УДК 517.983

Я. І. Грушка (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОСТОРИ УЗАГАЛЬНЕНИХ ОПЕРАТОРІВ З ОБМЕЖЕНИМ ПРОЕКЦІЙНИМ СЛІДОМ*

We construct a theory of Banach spaces of “generalized” operators with bounded projection trace over the given Hilbert space. This theory can be efficient in investigating evolution problems for quantum systems with infinite number of particles.

Построена теория банаховых пространств „обобщенных” операторов с ограниченным проекционным следом над заданным гильбертовым пространством. Эта теория может быть полезной при исследовании эволюционных задач для квантовых систем с бесконечным количеством частиц.

1. Вступ. У багатьох роботах, присвячених дослідженню багаточастинкових квантових систем, еволюція описується за допомогою групи операторів, що діє у просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ операторів *з обмеженим слідом* над гільбертовим простором $\mathfrak{H}$ [1 – 3]. Проте цього простору виявляється недостатньо, зокрема, для розв'язання задач, постановка яких природна в класі операторів із трансляційно-інваріантним ядром, оскільки такі оператори не належать до простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. У зв'язку з цим у роботі [3] ставиться питання про необхідність вивчення властивостей груп операторів у більш загальних операторних просторах, ніж $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. В рамках поставленої задачі в роботі [4] побудовано простори лінійних неперервних операторів з обмеженим проекційним слідом та встановлено, що ці простори, в загальному випадку, не є повними.

У даній роботі конструкції роботи [4] застосовано до більш широкого операторного простору, ніж простір лінійних неперервних операторів, і побудовано банахові простори „узагальнених операторів” з обмеженим проекційним слідом.

2. Попередні відомості. Нехай $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — комплексний сепарабельний гільбертовий простір. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ будемо позначати простір *лінійних неперервних операторів* над $\mathfrak{H}$, а через $\mathbb{O}$ і $\mathbb{I}$ — *нульовий* та *одиничний* оператори простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ відповідно. Для оператора $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ через $\mathbf{Tr}(A)$ будемо позначати *слід* оператора A.

Нехай B — самоспряжений (взагалі кажучи, необмежений) оператор в $\mathfrak{H}$. Через $\sigma_p(B)$ будемо позначати *точковий спектр* оператора B, а через $U(\tau)$ — C_0-групу унітарних операторів $U(\tau) = e^{i\tau B}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Будемо говорити, що оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ є *трансляційно-інваріантним* відносно B, якщо він комутує з розкладом одиниці оператора B (що рівносильно $AU(\tau) = U(\tau)A$, $\tau \in \mathbb{R}$).

Основними прикладами трансляційно-інваріантних операторів є лінійні неперервні оператори у просторі $\mathfrak{H} = L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $d \in \mathbb{N}$, які породжуються *трансляційно-інваріантним ядром*, тобто $\left(A_{\mathcal{K}}x\right)\left(\vec{t}\,\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s}\,)x(\vec{s}\,)d\vec{s}$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathfrak{H}$, де ядро $\mathcal{K}\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ задовольняє умову $\mathcal{K}(\vec{t} + h, \vec{s} + h) = \mathcal{K}(\vec{t}, \vec{s}\,)$, $\vec{t}, \vec{s} \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$ (тут $\vec{t} + h = (t_1 + h, \ldots, t_d + h)$, $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$). Такі оператори є трансляційно-інваріантними відносно генератора групи зсувів по „діагональному” напрямку:

$$\left(U^{(d)}(\tau)x\right)(\vec{s}\,) = x\left(\vec{s} + \tau\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \vec{s} \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект 41/1/011).

Зауважимо, що оператори з трансляційно-інваріантним ядром в $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ вивчались у монографії [5]. Загальновідомо, що ці оператори (в ненульовому випадку) не належать простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Наступна теорема показує, що аналогічний результат має місце і в абстрактній ситуації.

Теорема 1 [4]. *Нехай невід'ємний оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ є трансляційно-інваріантним відносно оператора $B = B^*$ такого, що $\sigma_p(B) = \varnothing$. Тоді $A = \mathbb{O}$.*

Навпаки, якщо $\sigma_p(B) \neq \varnothing$, то, як показано в [4], завжди існує ненульовий трансляційно-інваріантний відносно B оператор $A \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$.

З урахуванням того, що оператори з трансляційно-інваріантним ядром у $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ у ненульовому випадку не належать простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, в роботі [5] для таких операторів введено поняття різницевого сліду або сліду за „різницевою" змінною:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}\left(A_{\mathcal{K}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{\mathcal{K}}(t_1, \ldots t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_d) dt_1 \ldots dt_{i-1} dt_{i+1} \ldots dt_d, & d > 1, \\ \mathcal{K}(0,0), & d = 1, \end{cases} =$$

$$= \frac{\mathbf{Tr}\left(P_i^{(d)}(\Delta) A_{\mathcal{K}} P_i^{(d)}(\Delta)\right)}{\mathbf{m}(\Delta)}, \quad i \in \overline{1,d}, \quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \quad 0 < \mathbf{m}(\Delta) < \infty, \qquad (2)$$

де $\widetilde{\mathcal{K}}\left(\vec{t}\,\right) = \mathcal{K}\left(\vec{t}, \vec{t}\,\right)$, $\mathbf{m}$ — *міра Лебега* на $\mathbb{R}$, $\overline{1,d} = \{1, \ldots, d\}$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра *борелівських* підмножин $\mathbb{R}$, а $P_i^{(d)}$ — спектральна міра на σ-алгебрі $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$:

$$\left(P_i^{(d)}(\Delta) x\right)(\vec{t}\,) := \chi_\Delta(t_i)\, x(\vec{t}\,), \qquad x \in L_2\left(R^d\right), \ \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \quad i \in \overline{1,d} \qquad (3)$$

(тут χ_Δ — *характеристична функція* множини $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$). Легко перевірити, що у випадку трансляційно-інваріантного ядра $\mathcal{K}$ величина $\widetilde{\mathbf{Tr}}(A_{\mathcal{K}})$ **не залежить** від індексу i та множини $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

3. Простори узагальнених векторів та узагальнених операторів, породжені спектральними мірами.

Означення 1. *Нехай $(R, \mathcal{R})$ — вимірний простір (тобто $\mathcal{R}$ — σ-алгебра підмножин R), $P(\cdot)\colon \mathcal{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — спектральна міра на σ-алгебрі $\mathcal{R}$. Крім того, нехай μ — деяка скалярна σ-скінченна і не тотожно рівна нулю міра на $\mathcal{R}$. Тоді четвірку $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ будемо називати **проекційним простором з мірою** над простором $\mathfrak{H}$ (або, скорочено, **ПМ-простором** над $\mathfrak{H}$).*

Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір над $\mathfrak{H}$. Згідно з правою частиною рівності (2) в абстрактній ситуації простір операторів „з обмеженим проекційним слідом" можна визначити як множину тих операторів $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, для яких величина $\|A\|_{P,\mu} :=$ $:= \sup \left\{ \dfrac{\mathbf{Tr}(|P(\Delta) A P(\Delta)|)}{\mu(\Delta)} \,\middle|\, \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}, \ \mu(\Delta) < \infty, \\ \mu(\Delta) + \mathbf{Tr}(|P(\Delta) A P(\Delta)| > 0 \end{array} \right\}$ є скінченною, де у випадку $P(\Delta) A P(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ слід покласти $\mathbf{Tr}(|P(\Delta) A P(\Delta)|) := \infty$, а у випадку $\mu(\Delta) = 0$ покладаємо $\dfrac{\mathbf{Tr}(|P(\Delta) A P(\Delta)|)}{\mu(\Delta)} := \infty$. Але в роботі [4] показано, що подібна конструкція при застосуванні над простором лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ приводить, взагалі кажучи, до **неповних** лінійних нормованих просторів. Наступний приклад ілюструє (на інтуїтивному рівні) той факт, що для повного опису класу об'єктів, які можна назвати „операторами з обмеженим різницевим слідом", потрібно вийти не лише за межі класу лінійних неперервних операторів, але й за межі класу операторів над простором $\mathfrak{H}$.

