УДК 517.5

Е. А. Севостьянов (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ТОЧКАХ ВЕТВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ

For the open discrete mappings $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^3$ of the domain $D\subset\mathbb{R}^3$ satisfying relatively general geometric conditions in $D\setminus\{b\}$ and having the essential singularity $b\in\mathbb{R}^3$, we prove the following statement. Let y_0 belong to $\overline{\mathbb{R}^3}\setminus f\,(D\setminus\{b\})$ and let the inner dilatation $K_I(x,f)$ and the outer dilatation $K_O(x,f)$ of the mapping f at a point x satisfy certain conditions. Denote by B_f the set of branch points of f. Then for an arbitrary neighborhood V of the point y_0, a set $V\cap f(B_f)$ cannot be contained in the set A such that $g(A)=I$, where $I=\{t\in\mathbb{R}\colon |t|<1\}$ and $g\colon U\to\mathbb{R}^n$ is a quasiconformal mapping of the domain $U\subset\mathbb{R}^n$ such that $A\subset U$.

Для відкритих дискретних відображень $f\colon D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^3$ області $D\subset\mathbb{R}^3$, які задовольняють відносно загальні геометричні умови в $D\setminus\{b\}$ та мають істотну особливу точку $b\in\mathbb{R}^3$, доведено наступне твердження. Нехай y_0 належить $\overline{\mathbb{R}^3}\setminus f\,(D\setminus\{b\})$, внутрішня $K_I(x,f)$ та зовнішня $K_O(x,f)$ дилатації відображення f у точці x задовольняють певні умови. Позначимо символом B_f множину точок розгалуження відображення f. Тоді для довільного околу V точки y_0 множина $V\cap f(B_f)$ не може міститись у множині A такій, що $g(A)=I$, де $I=\{t\in\mathbb{R}\colon |t|<1\}$ і $g\colon U\to\mathbb{R}^n$ — квазіконформне відображення області $U\subset\mathbb{R}^n$ такої, що $A\subset U$.

1. Предварительные сведения. Основные определения и обозначения, используемые в данной работе, см., например, в [1], а также в [2, 3]. Всюду далее запись $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно и сохраняет ориентацию, $d(A)$ обозначает евклидов диаметр множества $A\subset\mathbb{R}^n$, Ω_n — объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $i(x,f)$ — локальный топологический индекс открытого дискретного отображения f в точке x, для множества $E\subset D$ и точки $y\in\mathbb{R}^n$ полагаем $N(y,f,E):=\operatorname{card}\{x\in E\colon f(x)=y\}$, $N(f,E)=\sup_{y\in\mathbb{R}^n}N(y,f,E)$. Область $G\subset D$ такая, что $\overline{G}\subset D$, называется *нормальной областью отображения* f, если $\partial f(G)=f(\partial G)$. Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное отображение, C — множество в D, $\overline{C}\subset D$. Для $y\in\overline{\mathbb{R}^n}$ определим $M\,(y,f,C):=\sum_{x\,\in\,f^{-1}(y)\cap C}i(x,f)$, $M^*(f,C)=\sup_{y\,\in\,\overline{\mathbb{R}^n}}M\,(y,f,C)$, см., например, раздел 3.6 в [5]. Напомним, что $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия: 1) f принадлежит $W^{1,n}_{\rm loc}$, 2) якобиан $J(x,f)$ отображения f в точке $x\in D$ сохраняет знак почти всюду в D, 3) $\|f'(x)\|^n\le K|J(x,f)|$ при почти всех $x\in D$ и некоторой постоянной $K<\infty$, где $\|f'(x)\|:=\sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n\colon |h|=1}|f'(x)h|$ (см., например, § 3 гл. I в [4]).

