac{1}{p}}),\quad \tilde{X}_n=\hat{X}_nI(\|\hat{X}_n\|>n^{\frac{1}{p}}),$$

$$\bar{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\bar{X}_i,\quad \tilde{S}_n=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\tilde{X}_i.$$

Зрозуміло, що $X_n=\epsilon_n(\bar{X}_n+\tilde{X}_n)$ і

$$\tau \leqslant \left\| \sup_{n \geqslant 1} \frac{|\bar{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}} \right\| + \left\| \sup_{n \geqslant 1} \frac{|\tilde{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}} \right\| \quad \text{м. н.} \tag{9}$$

Відомо [8, с. 278], що з умови (1) випливає обмеженість ряду

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{P}(\|X_n\| \geqslant n^{\frac{1}{p}}) < \infty\,.$$

За лемою Бореля – Кантеллі це означає, що м. н. лише скінченне число в. е. $\tilde{X}_n$ відмінне від 0, тобто

$$\left\| \sup_{n \geqslant 1} \frac{|\tilde{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}} \right\| < \infty \quad \text{м. н.}$$

Оцінка (8) буде правильною, якщо ми покажемо, що перший доданок у правій частині нерівності (9) є обмеженим. Для цього достатньо показати, що

$$\mathbf{E}_{\hat{X}} \left\| \sup_{n \geqslant 1} \frac{|\bar{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}} \right\|^q < \infty \quad \text{м. н.,} \tag{10}$$

де через $\mathbf{E}_{\hat{X}}(\xi)$ позначено математичне сподівання в. в. ξ при фіксованій послідовності $(\hat{X}_n)$.

При доведенні нерівності (10) використаємо дві оцінки з наступних лем.

Лема 1 [9]. *Нехай B — сепарабельний q-вгнутий, $1 \leqslant q < \infty$, банахів ідеальний простір, $Y = (Y(t), t \in T)$ — випадковий елемент із значеннями в B. Тоді*

$$(\mathbf{E}\|Y\|^q)^{1/q} \leqslant D_{(q)} \|(\mathbf{E}|Y(t)|^q)^{1/q}\|.$$

Лема 2. *Нехай (a_i) — послідовність дійсних чисел, $\alpha > 0$. Тоді*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k^\alpha} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{i^\alpha} \right|.$$

Лема 2 — окремий випадок відомої нерівності (див. роботи [1, 10]).

Із лем 1, 2 маємо

$$\left(\mathbf{E}_{\hat{X}} \left\| \sup_{n \geqslant 1} \frac{|\bar{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}} \right\|^q \right)^{1/q} \leqslant D_{(q)} \left\| \left(\mathbf{E}_{\hat{X}} \sup_{n \geqslant 1} \left| \frac{\bar{S}_n(t)}{n^{\frac{1}{p}}} \right|^q \right)^{1/q} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2D_{(q)} \left\| \left(\mathbf{E}_{\hat{X}} \sup_{n \geqslant 1} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i \bar{X}_i(t)}{i^{\frac{1}{p}}} \right|^q \right)^{1/q} \right\|. \tag{11}$$

Далі скористаємось нерівностями Леві [2, с. 48] та Хінчина [11, с. 251] для симетричних в. в. Бернуллі

$$\left(\mathbf{E}_{\hat{X}} \sup_{n \geqslant 1} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i \bar{X}_i(t)}{i^{\frac{1}{p}}} \right|^q \right)^{1/q} \leqslant \left(2\mathbf{E}_{\hat{X}} \left| \sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon_n \bar{X}_n(t)}{n^{\frac{1}{p}}} \right|^q \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C_q \left(\sum_{n=1}^\infty \left| \frac{\bar{X}_n(t)}{n^{\frac{1}{p}}} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{12}$$

Оскільки при $p' \leqslant 2$ у банаховій ґратці виконується нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{p'}\right)^{1/p'},$$

то, враховуючи (11) та (12), одержуємо

$$\left(\mathbf{E}_{\hat{X}}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant C(B)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\bar{X}_n\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}}\right)^{1/p'}. \tag{13}$$

Залишилося показати, що збігається ряд у правій частині нерівності (13). Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\|\bar{X}_n\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p'}{p}}}\int\limits_0^{\infty}\mathbf{P}(\|\bar{X}_n\|^{p'} > t)dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p'}{p}}}\int\limits_0^{n^{\frac{p'}{p}}}\mathbf{P}(\|X_n\|^{p'} I(\|X_n\| \leqslant n^{\frac{1}{p}}) > t)dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p'}{p}}}\int\limits_0^{n^{\frac{p'}{p}}}\mathbf{P}(\|X\|^{p'} > t)dt = \int\limits_0^{\infty}\mathbf{P}(\|X\|^{p'} > t)\beta_p(t)dt, \tag{14}$$

де $\beta_p(t) = \sum_{n^{\frac{p'}{p}}\geqslant t}\dfrac{1}{n^{\frac{p'}{p}}}$.