***Приклад* 1.** Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. Покладемо $\mathcal{K}(t,s) := 1,\ t,s \in \mathbb{R}$. Ядро $\mathcal{K}$ не породжує над простором $\mathfrak{H}$ ніякого нетривіального оператора $A_{\mathcal{K}}$ (навіть необмеженого) у стандартному розумінні цього слова. Справді, позначивши через $\mathfrak{H}_{\mathrm{fin}}$ множину функцій з простору $L_2(\mathbb{R})$, які дорівнюють нулю скрізь, за винятком деякої множини скінченної міри Лебега, навіть для функції $x \in \mathfrak{H}_{\mathrm{fin}}$ будемо мати $(A_{\mathcal{K}}x)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)ds \equiv \mathrm{const},\ t \in \mathbb{R}$. Звідси видно, що $A_{\mathcal{K}}x$ належить $L_2(\mathbb{R})$ лише тоді, коли $\int_{\mathbb{R}} x(s)ds = 0$. Отже, якщо розглядати $A_{\mathcal{K}}$ над простором $L_2(\mathbb{R})$, то отримаємо оператор, який визначений на деякій ніде не щільній лінійній підмножині простору $\mathfrak{H}$ і тотожно дорівнює нулю на цій множині.

Ядро $\mathcal{K}$ є додатно означеним $\left(\text{тобто } \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(t,s)x(t)\overline{x(s)}\,dtds \geq 0,\ x \in \mathfrak{H}_{\mathrm{fin}}\right)$ і трансляційно-інваріантним. Тому, застосувавши формально означення (2) сліду за різницевою змінною, для оператора $A_{\mathcal{K}}$ отримаємо $\widetilde{\mathbf{Tr}}\,(A_{\mathcal{K}}) = \mathcal{K}(0,0) = 1 < < \infty$. Отже, з інтуїтивної точки зору $A_{\mathcal{K}}$ повинен бути „невід'ємним оператором з обмеженим слідом за різницевою змінною".

Хоча оператор $A_{\mathcal{K}}$ не може бути визначений як оператор (навіть необмежений) над основним простором $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$, йому можна надати сенс, як оператору, що діє з „вужчого" простору $\mathfrak{H}_{\mathrm{fin}}$ у „ширший" простір $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ локально сумовних з квадратом функцій: $\widetilde{\mathfrak{H}} = \Big\{ f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \mid \forall \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\ (\mathbf{m}(\Delta) < \infty \Rightarrow \chi_\Delta f \in L_2(\mathbb{R})) \Big\}$, де $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ — простір вимірних за Лебегом функцій.

Нижче ми побудуємо „вужчий" та „ширший" простори в абстрактній ситуації.

3.1. Простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$. Нехай $(R, \mathcal{R}, P, \mu)$ — ПМ-простір. Розглянемо простір „основних" елементів гільбертового простору $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{H}^+_{P,\mu} := \bigcup_{\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}} P(\Delta)\mathfrak{H}, \tag{4}$$

де

$$\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}} = \big\{ \Delta \in \mathcal{R} \,|\, \mu(\Delta) < \infty \big\}.$$

Неважко перевірити, що $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ є лінійним простором відносно алгебраїчних операцій, індукованих із простору $\mathfrak{H}$.

Означення 2. *Будемо вважати, що послідовність векторів* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ *збігається до вектора* $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ *в сенсі простору* $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ $\Big($*позначення* $x_n \xrightarrow{(P,\mu)^+} x$, $n \to \infty\Big)$, *якщо*:

а) *існує множина* $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *така, що* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$;

б) $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$.

Можна перевірити, що введена збіжність перетворює $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ у лінійний простір зі збіжністю у сенсі [6 – 8] (зокрема, це означає, що операції додавання і множення на константу неперервні відносно даної збіжності). Крім того, цей простір є повним у сенсі [7, 8]. Справді, нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною в сенсі

[7, 8], тобто для довільної підпослідовності $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x_{n_k} - x_k \xrightarrow[k\to\infty]{(P,\mu)^+} 0$. Тоді за п. б) означення 2 послідовність $\{x_n\}$ буде фундаментальною, а отже, і збіжною у просторі $\mathfrak{H}$ до деякого вектора $x \in \mathfrak{H}$. Взявши $n_k := k+1$, згідно з п. а) означення 2 отримаємо, що послідовність $\{x_n - x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ належить деякому підпростору $P(\Delta)\mathfrak{H}$, де $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Оскільки згідно з (4) x_1 належить $P(\Delta_1)\mathfrak{H}$ для деякої множини $\Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, то вся послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ буде належати множині $P(\Delta \cup \Delta_1)\mathfrak{H}$, де $\Delta \cup \Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Тобто, за означенням 2, $x_n \xrightarrow{(P,\mu)^+} x$, $n \to \infty$.

У випадку, розглянутому в прикладі 1, простір $\mathfrak{H}_{\mathrm{fin}}$ збігається з простором $\mathfrak{H}^+_{P_1^{(1)},\mathbf{m}}$, де $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$, а $P_1^{(1)}$ — спектральна міра, означена в (3).

Розглянемо простір $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$ лінійних неперервних операторів над простором $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, тобто простір таких лінійних операторів $A\colon \mathfrak{H}^+_{P,\mu} \longmapsto \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, що для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ з умови $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \ni \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ випливає, що $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} Ax$.

Твердження 1. *Лінійний оператор* $A\colon \mathfrak{H}^+_{P,\mu} \longmapsto \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ *належить простору* $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$ *тоді і тільки тоді, коли для довільної множини* $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *існує множина* $\Delta' = \Delta'_A \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *така, що*:

1) $AP(\Delta)\mathfrak{H} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$;

2) $A \upharpoonright P(\Delta)\mathfrak{H} \in \mathcal{L}\left(P(\Delta)\mathfrak{H}, P(\Delta')\mathfrak{H}\right)$, *де через* $A \upharpoonright P(\Delta)\mathfrak{H}$ *позначено звуження оператора* A *на простір* $P(\Delta)\mathfrak{H}$.

Доведення. А. Якщо для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ існує множина $\Delta' \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, яка задовольняє умови 1, 2, то за означенням 2 для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ такої, що $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, виконується $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} Ax$, тобто A належить $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$.