Если в определении, приведенном выше, отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом, отображение f будем называть *квазиконформным* (см. там же). *Окрестностью* множества $A\subset\mathbb{R}^n$ называется произвольное множество B такое, что $A\subset\operatorname{Int}B$, где $\operatorname{Int}B$ обозначает совокупность всех внутренних точек множества B. Множество $A\subset\overline{\mathbb{R}^n}$ называется квазиконформным *p-шаром,* если существуют окрестность U множества A и квазиконформное отображение g множества U такое, что $g(A)=B^p$, где $B^p=\{y=(y_1,\ldots,y_p)\in\mathbb{R}^p\colon |y|<1\}$. Если $p=1$, множество A называется *квазиконформной дугой* (см. раздел 3.21 в [5]).

Иначе говоря, квазиконформная дуга есть множество, которое является квазиконформно эквивалентным открытому интервалу на вещественной прямой.

Пусть $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ — произвольное отображение. Следующее понятие см., например, в разделе 4.2 в [6]. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f\colon D\to\mathbb{R}^n$, если при $x\to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. Отметим, что если точка x_0 принадлежит D и мы рассматриваем отображение вида $f\colon D\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}^n$, точка x_0 будет изолированной точкой границы области $D\setminus\{x_0\}$ по определению. В таком случае для рассматриваемой здесь и ниже точки x_0 словосочетание „изолированная существенно особая точка" подменяется более простым „существенно особая точка" всюду, где недоразумение невозможно.

В фундаментальной работе [5] доказано следующее утверждение (см. теорему 3.22).

Утверждение 1. *Пусть b принадлежит D, D — область в $\mathbb{R}^3$, b — существенная особая точка отображения с ограниченным искажением $f\colon D\setminus\{b\}\to\to\mathbb{R}^3$. Тогда для произвольной точки $y_0\in\overline{\mathbb{R}^3}\setminus f\,(D\setminus\{b\})$ и произвольной окрестности V точки y_0 множество $W:=V\cap f(B_f)$ не может содержаться в квазиконформной дуге.*

В современной теории функций все большее внимание уделяется отображениям, обладающим свойствами конечного искажения длин, площадей, объемов и т. п. В настоящей работе речь идет о распространении упомянутого выше результата на более общие классы отображений — *отображений с конечным искажением длины* (см., например, раздел 4 в [2]). Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением конечного метрического искажения,* если f обладает (N)-свойством Лузина и почти всюду искажает евклидово расстояние между точками конечное число раз. Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ (либо интервала вида (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Под *семейством кривых* Γ подразумевается некоторый набор кривых $\gamma\in\Gamma$, а $f(\Gamma)=\{f\circ\gamma|\gamma\in\Gamma\}$. Отображение $f\colon D\to\mathbb{R}^n$ называется отображением с конечным искажением длины, если f — отображение конечного метрического искажения, образы почти всех кривых γ в D локально спрямляемы, $f|_\gamma$ обладает (N)-свойством относительно меры длины, а также (N)-свойство имеет место в обратную сторону для поднятий кривых. Полагаем $l\,(f'(x))=\inf\limits_{h\in\mathbb{R}^n\colon|h|=1}|f'(x)h|$. *Внешняя дилатация* отображения f в точке x есть величина $K_O(x,f)=\dfrac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x,f)\neq0$, $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках. *Внутренняя дилатация* $K_I(x,f)=\dfrac{|J(x,f)|}{l\,(f'(x))^n}$, если $J(x,f)\neq0$, $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$, и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках. Для отображения $f\colon D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ введем в рассмотрение следующую функцию:

$$Q(y,f):=\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)\cap\mathbb{R}^n}K_O(x,f)\,. \tag{1}$$

Если $f^{-1}(y)=\varnothing$, то в (1) полагаем $Q(y,f):=0$. Для функций $K_I(x,f)$ и $Q(y,f)$ положим

$$k_{I,x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} K_I(x,f)\,dS\,,$$
$$q_{y_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|y-y_0|=r} Q(y,f)\,dS\,, \tag{2}$$