Оскільки при $p' > p \geqslant 1$ і $t \to \infty$

$$\sum_{n\geqslant t}\frac{1}{n^{\frac{p'}{p}}} \sim \frac{\frac{p'}{p} - 1}{t^{\frac{p'}{p}-1}},$$

то

$$\beta_p(t) \sim \frac{\frac{p'}{p} - 1}{t^{1-\frac{p}{p'}}}.$$

Відповідно скінченність останнього інтеграла в (14) еквівалентна умові

$$\int\limits_0^{\infty}\mathbf{P}(\|X\|^{p'} > t)t^{\frac{p}{p'}-1}dt < \infty. \tag{15}$$

Підставляючи у відому рівність [8, с. 178]

$$\mathbf{E}|\xi|^{\alpha} = \alpha\int\limits_0^{\infty}\mathbf{P}(|\xi| > t)t^{\alpha-1}dt,$$

$\alpha = \dfrac{p}{p'}$, $\xi = \|X\|^{p'}$, одержуємо, що умова (15) еквівалентна умові (2).

Дійсно,

$$\frac{p}{p'}\int_0^\infty \mathbf{P}(\|X\|^{p'} > t)t^{\frac{p}{p'}-1}dt = \mathbf{E}(\|X\|^{p'})^{\frac{p}{p'}} = \mathbf{E}\|X\|^p < \infty.$$

Оскільки можна вважати, що $1 \leqslant p < p' \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, то з (13)–(15) маємо

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|^{p'} \leqslant C(B)\mathbf{E}\|X\|^p. \tag{16}$$

Отже, оцінка (8) є правильною.

Залишилося довести рівність (7).

Для порядково обмеженої послідовності (x_n) елементів σ-повної банахової ґратки верхню границю можна визначити рівністю (див. [12, с. 504])

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_m(\sup_{n\geqslant m} x_n)\,.$$

В умовах теореми 1 простір B буде σ-повною банаховою ґраткою. А згідно з оцінкою (8) $(|S_n|/n^{\frac{1}{p}})$ буде порядково обмеженою послідовністю. Тому в B існує випадковий елемент Q:

$$Q = \limsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Зрозуміло, що умова (7) випливатиме з рівності

$$\|Q\| = 0 \quad \text{м. н.} \tag{17}$$

Покажемо, що вона справді виконується.

Із оцінок (14), (15) випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\|\bar{X}_n\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}}$. Тому для будь-якого $\epsilon > 0$ існує n_0 таке, що

$$\sum_{n>n_0}\frac{\mathbf{E}\|\bar{X}_n\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}} < \epsilon^{p'}. \tag{18}$$

Покладемо

$$\bar{S}_{n1} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i\bar{X}_{i1}, \quad \bar{S}_{n2} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i\bar{X}_{i2}\,,$$

де

$$\bar{X}_{i1} = \begin{cases}\bar{X}_i & \text{при} \quad i \leqslant n_0,\\ 0 & \text{при} \quad i > n_0,\end{cases} \quad \text{а} \quad \bar{X}_{i2} = \begin{cases}0 & \text{при} \quad i \leqslant n_0,\\ \bar{X}_i & \text{при} \quad i > n_0.\end{cases}$$

Зрозуміло, що $S_n = \bar{S}_{n1} + \bar{S}_{n2} + \tilde{S}_n$ і

$$Q \leqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}}|\bar{S}_{n1}| + \sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{1/p}}|\bar{S}_{n2}| + \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}}|\tilde{S}_n| \quad \text{м. н.} \tag{19}$$

Як було зазначено вище, послідовність $(\tilde{X}_n)$ м. н. містить лише скінченне число ненульових членів, а послідовність $(\bar{X}_n)$ містить n_0 ненульових елементів, тому