Б. Нехай A належить $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. У випадку $P(\Delta) = \mathbb{O}$ множина $\Delta' := \Delta$ буде задовольняти умови 1, 2. Отже, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $P(\Delta) \neq \mathbb{O}$. Оскільки простір $\mathfrak{H}$ є сепарабельним і $P(\Delta) \neq \mathbb{O}$ $(P(\Delta)\mathfrak{H} \neq \{0\})$, то у підпросторі $P(\Delta)\mathfrak{H}$ існує зліченна скрізь щільна множина $\mathcal{X} = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ така, що $0 \notin \mathcal{X}$ (тобто $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$). Покладемо $\widetilde{x}_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|\, n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді будемо мати $\{\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$, $\|\widetilde{x}_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отже, $\widetilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} 0$. Тому, оскільки A належить $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$, $A\widetilde{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} 0$ і за означенням 2 існує множина $\Delta' \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $\{A\widetilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$. Оскільки $x_n = n\|x_n\|\,\widetilde{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$, то $A\mathcal{X} = \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$. Звідси, враховуючи щільність множини $\mathcal{X}$ в $P(\Delta)\mathfrak{H}$ і неперервність оператора A в сенсі простору $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$, отримуємо $AP(\Delta)\mathfrak{H} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$ і $A \upharpoonright P(\Delta)\mathfrak{H} \in \mathcal{L}\left(P(\Delta)\mathfrak{H}, P(\Delta')\mathfrak{H}\right)$.

Твердження 1 доведено.

3.2. Простір $\boldsymbol{\mathfrak{H}^-_{P,\mu}}$. Позначимо через $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (лінійний) простір $\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)'$ антилінійних неперервних функціоналів над простором $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, тобто таких функціоналів $l\colon \mathfrak{H}^+_{P,\mu} \mapsto \mathbb{C}$, що:

1) $l\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \overline{\alpha}_1 l\left(x_1\right) + \overline{\alpha}_2 l\left(x_2\right)$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$;

2) якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ і $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, то $l\left(x_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l(x)$.

Твердження 2. *Антилінійний функціонал* $l\colon \mathfrak{H}^+_{P,\mu} \mapsto \mathbb{C}$ *належить простору* $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ *тоді і тільки тоді, коли для довільної множини* $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *функціонал*

$$l_\Delta(x) = l(P(\Delta)x), \quad x \in \mathfrak{H}, \tag{5}$$

належить простору $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$.

Доведення. А. Нехай для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ функціонал l_Δ, визначений в (5), належить $\mathfrak{H}'$. Якщо для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ виконується $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, то $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ і існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$. Тому $l(x_n) = l_\Delta x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_\Delta x = l(x)$.

Б. Нехай l належить $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}$ такої, що $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $x \in \mathfrak{H}$, маємо $P(\Delta)x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} P(\Delta)x$. Тому оскільки $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu} = \left(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\right)'$, то

$$l_\Delta x_n = l(P(\Delta)x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l(P(\Delta))x = l_\Delta x,$$

тобто $l_\Delta \in \mathfrak{H}'$.

Твердження 2 доведено.

Означення 3. *Будемо говорити, що послідовність функціоналів* $\{l_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ *збігається* (*сильно*) *до функціонала* $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ *у просторі* $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ $\Big($*позначення* $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} l\Big)$, *якщо для довільної множини* $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *виконується* $\left\|(l_n)_\Delta - l_\Delta\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Можна довести, що введена в означенні 3 збіжність перетворює $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ у лінійний простір зі збіжністю. Зауважимо, що замість слабкої збіжності, яка часто зустрічається в теорії оснащених просторів [9, с. 20], будемо розглядати саме сильну збіжність, введену в означенні 3.

Нехай x належить $\mathfrak{H}$. Позначимо через $\psi[x]$ функціонал, що діє з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ у $\mathbb{C}$ таким чином:

$$(\psi[x])(y) := (x, y), \quad y \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}.$$

Нескладно перевірити, що $\psi[x]$ належить $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ для довільного $x \in \mathfrak{H}$, а відображення $\psi[\cdot]\colon \mathfrak{H} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ неперервне і є лінійним ізоморфізмом між простором $\mathfrak{H}$ і підпростором $\psi\,[\mathfrak{H}]$ простору $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. У зв'язку з викладеним вище довільний елемент $x \in \mathfrak{H}$ будемо ототожнювати з функціоналом $\psi[x] \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Крім того, для $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ і $l \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ введемо скалярний добуток функціонала l на елемент x:

$$(l, x) := l(x), \qquad (x, l) := \overline{(l, x)} = \overline{l(x)}.$$

Враховуючи ототожнення $x = \psi[x]$, $x \in \mathfrak{H}$, можна вважати, що $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, до того ж з неперервності відображення $\psi[\cdot]\colon \mathfrak{H} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ випливає, що останнє вкладення є неперервним. Отже, $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ є розширенням простору $\mathfrak{H}$ з більш „слабкою" збіжністю. У випадку $l \in \mathfrak{H}$ з ототожнення $l = \psi[l]$ випливає, що скалярні добутки $(l, x), (x, l)$ $(x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu})$ збігаються із звичайними скалярними добутками в $\mathfrak{H}$. Легко перевірити, що ці скалярні добутки лінійні за першою змінною і антилінійні за другою.

Твердження 3. *Якщо* $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{l\}\subseteq\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{x\}\subseteq\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} l$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x$, *то* $(l_n,x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(l,x)$ *і* $(x_n,l_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(x,l)$.

Доведення. Оскільки $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x$, то $\|x_n-x\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ і $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$ для деякої множини $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Оскільки $l_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} l$, то $\left\|\,(l_n)_\Delta-l_\Delta\right\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Тому

$$\big|(l_n,x_n)-(l,x)\big|\le|(l_n-l)\,(x_n)|+|l\,(x_n-x)|=$$

$$=|(l_n-l)\,(P(\Delta)\,(x_n))|+|l\,(P(\Delta)\,(x_n-x))|=$$

$$=|((l_n)_\Delta-l_\Delta)\,(x_n)|+|l_\Delta\,(x_n-x)|\le$$

$$\le\|(l_n)_\Delta-l_\Delta\|\,\|x_n\|+\|l_\Delta\|\,\|x_n-x\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Співвідношення $(x_n,l_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(x,l)$ випливає з рівності $(x_n,l_n)=\overline{(l_n,x_n)}$, $n\in\mathbb{N}$.

Твердження 3 доведено.

Твердження 4. *Всі вкладення просторів* $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ *щільні і неперервні.*

Доведення. Нехай l належить $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$. Розглянемо довільну послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ таку, що $\Delta_n\subseteq\Delta_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n=R$ (оскільки міра μ є σ-скінченною, то така послідовність множин існує). Покладемо

$$z_n(x):=l_{\Delta_n}(x)=l\,(P\,(\Delta_n)\,x)\,,\qquad n\in\mathbb{N},\quad x\in\mathfrak{H}.$$

Згідно з твердженням 2 $z_n\in\mathfrak{H}$, $n\in\mathbb{N}$. Тому для $n\in\mathbb{N}$ і $x\in\mathfrak{H}$ маємо

$$(P\,(\Delta_n)\,z_n,x)=(z_n,P\,(\Delta_n)\,x)=l\big(P\big(\Delta_n\big)^2x\big)=l\,(P\,(\Delta_n)\,x)=(z_n,x)\,.$$

Отже, $P\,(\Delta_n)\,z_n=z_n$, $n\in\mathbb{N}$, тобто $z_n\in P\,(\Delta_n)\,\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, $n\in\mathbb{N}$.