где dS — элемент площади поверхности S, ω_{n-1} обозначает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| = 1\}$ в $\mathbb{R}^n$. Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть b принадлежит $D \subset \mathbb{R}^3$ $(n=3)$, $f\colon D\setminus\{b\} \to \mathbb{R}^3$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, b — существенно особая точка f, y_0 принадлежит $\overline{\mathbb{R}^3} \setminus f\left(D\setminus\{b\}\right)$. Предположим, что найдется $r(y_0) > 0$ такое, что для любого $z_0 \in B\left(y_0, r(y_0)\right) \setminus \{y_0\}$ и некоторых $\delta(b) > 0$ и $\Delta(z_0) > 0$ функции $k_{I,\,b}(r)$ и $q_{y_0}(r)$, определенные в* (2), *удовлетворяют условиям*

$$\int\limits_0^{\delta(b)} \frac{dt}{t k_{I,\,b}^{1/2}(t)} = \infty\,, \qquad \int\limits_0^{\Delta(z_0)} \frac{dt}{t q_{z_0}^{1/2}(t)} = \infty\,.$$

Тогда для произвольной окрестности V точки y_0 множество $W := f(B_f) \cap V$ не может содержаться в какой-либо квазиконформной дуге.

2. Основная лемма. Пусть (r,φ,z) — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^n$, $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}^1 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $(x_3,\ldots,x_n) = z$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим отображение $g_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, называемое *закручиванием,* по правилу (см. раздел 3 в [5])

$$g_k(r,\varphi,z) = (r,k\varphi,z). \tag{3}$$

При $k > 0$ отображение g_k является отображением с ограниченным искажением, причем $K_I(g_k) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} K_I(x,g_k) = k$ и $K_O(g_k) = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} K_O(x,g_k) = k^{n-1}$ (см. там же). Непрерывное отображение $s\colon A \to \mathbb{R}^n$ называется *сечением* отображения $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ на множестве $A \subset f(D)$, если $(f\circ s)(x) = x$ для всех $x \in A$. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int_\gamma \rho(x)|dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \mathrm{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина $M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\,\mathrm{adm}\,\Gamma} \int_D \rho^n(x)dm(x)$ (см., например, раздел 6 в [7]).

Лемма 1. *Пусть $f\colon D\setminus\{b\} \to \mathbb{R}^3$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, b — существенно особая точка f, точка y_0 принадлежит $\overline{\mathbb{R}^3} \setminus f\left(D\setminus\{b\}\right)$. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(b,\partial D)$, борелевской функции $\psi_0(t)\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, удовлетворяющей условию вида*

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_0(t)dt < \infty \quad \forall\,\varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \tag{4}$$

и $\varepsilon \to 0$ выполнено соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} K_I(x,f)\cdot\psi_0^n(|x-b|)dm(x) \;=\; o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)\,. \tag{5}$$

Предположим также, что найдется $r(y_0) > 0$ *такое, что для любого* $z_0 \in \in B\big(y_0, r(y_0)\big) \setminus y_0$ *и некоторых* ε_1, *борелевской функции* $\psi_1(t)\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, *удовлетворяющей условию вида* (4) *при* $\psi_1(t)$ *и* ε_1 (*вместо* $\psi_0(t)$ *и* ε_0), *и* $\varepsilon \to 0$ *выполнено соотношение вида*

$$\int\limits_{\varepsilon<|y-z_0|<\varepsilon_1} Q(y,f)\cdot\psi_1^3(|y-z_0|)\, dm(y) \;=\; o\left(I_1^3(\varepsilon,\varepsilon_1)\right)\,, \tag{6}$$

где $I_1(\varepsilon,\varepsilon_0) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\psi_1(t)dt$, *а функция* $Q(y,f)$ *определена в соотношении* (1).