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}}|\tilde{S}_n| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}}|\bar{S}_{n1}| = 0 \quad \text{м. н.} \tag{20}$$

Неважко побачити, що оцінка (13) залишається правильною при заміні послідовності $(\bar{S}_n)$ на $(\bar{S}_{n2})$. Тому

$$\left(\mathbf{E}_{\hat{X}}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_{n2}|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant C(B)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|\bar{X}_{n2}\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}}\right)^{1/p'} = C(B)\left(\sum_{n>n_0}^{\infty}\frac{\|\bar{X}_{n}\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}}\right)^{1/p'}.$$

Звідси

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_{n2}|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\| \leqslant \mathbf{E}\left(\mathbf{E}_{\hat{X}}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_{n2}|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant C(B)\left(\sum_{n>n_0}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\|\bar{X}_{n}\|^{p'}}{n^{\frac{p'}{p}}}\right)^{1/p'}. \tag{21}$$

Збираючи разом оцінки (18) – (21), маємо

$$\mathbf{E}\|Q\| < C(B)\epsilon,$$

де $C(B)$ — абсолютна константа, яка залежить лише від B. Внаслідок довільності ϵ звідси випливає (17).

Таким чином, імплікацію iii) $\Rightarrow$ ii) теореми 1 встановлено для симетричних в. е.

Загальний випадок зведемо до симетричного, використавши стандартну процедуру симетризації. Для цього нам потрібні два допоміжних твердження.

Лема 3 (Хофман – Йоргенсен). *Нехай (Y_n) — послідовність незалежних випадкових елементів у сепарабельному банаховому просторі B, ряд $\sum_{n\geqslant 1} Y_n$ збігається в B м. н. і $0 < r < \infty$. Тоді еквівалентні умови*:

i) $\mathbf{E}\sup_n \|Y_n\|^r < \infty$;

ii) $\mathbf{E}\|\sum_{n\geqslant 1} Y_n\|^r < \infty$

(див. [11, с. 231], наслідок 2).

Лема 4. *Нехай (ξ_i) — послідовність незалежних копій випадкової величини ξ в $\mathbb{R}$, $0 < r < p < \infty$. Тоді*

$$\mathbf{E}\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{\xi_n}{n^{1/p}}\right|^r < \frac{p}{p-r}(\mathbf{E}|\xi|^p)^{r/p}.$$

Ця лема міститься у твердженні 1 роботи [13].

Нехай $\mathbf{E}X_n = 0$. Так само, як і в симетричному випадку, основний момент доведення — встановлення оцінки типу (16).

Позначимо

$$\bar{X}_n = X_n I(\|X_n\| \leqslant n^{\frac{1}{p}}),$$

$$\bar{X}_n^{(s)} = X_n I(\|X_n\| \leqslant n^{\frac{1}{p}}) - X'_n I(\|X'_n\| \leqslant n^{\frac{1}{p}}),$$

$$\bar{S}_n^{(s)} = \sum_{i=1}^{n}\bar{X}_i^{(s)}, \quad \bar{S}_n = \sum_{i=1}^{n}\bar{X}_i,$$

(X'_n) — незалежна копія послідовності (X_n).

Далі скористаємось оцінкою (16)) у симетричному випадку та відомою моментною оцінкою в банаховому просторі ([11, с. 222], лема 3.4). Маємо

$$\left(\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S_n}|}{n^{1/p}}\right\|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \triangle + \left(\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_n^{(s)}|}{n^{1/p}}\right\|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \triangle + C(B)(\mathbf{E}\|X\|^p)^{\frac{1}{p'}}, \tag{22}$$

де

$$\triangle = \left\|\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k I(\|X_k\| < k^{1/p})}{n^{1/p}}\right|\right\|.$$

Оцінимо величину $\triangle$ зверху. Із леми 2 отримуємо

$$\triangle \leqslant 2\left\|\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{E}X_k I(\|X_k\| > k^{1/p})}{k^{1/p}}\right|\right\| \leqslant 2\left\|\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbf{E}|X_k| I(\|X_k\| > k^{1/p})}{k^{1/p}}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^\infty \frac{|X_k| I(\|X_k\| > k^{1/p})}{k^{1/p}}\right\|. \tag{23}$$

Останній ряд в оцінці (23) містить лише скінченне число відмінних від нуля доданків, а отже, збігається м. н. Тоді за лемою 3 права частина в (23) буде обмеженою, якщо

$$\mathbf{E}\sup_{n\geqslant 1}\frac{\|X_n\|}{n^{1/p}} I(\|X_n\| > n^{1/p}) < \infty. \tag{24}$$

Але остання нерівність в умовах теореми безпосередньо випливає із леми 4 (слід покласти $r = 1$, $\xi_n = \|X_n\|$)

$$\mathbf{E}\sup_{n\geqslant 1}\frac{\|X_n\|}{n^{1/p}} \leqslant \frac{p}{p-1}(\mathbf{E}\|X\|^p)^{1/p} < \infty$$

і, звичайно, (24) також виконується.