Доведемо, що $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} l$. Нехай $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $x\in\mathfrak{H}$ і $n\in\mathbb{N}$. Тоді

$$|(z_n)_\Delta\,(x)-l_\Delta(x)|=$$

$$=|(z_n,P(\Delta)x)-l_\Delta(x)|=|l\,(P\,(\Delta_n)\,P(\Delta)x)-l_\Delta(x)|=$$

$$=|l\,(P(\Delta)P\,(\Delta_n)\,x)-l_\Delta(x)|=|l_\Delta\,(P\,(\Delta_n)\,x-x)|=$$

$$=|(l_\Delta,(P\,(\Delta_n)-\mathbb{I})\,x)|=|((P\,(\Delta_n)-\mathbb{I})\,l_\Delta,x)|\le$$

$$\le\|(P\,(\Delta_n)-\mathbb{I})\,l_\Delta\|\,\|x\|\,,$$

тобто $\big\|(z_n)_\Delta-l_\Delta\big\|\le\|(P\,(\Delta_n)-\mathbb{I})\,l_\Delta\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, а отже, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} l$. Щільність $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ в $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ доведено. Щільність $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$ випливає з включення $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}\subseteq\subseteq\mathfrak{H}$, а щільність $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ в $\mathfrak{H}$ випливає з того, що $\|P\,(\Delta_n)\,x-x\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ $\forall x\in\mathfrak{H}$.

Неперервність вкладення $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ було обґрунтовано вище (див. с. 28), неперервність вкладення $\mathfrak{H}^+_{P,\mu} \subseteq \mathfrak{H}$ є очевидною.

Твердження 4 доведено.

Наступний приклад показує, що деякі відомі математичні об'єкти, які виникли самостійно, можна розглядати як частинний випадок просторів $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.

Приклад 2. Нехай $\mathfrak{H} = L_2([0, 2\pi])$ — простір сумовних з квадратом 2π-періодичних функцій. Покладемо

$$R := \mathbb{Z}, \quad \mathcal{R} := 2^{\mathbb{Z}}, \quad \mu(\Delta) := \operatorname{card}(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{R},$$

$$(P(\Delta)f)(x) := \sum_{k\in\Delta} f\hat{\ }(k)e^{ikx}, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

де $\operatorname{card}(\Delta)$ — потужність множини Δ, а $f\hat{\ }(k)$ — k-й коефіцієнт ряду Фур'є функції $f \in \mathfrak{H}$. У цьому випадку $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ збігається з множиною всіх скінченних множин цілих чисел, а простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ — із простором всіх тригонометричних многочленів. Можна довести, що збіжність у просторі $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ збігається із збіжністю у просторі тригонометричних многочленів в сенсі [10]. Тому простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ буде збігатися з простором узагальнених періодичних функцій, введеним у [10, 11]. Внаслідок скінченновимірності підпросторів $P(\Delta)\mathfrak{H}$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, у цьому випадку сильна збіжність на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ збігається з традиційною слабкою збіжністю в „негативному" просторі.

3.3. Простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$. Продовження операторів з простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ в $\mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$. Розглянемо простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$ лінійних неперервних операторів на просторі $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, тобто таких лінійних операторів $A\colon \mathfrak{H}^-_{P,\mu} \mapsto \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, що для довільної послідовності $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ такої, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, має місце $Af_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} Af$. Очевидно, що $\mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$ є лінійним простором відносно операцій додавання операторів і множення операторів на комплексні числа. Також легко бачити, що для $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$ добуток операторів AB також належить $\mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$.

Будемо говорити, що оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ допускає продовження на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, якщо існує оператор $A_- \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}^-_{P,\mu})$ такий, що $A \subseteq A_-$. Такий оператор A_- будемо називати *продовженням оператора A на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$*. Зі щільності простору $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ випливає, що якщо продовження A_- оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ існує, то воно єдине. Легко переконатись у справедливості наступного твердження.

Твердження 5. 1. *Оператори $\mathbb{O}, \mathbb{I} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ допускають продовження на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, при цьому $\mathbb{O}_- = \mathbb{O}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}$, $\mathbb{I}_- = \mathbb{I}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}$, де $\mathbb{O}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}, \mathbb{I}^{[\mathfrak{H}^-_{P,\mu}]}$ — нульовий та одиничний оператори на просторі $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.*

2. *Якщо оператори A, $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ допускають продовження на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, то оператори $\lambda A + \mu B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, і AB також допускають продовження на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, при цьому $(\lambda A + \mu B)_- = \lambda A_- + \mu B_-$, $(AB)_- = A_- B_-$.*

Згідно з п. 1 твердження 5, якщо це не викликає непорозумінь, нульовий та одиничний оператори простору $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ будемо позначати так само, як і відповідні оператори простору $\mathfrak{H}$ (тобто $\mathbb{O}_- = \mathbb{O}$, $\mathbb{I}_- = \mathbb{I}$).

Нехай A належить $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Позначимо через A_+ звуження оператора A на простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $A_+ := A \upharpoonright \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$.

***Зауваження* 1.** Оператор A_+ можна трактувати як оператор, що діє з простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}$, або як оператор, що діє з $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.

Твердження 6. *Якщо A належить $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $(A^*)_+$ належить $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$ (де A^* — оператор, спряжений до A в сенсі простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$), то оператор A допускає продовження на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. При цьому для $f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ і $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ має місце рівність*

$$(A_- f,\, x) = (f,\, A^* x)\,. \tag{6}$$

Доведення. Нехай $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $(A^*)_+ \in \mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$. Для $f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ покладемо

$$(A_\sim f, x) := (f, A^* x) = \big(f, (A^*)_+ x\big), \quad x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}. \tag{7}$$

Оскільки $(A^*)_+$ належить $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$, то формула (7) коректно визначає антилінійний функціонал $A_\sim f$ на просторі $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, причому, згідно з твердженням 3, цей функціонал є неперервним на $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, тобто $A_\sim f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$, $f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Таким чином, $A_\sim$ — оператор, що відображає простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. З означення (7) видно, що цей оператор є лінійним. Доведемо, що оператор $A_\sim$ є неперервним на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ таку, що $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Використовуючи (7), для довільного вектора $x \in \mathfrak{H}$ отримуємо

$$\left((A_\sim f_n)_\Delta - (A_\sim f)_\Delta\,, x\right) = (A_\sim f_n - A_\sim f, P(\Delta)x) = (f_n - f, A^* P(\Delta) x)\,.$$

Оскільки $(A^*)_+$ належить $\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$, то, згідно з твердженням 1, існує множина $\Delta' \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $A^* P(\Delta)\mathfrak{H} \subseteq P(\Delta')\mathfrak{H}$ $(A^* P(\Delta)x = P(\Delta')A^* P(\Delta)x,\ x \in \mathfrak{H})$. Тому

$$\big|((A_\sim f_n)_\Delta - (A_\sim f)_\Delta, x)\big| = \big|\big(f_n - f, P(\Delta')A^* P(\Delta)x\big)\big| =$$

$$= \big|\big(\,(f_n)_{\Delta'} - f_{\Delta'}, A^* P(\Delta)x\big)\big| \le \big\|\,(f_n)_{\Delta'} - f_{\Delta'}\big\|\, \|A^*\|\, \|x\|\,, \quad x \in \mathfrak{H},$$

$$\big\|\,(A_\sim f_n)_\Delta - (A_\sim f)_\Delta\,\big\| \le \big\|(f_n)_{\Delta'} - f_{\Delta'}\big\|\, \|A^*\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\forall \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}})\,.$$

Отже, за означенням 3 $A_\sim f_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} A_\sim f$, тобто $A_\sim \in \mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\big)$. Для $f \in \mathfrak{H}$ і $x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ згідно з (7) маємо $(A_\sim f, x) = (f, A^* x) = (Af, x)$ або $A_\sim f = Af$, $f \in \mathfrak{H}$. Отже, $A_\sim$ є (неперервним) продовженням оператора A на простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (тобто $A_- = A_\sim$).