Тогда для произвольной окрестности V *точки* y_0 *множество* $W := V \cap \cap f(B_f)$ *не может содержаться в квазиконформной дуге, т. е.,* $W = V \cap f(B_f)$ *не может содержаться в некотором множестве, являющемся квазиконформно эквивалентным открытому интервалу на прямой.*

Доказательство для удобства разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. *Предварительные замечания. Замечание о том, что доказательство будет проведено по методу от противного.* При доказательстве используем подход из [5] (см. теорему 3.22, а также [8]). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0 = y_0$. Предположим противное, а именно, что множество $W = V \cap f(B_f)$ содержится в квазиконформной дуге для некоторой окрестности V точки 0. Можно считать, что $V \subset B\,(y_0, r(y_0)) = B(0, r(0))$ и $W = V \cap f(B_f) \subset \subset Z = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = x_2 = 0\}$. Зафиксируем $r_0 > 0,\ r_0 < \varepsilon_0$, такое, что $\overline{B(r_0)} \subset D$ и $U_0 = B(r_0) \setminus \{0\},\ g := f|_{U_0}$. Применяя к отображению f лемму 4 из [1] и учитывая, что $0 \notin f\left(D \setminus \{0\}\right)$, заключаем, что найдется $r' \neq 0$ такое, что $r'e_3 \in g(B_g)$, где $e_3 = (0,0,1),\ \overline{B(|r'|)} \subset V$ и, кроме того,

$$\overline{B\left(|r'|\right)} \cap f\left(S(r_0)\right) = \varnothing\,. \tag{7}$$

Можно считать, что $r' > 0$.

Шаг 2. *Переход от исходного отображения* f *к композиции некоторых гомеоморфизма* h *и „закручивания” * g_k. Выберем $x_0 \in g^{-1}\left(r'e_3\right) \cap B_g$. По определению $x_0 \in U_0$. По лемме 3.20 в [5] для некоторых окрестности точки x_0 и гомеоморфизма h выполнено $f = g_k \circ h$, где $k = i(x_0, f)$, см. соотношение (3). Пусть $\beta\colon (0, r'] \to \mathbb{R}^3$ есть кривая $\beta(t) = te_3$. По лемме 3.12 в [5] существует максимальное поднятие $\alpha\colon (\delta, r'] \to D$ с концом в точке x_0. В силу все той же леммы 3.12 из [5] с учетом (7) имеем $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \delta$.

Шаг 3. *Безотносительно к операциям, предпринятых на предыдущих двух шагах, введение в рассмотрение сферических покрытий по В. А. Зоричу, т. е. специальных множеств, лежащих на поверхности некоторой сферы.* При фиксированных $0 < r < r' - \delta$ и $0 < \varphi \le \pi$ рассмотрим множества

$$G(r,\varphi) = \{y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \colon |y - \delta e_3| = r, \quad y_3 > \delta + r\cos\varphi\}\,. \tag{8}$$

Множества $G(r,\varphi)$ в (8) представляют собой некоторую часть на сфере $S(\delta e_3, r)$, симметричную относительно отрезка $\{r \in \mathbb{R}^3 \colon r = r(s) = (0,0,s+\delta),\ s \in (0,r)\}$.

Шаг 4. *Использование представления* f *через композицию двух отображений, обозначенных на шаге* 2, *и введение в рассмотрение некоторого множества* E, *связанного со сферическими покрытиями, определенными на предыдущем шаге.*

Введение в рассмотрение величины φ_r. Пусть $G^*(r,\varphi)$ есть $\alpha(\delta+r)$-компонента связности множества $g^{-1}\left(G(r,\varphi)\right)$. Заметим, что в силу представления $f=g_k\circ h$, $k=i(x_0,f)$, множество $G(r,\varphi)$ является h-эквивалентным к $G^*(r,\varphi)$ при малых φ и $f\left(G^*(r,\varphi)\right)=(g_k\circ h)\left(G^*(r,\varphi)\right)=G(r,\varphi)$. Пусть φ_r — точная верхняя грань указанных выше чисел $\varphi\in(0,\pi]$. Обозначим $E=\{r\in(0,r'-\delta):0\in\overline{G^*(r,\varphi_r)}\}$.