Звідси та з (22) – (24) випливає обмеженість величини

$$\mathbf{E}\left\|\sup_{n\geqslant 1}\frac{|\bar{S}_n|}{n^{\frac{1}{p}}}\right\|^{p'}.$$

Подальший перехід до оцінок (6), (7) в основному повторює симетричний випадок.

Лему доведено.

Доведення теореми 2 легко випливає з наведених вище міркувань, тому ми його не наводимо.

3. *o*-ЗВЧ для схеми максимуму. Для послідовності (X_i) незалежних копій випадкового елемента (в. е.) X зі значеннями у банаховій ґратці B покладемо $Z_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|$. Тоді можна розглянути порядковий закон великих чисел типу Марцинкевича – Зиґмунда для схеми максимуму

$$o - \lim_{n\to\infty}\frac{Z_n}{n^{\frac{1}{p}}} = 0 \quad \text{м. н.} \tag{25}$$

Прості достатні умови для виконання o-ЗВЧ Марцинкевича – Зиґмунда для схеми максимуму знайдено в роботі [13]:

для сепарабельної q-вгнутої банахової ґратки, $1 \leqslant q < \infty$, $0 < p < 2$, і при $1 \leqslant p < 2$, $\mathbf{E}X = 0$ будь-яка з умов:

i) якщо $p < q$ і існує $\mathfrak{S}_q(X)$,

ii) якщо $p = q$, $\phi(t) = |t|^q \ln(1 + |t|^q)$ і існує $\mathfrak{S}_\phi(X)$,

iii) якщо $p > q$ і існує $\mathfrak{S}_p(X)$,

є достатньою для виконання o-ЗВЧ (25) (де $\mathfrak{S}_q(X)$ та $\mathfrak{S}_\phi(X)$ — середнє відхилення степеня q та відповідно середнє ψ-відхилення в. е. X, див. [13]).

Метод, наведений вище, дозволив одержати критерій для виконання o-ЗВЧ (25) в банахових ґратках навіть без умови q-вгнутості.

Теорема 3. *Нехай B — сепарабельна σ-повна p'-опукла банахова ґратка, $1 \leqslant p < p' < \infty$, X — випадковий елемент із значеннями в B. Тоді умова* (1) *еквівалентна рівності* (25).

Доведення теореми 3 фактично міститься у доведенні теореми 1, q-вгнутість банахової ґратки B використовується лише в оцінках (11) та (12). Відповідна оцінка для теореми 3 матиме вигляд

$$\sup_{n \geqslant 1} \left| \frac{\bar{X}_n}{n^{1/p}} \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\bar{X}_n}{n^{1/p}} \right|^{p'} \right)^{1/p'} .$$

Ця оцінка буде правильною для довільної банахової ґратки. Далі необхідно повторити міркування з доведення теореми 1.

4. Приклад. Нехай $1 \leqslant p < 2$. Побудуємо приклад в. е. X із значеннями у просторі ℓ_p (він має тип p, але не буде p'-опуклим при $p' > p$), який при будь-якому $m > 0$ задовольняє нерівність

$$\mathbf{E}\|X\|^m < \infty \tag{26}$$

і разом з тим для нього

$$\left\| \sup_{n \geqslant 1} \left| \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \right| \right\|_{l_p} = \infty \quad \text{м. н.}, \tag{27}$$

де (X_n) — послідовність незалежних копій в. е. X. Із рівності (27) випливає, що для в. е. X не виконується порядковий закон великих чисел Марцинкевича – Зиґмунда (3).

Наведений нижче приклад є невеликою модифікацією прикладу із роботи [6].