Твердження 6 доведено.

3.4. Продовження спектральної міри $P(\Delta)$. Якщо Δ належить $\mathcal{R}$, то оператор $P(\Delta)$ відображає лінійно неперервно простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ в себе. Тому твердження 6 дає змогу при $\Delta \in \mathcal{R}$ продовжити проекційні оператори $P(\Delta)$ на весь простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Введемо позначення

$$\mathbb{P}(\Delta) = P(\Delta)_-, \quad \Delta \in \mathcal{R}.$$

Згідно з співвідношенням (6) для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}$ має місце рівність

$$(\mathbb{P}(\Delta) f, x) = (f, P(\Delta)x)\,, \quad f \in \mathfrak{H}^-_{P,\mu}, \quad x \in \mathfrak{H}^+_{P,\mu}. \tag{8}$$

Згідно з твердженням 5 для операторів $\mathbb{P}(\Delta)$ зберігаються такі властивості:

$$\mathbb{P}(\varnothing)=\mathbb{O},\quad \mathbb{P}(R)=\mathbb{I},\qquad \mathbb{P}(\Delta)^2=\mathbb{P}(\Delta),\quad \Delta\in\mathcal{R},$$

$$\mathbb{P}\left(\Delta_1\cap\Delta_2\right)=\mathbb{P}\left(\Delta_1\right)\mathbb{P}\left(\Delta_2\right),\quad \Delta_1,\,\Delta_2\in\mathcal{R}, \tag{9}$$

$$\mathbb{P}\left(\Delta_1\cup\Delta_2\right)=\mathbb{P}\left(\Delta_1\right)+\mathbb{P}\left(\Delta_2\right),\quad \Delta_1,\,\Delta_2\in\mathcal{R},\quad \Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing.$$

За означенням простору $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ при $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ оператори $P(\Delta)$ відображають простір $\mathfrak{H}$ у простір $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ (тобто $P(\Delta)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$). Виявляється, що викладене залишається правильним і для операторів $\mathbb{P}(\Delta)$ на $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ (а саме, $\mathbb{P}(\Delta)\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\subseteq$ $\subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$, $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$).

Твердження 7. 1. *Для довільної множини* $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ $\mathbb{P}(\Delta)\mathfrak{H}^-_{P,\mu}\subseteq P(\Delta)\mathfrak{H}$.

2. *Для* $\{f_n\}_{n=1}^\infty\cup\{f\}\subseteq\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ *збіжність* $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-}f$ *рівносильна умові*

$$\|\mathbb{P}(\Delta)f_n-\mathbb{P}(\Delta)f\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\quad\forall\,\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}.$$

3. *Якщо* $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, *то* $\mathbb{P}(\Delta)\in\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^-_{P,\mu},\mathfrak{H}^+_{P,\mu}\big)$ $\big($*і, як наслідок,* $\mathbb{P}(\Delta)\in$ $\in\mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^-_{P,\mu},\mathfrak{H}\big)\big)$.

Доведення. 1. Нехай $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ і $f\in\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. З рівності (8) випливає, що

$$\mathbb{P}(\Delta)f=f_\Delta, \tag{10}$$

де $f_\Delta\in\mathfrak{H}$ — вектор, визначений в (5). Отже, згідно з властивостями (9) $\mathbb{P}(\Delta)f=$ $=\mathbb{P}(\Delta)^2f=P(\Delta)f_\Delta\in P(\Delta)\mathfrak{H}$.

2. Другий пункт даного твердження випливає з означення 3 і рівності (10).

3. Нехай Δ належить $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Згідно з п. 1 даного твердження оператор $\mathbb{P}(\Delta)$ відображає простір $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ у простір $P(\Delta)\mathfrak{H}$ (а отже, і в $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$), причому, згідно з п. 2, $\mathbb{P}(\Delta)$ відображає $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$ в $\mathfrak{H}^+_{P,\mu}$ лінійно неперервно.

Твердження 7 доведено.

Твердження 8. *Нехай* $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{R}$ — *диз'юнктна послідовність множин* ($\Delta_i\cap\Delta_j=\varnothing$ *при* $i\neq j$) *і* $\Delta_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. *Тоді* $\mathbb{P}\left(\Delta_0\right)=\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}\left(\Delta_n\right)$, *де збіжність ряду слід розуміти в сильному сенсі над простором* $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$.

Доведення. Нехай f належить $\mathfrak{H}^-_{P,\mu}$. Тоді для довільної множини $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, згідно з твердженням 7 (п. 1)), $\mathbb{P}(\Delta)f$ належить $\mathfrak{H}$. Тому, враховуючи властивості (9), для довільного $n\in\mathbb{N}$ отримуємо

$$\left\|\mathbb{P}(\Delta)\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\left(\Delta_k\right)f-\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0\right)f\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\left(\Delta\cap\Delta_k\right)f-\mathbb{P}\left(\Delta\cap\Delta_0\right)f\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{k=1}^nP\left(\Delta_k\right)\mathbb{P}(\Delta)f-P\left(\Delta_0\right)\mathbb{P}(\Delta)f\right\|. \tag{11}$$

Оскільки $P(\cdot)$ — спектральна міра над $\mathfrak{H}$, то права частина рівності (11) прямує до нуля при $n\to\infty$. Отже, для $\Delta\in\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ маємо

$$\left\| \mathbb{P}(\Delta) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\Delta_k\right) f - \mathbb{P}(\Delta) \mathbb{P}\left(\Delta_0\right) f \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Внаслідок цього, враховуючи твердження 7 (п. 2)), завершуємо доведення твердження 8.

4. Простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ як розширення простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Основним об'єктом подальшого вивчення буде простір

$$\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) = \mathcal{L}\big(\mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}, \mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}\big)$$

лінійних неперервних операторів з простору $\mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$ у простір $\mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}$ $\Big($тобто таких операторів $A\colon \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu} \longmapsto \mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}$, що для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$ такої, що $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \in \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$, має місце $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} Ax\Big)$.

Очевидно, що простір $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ є лінійним простором відносно операцій додавання операторів та множення операторів на комплексні числа.

Твердження 9. *Для того щоб лінійний оператор $A\colon \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu} \longmapsto \mathfrak{H}^{-}_{P,\mu}$ належав простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}. \tag{12}$$

Доведення. *Необхідність* випливає з твердження 7 (п. 3)).