Шаг 5. *Доказательство того, что линейная мера Лебега* $\mathrm{mes}_1\,(E)=0$. Предположим, что 0 принадлежит $\overline{G^*(r,\varphi_r)}$ при некотором r, тогда найдется последовательность $x_k\in G^*(r,\varphi_r),\ x_k\to 0$ при $k\to\infty$. Обозначим $g_r=g|_{G^*(r,\varphi_r)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $h(x_k)\to y_r\in\overline{G(r,\varphi_r)}$ при $k\to\infty$. Заметим, что отображение h_r^{-1} является сечением отображения h на множестве $G(r,\varphi)$ и по предложению 4 множество $C\left(h_r^{-1},y_r\right)$ есть континуум, содержащий точку $x_0=0$ и, возможно, точки границы U_0. Однако, согласно соотношению (7), $C\left(h_r^{-1},y_r\right)=\{0\}$, т. е. $h_r^{-1}(y)\to 0$ при $y\to y_r$. Пусть $\Gamma(r)$ — семейство открытых кривых $\gamma_r(s)\colon(0,1)\to\mathbb{R}^3$, соединяющих $\beta(r+\delta)$ и y_r в $G(r,\varphi)$, т. е. $\gamma_r(0)=y_r,\ \gamma_r(1)=\beta(r+\delta)$ и $\gamma_r(s)\in G(r,\varphi)$ при $s\in(0,1)$. Положим $\Gamma^*(r)=h_r^{-1}\left(\Gamma(r)\right)$. Тогда согласно изложенному выше каждая кривая $\gamma_r^*(s)\colon(0,1)\to U_0$ семейства $\Gamma^*(r)$ такова, что $\gamma_r^*(s)\to 0$ при $s\to 0$. Обозначим

$$\Gamma^*=\bigcup_{r\colon 0\in\overline{G^*(r)}}\Gamma^*(r)\,.$$

По лемме 3.20 в [5] и в силу конструкции отображения g_k, заданного в (3), для каждого $t\in(\delta,r']$ в некоторой окрестности каждой точки $\alpha(t)$ имеем $f=g_k\circ h$, $k=i(x_0,f)$. По теореме 6.10 в [2]

$$M(f(\Gamma))\le\int\limits_D K_I(x,f)\cdot\rho^3(x)\,dm(x) \tag{9}$$

для произвольного семейства кривых Γ в $D\setminus\{b\}$ и $\rho\in\mathrm{adm}\,\Gamma$. Тогда по лемме 1 в [1] (см. также лемму 5.1 в [3]) получаем $M\left(f(\Gamma^*)\right)=0$. Однако $M\left(f(\Gamma^*)\right)=M\left((g_k\circ h)\left(\Gamma^*\right)\right)\ge(1/k^2)M\left(h\left(\Gamma^*\right)\right)$ в силу того, что $K_O(g_k)=k^2$ (см. раздел 3.19 в [5] и комментарий после (3)). Отсюда получаем $M\left(h(\Gamma^*)\right)=0$. С другой стороны, согласно п. 10.2 в [7],

$$0=M\left(h\left(\Gamma^*\right)\right)\ge b\int\limits_E\frac{dr}{r}\,, \tag{10}$$

где b — некоторая постоянная. Из (10) следует, что $\mathrm{mes}_1\,(E)=0$, что и требовалось доказать.