Покладемо $L(t) = \ln t$ при $t > 2$ і $L(t) = 1$ при $t \leqslant 2$,

$$\theta = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{kL^2(k)}, \quad p_k = \frac{1}{\theta k L^2(k)}, \quad k \geqslant 1.$$

Відповідно $\sum_{k \geqslant 1} p_k = 1$. Нехай (ξ_k) — послідовність н. в. в., для яких

$$\mathbf{P}(\xi_k = +1) = \mathbf{P}(\xi_k = -1) = p_k/2, \quad \mathbf{P}(\xi_k = 0) = 1 - p_k.$$

Тоді очевидно, що в. е. $X = (\xi_k)$ м. н. лежить у просторі l_p і задовольняє умови

$$\mathbf{E}|\xi_k|^p = p_k, \quad \mathbf{E}\,\|X\|_{l_p}^p = \sum_{k\geqslant 1} p_k = 1. \tag{28}$$

Спочатку покажемо, що в. е. X задовольняє умову (26). Використаємо рівномірну по n оцінку для сум обмежених н. в. в. [14, с. 22].

Лема 5 [14]. *Нехай* $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — *послідовність незалежних випадкових величин,* $S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$ *і*

$$|\eta_i| \leqslant 1 \quad \textit{м. н.}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Якщо існує таке a, *що*

$$\mathbf{P}(|S_n| > a) \leqslant \frac{1}{8e},$$

то для $m > 0$

$$\mathbf{E}|S_n|^m \leqslant L_m (a+1)^m.$$

Із рівності (28) та нерівності Маркова при $a = 8e$ одержуємо

$$\mathbf{P}(\|X\|_{l_p}^p > a) \leqslant \frac{\mathbf{E}\,\|X\|_{l_p}^p}{a} = \frac{1}{8e}.$$

Отже, згідно з лемою 3 для будь-якого $m > 0$ в. е. X задовольняє умову (26).

Залишилось перевірити рівність (27). Нехай (ξ_{nk}) — незалежні копії послідовності (ξ_k). Запишемо норму з рівності (27) у вигляді

$$\left\| \sup_{n\geqslant 1} \left| \frac{X_n}{n^{\frac{1}{p}}} \right| \right\|_{l_p} = \left(\sum_{k\geqslant 1} \sup_{n\geqslant 1} \left| \frac{\xi_{nk}}{n^{\frac{1}{p}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k\geqslant 1} \sup_{n\geqslant 1} \frac{|\xi_{nk}|^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{29}$$

Степінь $1/p$ не впливає на збіжність ряду (29). Оскільки $|\xi_{nk}|^p = |\xi_{nk}| \leqslant 1$, то ряд

$$\sum_{k\geqslant 1} \sup_{n\geqslant 1} \frac{|\xi_{nk}|^p}{n}$$

збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathbf{E} \sup_{n\geqslant 1} \frac{|\xi_{nk}|}{n} < \infty.$$

Але в роботі [6] було доведено, що останній ряд розбігається. Це і означає справедливість рівності (27).

Таким чином, моментні умови типу (26) не достатні для справедливості порядкового закону великих чисел Марцинкевича – Зиґмунда (3) в банахових ґратках типу p.

1. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Sur les fonctions indépendantes // Fund. math. – 1937. – **29**. – P. 60 – 90.
2. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. – Berlin: Springer, 1991. – 480 p.
3. *Мацак І. К., Плічко А. М.* Про закон великих чисел Марцинкевича – Зиґмунда у банахових ґратках // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 4. – С. 504 – 513.
4. *Lindenstraus J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. – Berlin etc.: Springer, 1979. – 243 p.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

6. *Мацак І. К.* Зауваження до порядкового закону великих чисел // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2005. – Вип. 72. – С. 84 – 92.
7. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Итоги науки. Мат. анализ. – 1980. – Вып. 18. – С. 125 – 184.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 752 с.
9. *Мацак І. К., Плічко А. М.* Про максимуми незалежних випадкових елементів у функційній банаховій гратці // Теорія ймовірностей. та мат. статистика. – 1999. – Вип. 61. – С. 105–116.
10. *Wellner J. A.* A martingale inequality for the empirical process // Ann. Probab. – 1977. – № 2. – P. 303 – 308.
11. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
12. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
13. *Мацак І. К.* Оцінки моментів супремуму нормованих сум незалежних випадкових величин // Теорія ймовірностей. та мат. статистика. – 2002. – Вип. 67. – С. 104 – 116.
14. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 278 с.

Одержано 11.03.10,
після доопрацювання — 28.09.10