Достатність. Нехай виконується умова (12). Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$ таку, що $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \in \mathfrak{H}^{+}_{P,\mu}$. Тоді, за означенням збіжності $\xrightarrow{(P,\mu)^+}$, існує множина $\Delta_0 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P\left(\Delta_0\right)\mathfrak{H}$ і $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Враховуючи п. 2 твердження 7, для доведення збіжності $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^-} Ax$ досить показати, що $\|\mathbb{P}(\Delta)\left(Ax_n - Ax\right)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall\, \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Отже, розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Оскільки x_n, x належать $P\left(\Delta_0\right)\mathfrak{H} \subseteq P\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$, то, використовуючи рівності (9), отримуємо

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}(\Delta)\left(Ax_n - Ax\right)\| &= \\ = \|\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\left(AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x_n - AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x\right)\| &= \\ = \|P(\Delta)\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\left(AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x_n - AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x\right)\| &\le \\ \le \|\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)\left(AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x_n - AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)x\right)\|. & \end{aligned} \tag{13}$$

За умовою (12) $\mathbb{P}\left(\Delta_0 \cup \Delta\right) AP\left(\Delta_0 \cup \Delta\right)$ належить $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Отже, вираз у правій частині (13) прямує до нуля при $n \to \infty$, що й необхідно було довести.

Твердження 9 доведено.

Твердження 9 мотивує введення рівномірної збіжності в $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Означення 4. *Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.*

1. *Будемо говорити, що послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **рівномірно збігається** до оператора A **у просторі** $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ $\Bigg($**позначення** $A_n \underset{n\to\infty}{\overset{(P,\mu)}{\rightrightarrows}} A\Bigg)$, якщо*

для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *виконується співвідношення* $\left\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *де операторну норму слід розуміти в рівномірному сенсі.*

2. *Будемо говорити, що послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *є* ***рівномірно фундаментальною*** *у просторі* $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$, *якщо для довільної множини* $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ *послідовність операторів* $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ *рівномірно фундаментальна у просторі* $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$.

Введена вище рівномірна операторна збіжність перетворює $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ в лінійний простір зі збіжністю.

Теорема 2. *Для того щоб послідовність* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ *була рівномірно фундаментальною у просторі* $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$, *необхідно і достатньо, щоб існував оператор* $A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ *такий, що* $A_n \overset{(P,\mu)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} A$.

Зауваження **2.** Можна довести, що фундаментальність послідовності операторів у сенсі п. 2 означення 4 рівносильна її фундаментальності в сенсі лінійних просторів зі збіжністю [7, 8]. Отже, теорема 2 стверджує, що простір $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$, є повним у сенсі [7, 8] відносно введеної в означенні 4 збіжності.

Доведення теореми **2.** *Достатність* випливає безпосередньо з означення 4.

Необхідність. Нехай послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно фундаментальною у просторі $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Тоді для $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ послідовність $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно фундаментальною у просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Тому для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ існує оператор $\mathcal{A}_\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ такий, що

$$\left\|\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta) - \mathcal{A}_\Delta\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{14}$$

Тоді для довільних $\Delta,\, \Delta_1 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ маємо

$$P(\Delta_1)\,\mathcal{A}_\Delta P(\Delta_1) = \lim_{n\to\infty} P(\Delta_1)\,\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)P(\Delta_1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Delta_1 \cap \Delta)\,A_nP(\Delta_1 \cap \Delta) = \mathcal{A}_{\Delta\cap\Delta_1}, \tag{15}$$

де границю слід розуміти у рівномірному сенсі простору $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Нехай $x,\, y$ належать $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$. Тоді існує множина $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що x, y належать $P(\Delta)\mathfrak{H}$. Покладемо

$$\mathtt{A}(x,y) := (\mathcal{A}_\Delta x, y) \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Доведемо, що таке означення коректне, тобто вираз $\mathtt{A}(x,y)$ не залежить від множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ такої, що x, y належать $P(\Delta)\mathfrak{H}$. Нехай x, y належать $P(\Delta_1)\,\mathfrak{H}$, де Δ_1 належать $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Тоді, згідно з (15),

$$(\mathcal{A}_\Delta x, y) = (\mathcal{A}_\Delta P(\Delta_1)\,x, P(\Delta_1)\,y) =$$

$$= (P(\Delta_1)\,\mathcal{A}_\Delta P(\Delta_1)\,x, y) = (\mathcal{A}_{\Delta\cap\Delta_1} x, y)\,.$$

Аналогічно, $(\mathcal{A}_{\Delta_1} x, y) = (\mathcal{A}_{\Delta\cap\Delta_1} x, y)$, тобто $(\mathcal{A}_\Delta x, y) = (\mathcal{A}_{\Delta_1} x, y)$. Коректність означення доведено.

З (16) випливає, що $\mathtt{A}(\cdot,\cdot)$ є 1,5-лінійною формою на $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ (тобто відображенням з $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+} \times \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ в $\mathbb{C}$, яке є лінійним за першою змінною і антилінійним за другою). Доведемо, що ця форма є неперервною за сукупністю змінних. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовності векторів з простору $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, до того ж $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P,\mu)^+} y \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$. Тоді з означення збіжності $\xrightarrow{(P,\mu)^+}$ випливає існування множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ такої, що x_n, y_n належать $P(\Delta)\mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$, і виконання співвідношень $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\|y_n - y\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Оскільки x_n, y_n належать $P(\Delta)\mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$, і $\mathcal{A}_\Delta$ належить $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, то, згідно з (16), при $n \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$\mathtt{A}\,(x_n, y_n) = (\mathcal{A}_\Delta x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathcal{A}_\Delta x, y) = \mathtt{A}\,(x, y),$$

Неперервність 1,5-лінійної форми $\mathtt{A}$ доведено.

Нехай $x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$. Покладемо

$$(Ax)(y) := \mathtt{A}(x, y), \quad y \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}. \tag{17}$$

Оскільки $\mathtt{A}(\cdot,\cdot)$ — 1,5-лінійна форма, що неперервна за сукупністю змінних, то Ax є антилінійним неперервним функціоналом на $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ (для довільного $x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$), тобто $Ax \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$, $x \in \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$. Отже, A — оператор, що відображає $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ в $\mathfrak{H}_{P,\mu}^{-}$. З лінійності форми $\mathtt{A}$ за першою змінною випливає, що оператор A є лінійним. Доведемо, що $A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Розглянемо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$. Використовуючи послідовно (8), (17), (16) і (15), для довільних $x, y \in \mathfrak{H}$ знаходимо

$$(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)x, y) = (AP(\Delta)x, P(\Delta)y) = \mathtt{A}\,(P(\Delta)x, P(\Delta)y) =$$

$$= (\mathcal{A}_\Delta P(\Delta)x, P(\Delta)y) = (P(\Delta)\mathcal{A}_\Delta P(\Delta)x, y) = (\mathcal{A}_\Delta x, y).$$

Отже,

$$\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta) = \mathcal{A}_\Delta, \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}, \tag{18}$$

де $\mathcal{A}_\Delta \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$. Тому, згідно з твердженням 9, A належить $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$.

Використовуючи (18) і (14), для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ і довільного номера $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\left\|\mathbb{P}(\Delta)\,(A_n - A)\,P(\Delta)\right\| = \left\|\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta) - \mathcal{A}_\Delta\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, за означенням 4 $A_n \overset{(P,\mu)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} A$.

Теорему 2 доведено.