Шаг 6. *На основании результата шага* 5 *вывод о том, что* $\varphi_r=\pi$ *при почти всех* r. Пусть r принадлежит $(0,r'-\delta)\setminus E$, тогда по лемме 2.2 в [5] отображение h отображает $\overline{G^*(r,\varphi_r)}$ гомеоморфно на $\overline{G(r,\varphi_r)}$. Кроме того, по замечанию 1 из [8, с. 422] (см. также следствие 3.8 в [5]) отображение h инъективно в некоторой окрестности $\overline{G^*(r,\varphi_r)}$. По определению угла φ_r это возможно только в случае $\varphi_r=\pi$. Следовательно, при каждом $r\in(0,r'-\delta)\setminus E$ множество $\overline{G^*(r,\varphi_r)}=\overline{G^*(r,\pi)}$ есть поверхность в U_0, топологически эквивалентная сфере $S(\delta e_3,r)$, и f топологически эквивалентно отображению g_k на $S(\delta e_3,r)$.

Шаг 7. *Исходя из результата шага* 6 *построение последовательности, состоящей из „удобных нам" r_i, сходящейся к нулю. Введение в рассмотрение множеств D_i на основании такой последовательности.* Исходя из изложенного выше, выберем последовательность $r_1 > r_2 > \ldots$ такую, что $r_1 < \delta$ при $\delta > 0$, $r_1 < \varepsilon_1$, $r_i \in (0, r' - \delta) \setminus E$ и $r_i \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть D_i — ограниченная компонента связности множества $\overline{\mathbb{R}^3} \setminus \overline{G^*(r_i, \varphi_{r_i})}$, тогда, по определению, $\overline{D_i} \subset B(r_0)$ и каждая кривая, соединяющая элементы 0 и x_0, пересекает ∂D_i хотя бы в одной точке.

Шаг 8. *Переходя далее к подпоследовательности, мы можем свести все дальнейшие рассуждения к одному из двух возможных случаев*:

1) $0 \in D_{i+1} \subset D_i$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$,

2) $x_0 \in D_{i+1} \subset D_i$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$.

Шаг 9. *Рассмотрение случая* $0 \in D_{i+1} \subset D_i$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$. *На основании модульных оценок, реализованных для семейств кривых, соединяющих обкладки границ D_i, получение результата об устранении особенности отображения f в точке $b = 0$, что является противоречием к исходному предположению.* Рассмотрим случай 1.

Шаг 9.1. *Доказательство того, что множество $A_i = D_i \setminus \overline{D_{i+1}}$ является нормальной областью.* Вследствие открытости отображения f имеем $\partial f(A_i) \subset \subset f(\partial A_i)$. Предположим, что A_i не является нормальной областью, тогда в силу изложенного выше $A_i \cap f^{-1}(f(\partial A_i)) \neq \varnothing$. Пусть Q — произвольная компонента связности множества $A_i \cap f^{-1}(f(\partial A_i))$. По лемме 3.7 в [5] существует окрестность U границы ∂A_i такая, что $M^*(f, U) = k$. Отсюда следует, что $U \cap Q = \varnothing$, иначе было бы $M^*(f, U) > k$. Следовательно, Q лежит в некотором компакте внутри A_i и потому является компактом. Согласно п. 7.5 в [9, с. 148] получаем $f(Q) = S_j = S(\delta e_3, r_j)$, где либо $j = i$, либо $j = i + 1$.

Шаг 9.1.1. *Случай* $\delta = 0$. Пусть $\beta_j \colon (0, r_j] \to \mathbb{R}^3$ есть кривая $\beta_j(t) = te_3$. По лемме 3.12 в [5] кривая $\beta_j(t)$ имеет максимальное поднятие $\alpha_j \colon (c_j, r_j] \to D$ с концом в некоторой точке $x_1 \in Q$, причем $\alpha_j(t) \to 0$ при $t \to c_j$. Следовательно, найдется $t_0 \in (c_j, r_j)$ такое, что $\alpha_j(t_0) \in \partial D_{i+1}$. Пусть $j = i + 1$, тогда $\beta_{i+1}(t_0) = t_0 e_3$, однако, в то же время, $\beta_{i+1}(t_0) = r_{i+1} e_3$, откуда следует, что $t_0 = r_{i+1}$, что невозможно, ибо $t_0 < r_{i+1}$. Пусть $j = i$, тогда, рассуждая аналогично, получаем $t_0 = r_{i+1}$. В силу представления $f = g_k \circ h$ точка $\alpha_i(t_0)$ является единственной точкой множества $\partial D_{i+1} \cap f^{-1}(r_{i+1} e_3)$. Тогда кривые $\alpha_i|_{[r_{i+1}, r_i]}$ и $\alpha|_{[r_{i+1}, r_i]}$ одновременно являются поднятиями кривой $\beta|_{[r_{i+1}, r_i]}$ с началом в точке $\alpha(r_{i+1})$ и, кроме того, $i(\alpha(t), f) = k = \mathrm{const}$. Применяя лемму 3.12 из [5], получаем $\alpha_i(t) = \alpha(t)$ на $[r_{i+1}, r_i]$, что невозможно, так как $\alpha_i(r_i) = x_1 \in Q \in A_i$, а $\alpha(r_i) \in \partial A_i$.

Шаг 9.1.2. *Случай* $\delta > 0$. Пусть $\beta_j' \colon (0, \delta - r_j] \to \mathbb{R}^3$ есть кривая $\beta_j'(t) = te_3$. Выберем максимальное поднятие $\alpha_j' \colon \left(c_j', \delta - r_j\right] \to D$ кривой β_j' с концом в некоторой точке множества Q. Заметим, что в этом случае $\alpha_j'(t) \to 0$ при $t \to c_j'$ и, значит, найдется точка $t_0' \in \left(c_j', \delta - r_j\right)$ такая, что $\alpha_j'(t_0') \in \partial D_{i+1}$. Легко видеть, что последнее невозможно как при $i = j$, так и при $i = j + 1$. Значит, $A_i = D_i \setminus \overline{D_{i+1}}$ — нормальная область. Тогда и $B_i = D_1 \setminus \overline{D_i}$ — нормальная область.

Шаг 9.2. *Введение в рассмотрение специального семейства кривых и применение модульных неравенств.* Пусть Γ_i — семейство кривых, соединяющих граничные компоненты множества B_i внутри B_i. Применяя лемму 3.9 из [5], имеем $N\left(f, B_i\right) = N\left(f, \partial B_i\right) = k$. Заметим, что точка δe_3 принадлежит $B(0, r(0))$, так как по выбору r' имеют место включения $\overline{B(r')} \subset V \subset B(0, r(0))$, причем $M(\Gamma_i) \geq \left(b_3 \dfrac{(d(D_i))^3}{m(D_1)}\right)^{1/2}$ (см. лемму 5.9 в [10]). По теореме 6.1 в [2] $M(\Gamma) \leq$ $\leq \displaystyle\int_{f(E)} K_I\left(y, f^{-1}, E\right) \rho_*^3(y) dm(y)$, где $K_I\left(y, f^{-1}, E\right) := \sum_{x \in E \cap f^{-1}(y)} K_O(x, f)$. Тогда

$$\left(b_3 \frac{(d(D_i))^3}{m(D_1)}\right)^{1/2} \leq M(\Gamma_i) \leq k \int\limits_{r_i < |y - z_0| < \varepsilon_1} Q(y, f) \cdot \rho_*^3(y)\, dm(y) \tag{11}$$

для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma_i)$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\rho}_*(y) = \begin{cases} \psi_1\left(|y - \delta e_3|\right) / I_1\left(r_i, r_1\right), & y \in \{r_i < |y - \delta e_3| < r_1\}, \\ 0, & y \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus \{r_i < |y - \delta e_3| < r_1\}, \end{cases}$$