Нехай A належить $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$. Враховуючи зауваження 1, скрізь у даному підпункті оператор $A_+ = A \restriction \mathfrak{H}_{P,\mu}^{+}$ будемо розуміти як оператор з простору $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Легко перевірити, що відображення $(\cdot)_+ \colon \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \mapsto \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ взаємно однозначно відображає простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ у підпростір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})_+ = \{A_+ \colon A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})\}$ простору $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ і є інваріантним відносно лінійних операцій над операторами. Тому ми можемо простір $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ ототожнити з підпростором $\mathcal{L}(\mathfrak{H})_+$, а довільний оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — з оператором $A_+ \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Тоді отримаємо включення $\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$. Довільна рівномірно збіжна в $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною і в $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ (точніше, в $\mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ є збіжною послідовність $\left\{(A_n)_+\right\}_{n=1}^{\infty}$). Отже, вкладення $\mathcal{L}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ є неперервним. Неважко перевірити, що для оператора $A \in \mathcal{L}_{P,\mu}^{+-}(\mathfrak{H})$ має місце рівносильність

$$A = \mathbb{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}} \; \mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta) = \mathbb{O}. \tag{19}$$

5. Узагальнені проекційні сліди операторів з простору $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Нехай A належить $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Покладемо

$$\nu_{P,A}(\Delta) := \mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta)|), \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}},$$

де у випадку $\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta) \notin \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ слід покласти $\nu_{P,A}(\Delta) := \infty$. Отже, можна вважати, що величина $\nu_{P,A}(\Delta)$ визначена для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$.

Покладемо

$$\|A\|_{P,\mu} := \sup \left\{ \frac{\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}, \\ \mu(\Delta) + \nu_{P,A}(\Delta) > 0 \end{array} \right\}, \quad A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H}), \tag{20}$$

де у випадку $\mu(\Delta) = 0$ слід покласти $\dfrac{\nu_{P,A}(\Delta)}{\mu(\Delta)} := \infty$. Оскільки, як було зазначено в означенні 1, міра μ є σ-скінченною і не тотожно дорівнює нулю, то визначення величини $\|\cdot\|_{P,\mu}$ коректне (тобто „$\sup$” в (20) береться по непорожній множині).

Враховуючи, що величина $\|A\|_{P,\mu}$ є скінченною, взагалі кажучи, не при всіх $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, покладемо

$$\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) := \left\{ A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) : \; \|A\|_{P,\mu} < \infty \right\}.$$

Якщо A належить $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, то для множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ з умови $\mu(\Delta) = 0$ згідно з (20) випливає $\nu_{P,A}(\Delta) = 0$. З останнього зауваження і рівності (20) отримуємо, що для довільного оператора $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ виконується нерівність

$$\mathbf{Tr}(|\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta)|) \le \|A\|_{P,\mu} \, \mu(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}. \tag{21}$$

Теорема 3. $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ *є банаховим простором, який неперервно вкладається у простір* $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

Доведення. 1. Згідно з теоремою 2 [4] $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \cap \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ є лінійним нормованим простором. Тому, скориставшись рівністю

$$\|A\|_{P,\mu} = \sup_{\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}} \|\mathbb{P}(\Delta) A P(\Delta)\|_{P,\mu}, \quad A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$$

(яку легко довести) і рівносильністю (19), неважко переконатись, що $\left(\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}),\right.$ $\left.\|\cdot\|_{P,\mu}\right)$ є лінійним нормованим простором. Доведемо повноту цього простору. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\|A_n - A_m\|_{P,\mu} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Зафіксуємо довільну множину $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Згідно з (21) для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathbf{Tr}\left(\left|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A_m) P(\Delta)\right|\right) \le \mu(\Delta) \|A_n - A_m\|_{P,\mu}. \tag{22}$$

Таким чином, з фундаментальності послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ у просторі $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ випливає фундаментальність послідовності $\left\{\mathbb{P}(\Delta) A_n P(\Delta)\right\}_{n=1}^{\infty}$ у просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, а отже, і в просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Тобто, за означенням 4 послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ є рівномірно фундаментальною у просторі $\mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і, згідно з теоремою 2, існує оператор $A \in \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ такий, що $A_n \overset{(P,\mu)}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} A$.

Доведемо, що A належить $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\|A_n - A\|_{P,\mu} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За означенням 4 для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ $\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. З іншого боку, як було зазначено вище, послідовність операторів $\{\mathbb{P}(\Delta)A_nP(\Delta)\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, а отже, і збіжною, у просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Отже, враховуючи, що з існування границі послідовності операторів у просторі $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$ випливає збіг цієї границі з її рівномірною границею у просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$, переконуємося, що для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ оператор $\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)$ належить $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, причому $\left\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\right\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Покладемо

$$\eta_n := \sup_{m\in\mathbb{N},\, m\geq n} \|A_n - A_m\|_{P,\mu}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки, за умовою, $\|A_n - A_m\|_{P,\mu} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\eta_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$. З нерівності (22) випливає, що $\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A_m)P(\Delta)\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \leq \mu(\Delta)\eta_n$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Тому, перейшовши до границі при $m \to \infty$, отримаємо

$$\nu_{P,A_n-A}(\Delta) = \left\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\right\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \leq \mu(\Delta)\eta_n, \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

тому $\|A_n - A\|_{P,\mu} \leq \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\eta_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, то з останнього співвідношення випливає, що A належить $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, Більш того, оскільки $\eta_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, то послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до оператора A за нормою простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$.

2. За побудовою простору $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Якщо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\|A_n - A\|_{P,\mu} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, де $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$, то за нерівністю (21) для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ маємо

$$\left\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\mathbb{P}(\Delta)(A_n - A)P(\Delta)\right\|_{\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})} \leq \|A_n - A\|_{P,\mu}\,\mu(\Delta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

тобто $A_n \overset{(P,\mu)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} A$. Неперервність вкладення $\mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathcal{L}^{+-}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ доведено.

Теорему 3 доведено.

Зауважимо, що теорему 3 було анонсовано в роботі [12].

З нерівності (21) випливає, що для довільного оператора $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ величина $\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta))$ має сенс. Також з цієї нерівності та з співвідношення (2.6) [13, с. 24] випливає, що

$$|\tau_{P,A}(\Delta)| \leq \mathbf{Tr}\,(|\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)|) \leq \|A\|_{P,\mu}\,\mu(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}. \qquad (23)$$

Теорема 4. *Нехай $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$. Тоді*:

1) *функція множини $\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta))$, $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$, є комплекснозначним зарядом на кільці множин $\mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$*;

2) *заряд $\tau_{P,A}(\cdot)$ є абсолютно неперервним відносно міри μ; це означає, що існує похідна Радона – Никодима $\dfrac{d\tau_{P,A}}{d\mu}$, тобто функція $\dfrac{d\tau_{P,A}}{d\mu} : R \mapsto \mathbb{C}$ така, що для довільної множини $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\text{fin}}$ має місце рівність*

$$\tau_{P,A}(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}(\xi)\,d\mu(\xi).$$

Доведення. 1. Нехай $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$ і $\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta))\,,\, \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$.

I. Доведемо спочатку, що функція множини $\tau_{P,A}(\cdot)$ є адитивною на кільці множин $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Нехай $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$. Покладемо $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$, $A_\Delta := \mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)$. Згідно з (21) $A_\Delta \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$. Тому, використовуючи властивості (9) та загальновідомі властивості слідів операторів з простору $\mathcal{L}^1(\mathfrak{H})$, отримуємо

$$\tau_{P,A}(\Delta) = \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)) = \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta)\mathbb{P}(\Delta)AP(\Delta)P(\Delta)) =$$

$$= \mathbf{Tr}\,(P(\Delta)A_\Delta P(\Delta)) = \mathbf{Tr}\,(P(\Delta)A_\Delta) = \mathbf{Tr}\,((P(\Delta_1) + P(\Delta_2))\,A_\Delta) =$$

$$= \mathbf{Tr}\,(P(\Delta_1)\,A_\Delta) + \mathbf{Tr}\,(P(\Delta_2)\,A_\Delta) =$$

$$= \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta_1)\,A_\Delta P(\Delta_1)) + \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta_2)\,A_\Delta P(\Delta_2)) =$$

$$= \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta_1 \cap \Delta)\,AP(\Delta_1 \cap \Delta)) + \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta_2 \cap \Delta)\,AP(\Delta_2 \cap \Delta)) =$$

$$= \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta_1)\,AP(\Delta_1)) + \mathbf{Tr}\,(\mathbb{P}(\Delta_2)\,AP(\Delta_2)) = \tau_{P,A}(\Delta_1) + \tau_{P,A}(\Delta_2)\,.$$

II. Доведемо, що функція $\tau_{P,A}$ є σ-адитивною на $\mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. Нехай $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, де $\Delta_i \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Покладемо $\Lambda_N := \bigcup_{n=1}^{N} \Delta_n$, $N \in \mathbb{N}$. Тоді, згідно з п. I для довільного $N \in \mathbb{N}$ маємо

$$\tau_{P,A}(\Delta) = \tau_{P,A}(\Lambda_N) + \tau_{P,A}(\Delta \setminus \Lambda_N) = \sum_{n=1}^{N} \tau_{P,A}(\Delta_n) + \tau_{P,A}(\Delta \setminus \Lambda_N)\,,$$

де, згідно з нерівністю (23),

$$\left|\tau_{P,A}(\Delta \setminus \Lambda_N)\right| \leq \|A\|_{P,\mu}\, \mu(\Delta \setminus \Lambda_N) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_{P,A}(\Delta_n)$ збігається і $\tau_{P,A}(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{P,A}(\Delta_n)\,.$

2. Доведемо існування похідної Радона – Никодима $\dfrac{d\tau_{P,A}}{d\mu}$. Оскільки міра μ є σ-скінченною, то існує послідовність множин $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$ така, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n = R$. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, $i \neq j$. $\Big($Справді, якщо послідовність $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такої властивості не має, то завжди можна перейти до послідовності множин $\big\{\widetilde{\Delta}_n\big\}_{n=1}^{\infty}$, де $\widetilde{\Delta}_1 = \Delta_1$ і $\widetilde{\Delta}_n = \big(\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k\big) \setminus \big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \Delta_k\big)$, $n > 1.\Big)$

Покладемо $\mathcal{R}_n := \{\Delta \in \mathcal{R} \colon \Delta \subseteq \Delta_n\} = \{\Delta \cap \Delta_n \colon \Delta \in \mathcal{R}\}\,, n \in \mathbb{N}$. Тоді будемо мати $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$, $n \in \mathbb{N}$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$ клас множин $\mathcal{R}_n$ є σ-алгеброю і $\tau_{P,A}$ є (скінченним) зарядом на σ-алгебрі $\mathcal{R}_n$. З нерівності (23) випливає, що цей заряд є абсолютно неперервним відносно міри μ на Δ_n. Отже, згідно з теоремою Радона – Никодима, для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує функція $\rho_n \colon \Delta_n \mapsto \mathbb{C}$ така, що $\tau_{P,A}(\Delta) = \int_{\Delta} \rho_n(\xi) d\mu(\xi)$, $\Delta \in \mathcal{R}_n$, причому з нерівності (23) випливає, що для майже всіх $\xi \in \Delta_n$ має місце нерівність $|\rho_n(\xi)| \leq \|A\|_{P,\mu}$. Тому функція $\rho \colon R \mapsto \mathbb{C}$, що збігається з функціями ρ_n на довільній множині Δ_n, $n \in \mathbb{N}$, буде істотно обмеженою на R, а отже, і сумовною за мірою μ на довільній множині $\Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$.

Звідси неважко вивести, що $\tau_{P,A}(\Delta) = \int_{\Delta} \rho(\xi) d\mu(\xi),\ \Delta \in \mathcal{R}_{\mu-\mathrm{fin}}$. З єдиності (з точністю до „майже скрізь") похідної Радона – Никодима на множинах скінченної міри $\Delta_n,\ n \in \mathbb{N}$, випливає, що функція ρ, що задовольняє останню умову, єдина з точністю до „майже скрізь за мірою μ". Отже, рівність $\rho = \dfrac{d\tau_{P,A}}{d\mu}$ має місце на всій множині R. Теорему 4 доведено.

Похідну Радона – Никодима, про яку йшлося в теоремі 4, *будемо називати узагальненим проекційним слідом оператора* $A \in \mathfrak{T}_{P,\mu}(\mathfrak{H})$:

$$\widetilde{\mathbf{Tr}}_{P,\mu}[A] := \frac{d\tau_{P,A}}{d\mu}.$$

Можна довести, що у класичному випадку лінійних неперервних операторів з трансляційно-інваріантним ядром в $L_2(\mathbb{R}^d)$ узагальнений проекційний слід $\widetilde{\mathbf{Tr}}_{P_i^{(d)},\mathbf{m}}$ є константою, яка збігається із слідом за різницевою змінною. (Нагадаємо, що тут $\mathbf{m}$ — міра Лебега на $\mathbb{R}$, а $P_i^{(d)}$ — спектральна міра, визначена в (3).)

1. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p.
2. *Arnold A.* Mathematical properties of quantum evolution equations // Lect. Notes Math. – 2008. – **1946**. – P. 45 – 109.
3. *Gerasimenko V. I.* Groups of operators for evolution equations of quantum many-particle systems // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 341 – 355.
4. *Грушка Я. І.* Простори операторів з обмеженим проекційним слідом // Мат. вісн. Наук. т-ва ім. Шевченка. – 2009. – **6**. – С. 73 – 86.
5. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statistical mechanics. Continuous systems. – Amsterdam: Kluwer, 1995. – 624 p.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1981. – 584 с. – Т. 2.
7. *Duldrey R. M.* On sequentional convergence // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – **122**. – P. 483 – 507.
8. *Мосягин В. В., Широков Б. М.* Линейные пространства со сходимостью и конусом // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Математика. – 2001. – Вып. 8. – С. 14 – 19.
9. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
11. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – **257**, № 4. – С. 799 – 804.
12. *Грушка Я. І.* Трансляційно-інваріантні оператори та операторний аналог сліду за різницевою змінною // Доп. НАН України. – 2010. – № 3. – С. 13 – 18.
13. *Alessandro Michelangeli.* Bose – Einstein condensation: analysis of problems and rigorous results // S.i.s.s.a. preprint 70/2007/mp. – 153 p.

Одержано 02.07.10