где $I_1(a, b) := \displaystyle\int_a^b \psi_1(t)\, dt$. Заметим, что $\widetilde{\rho}_*$ принадлежит $\operatorname{adm} f(\Gamma_i)$, поскольку, согласно теореме 5.7 из [7], $\displaystyle\int_\gamma \widetilde{\rho}_*(y)\, |dx| \geq \frac{1}{I\left(r_i, r_1\right)} \int_{r_i}^{r_1} \psi_1(t)\, dt = 1$. Тогда из (6) и (11) следует, что $\left(b_3 \dfrac{(d(D_i))^3}{m(D_1)}\right)^{1/2} \leq \mathfrak{F}(r_i) \to 0$ при $i \to \infty$, откуда $f\left(D_1 \setminus \{0\}\right) \subset B\left(\delta e_3, r_1\right)$. С другой стороны, по условию $b = 0$ — существенно особая точка f, поэтому $C(f, 0) = \overline{\mathbb{R}^3}$ (см. лемму 3.1 и теорему 6.4 в [3]). Полученное противоречие завершает рассмотрение случая 1.

Шаг 10. *Рассмотрение случая $x_0 \in D_{i+1} \subset D_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$ аналогично случаю, рассмотренному на предыдущем шаге.* Рассмотрим случай $x_0 \in D_{i+1} \subset$ $\subset D_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Аналогично доказанному выше, $B_i = D_i \setminus \overline{D_1}$ — нормальная область. Для семейства кривых Γ_i, соединяющих граничные компоненты B_i в B_i, имеем

$$\left(b_3 \frac{(d(D_1))^3}{m(U_0)}\right)^{1/2} \leq M(\Gamma_i) \leq k \int\limits_{r_i < |y - z_0| < r_1} Q(y, f) \rho_*^3(y)\, dm(y) := \mathfrak{G}(r_i)$$

для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma_i)$. По доказанному выше $\mathfrak{G}(r_i) \to 0$ при $i \to \infty$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

***Замечание* 1.** По-видимому, впервые неравенство типа (9) было установлено О. Лехто и К. Вертаненом для квазиконформных отображений на плоскости в [11] (см. раздел 6.3 гл. V) и Ю. Струговым в [12] для отображений, квазиконформных в среднем, в пространстве. В работе К. Бишопа, В. Гутлянского, О. Мартио и М. Вуоринена [13] неравенство (9) установлено для квазиконформных отображений в пространстве (см. также работу В. Миклюкова [14], где подобные неравенства также изучались). В частности, каждое отображение с ограниченным искажением удовлетворяет так называемому неравенству Е. Полецкого $M(f(\Gamma)) \leq K' M(\Gamma)$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где $K' < \infty$ — некоторая постоянная (см. теорему 1 в § 4 [15]), что соответствует случаю $K_I(x, f) \leq K'$ почти всюду в (9).

3. Следствия. Настоящий пункт посвящен отысканию конкретных условий, когда выполнены соотношения вида (4) – (6). Мотивацией введения следующего определения является локализация пространства *BMO*-функций *ограниченного среднего колебания* по Джону – Ниренбергу (см., например, [16]). Следуя работе [17], введем следующие определения. Будем говорить, что функция $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, $\varphi \in FMO(x_0)$, если $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\displaystyle\int_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \dfrac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\displaystyle\int_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$.

Лемма 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $H\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, x_0 принадлежит D и выполнено одно из следующих условий*: 1) H *принадлежит* $FMO(x_0)$, 2) $h_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ *при* $r \to 0$, 3) *при некотором* $\delta(x_0) > 0$, $\delta(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *и произвольных* $\varepsilon \in (0, \delta(x_0))$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t h_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} < \infty \quad \text{\textit{и}} \quad \int\limits_{0}^{\delta(x_0)} \frac{dt}{t h_{x_0}^{1/(n-1)}(r)} = \infty,$$

где

$$h_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} H(x)\, dS.$$

Тогда найдутся $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и* $\psi(t) > 0$ *такие, что* $0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$, *причем при* $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} H(x)\psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) .$$

Доказательство. Можно считать, что $x_0 = 0$. Утверждение леммы 2 в случае $H \in FMO$ является заключением следствия 2.3 в [17]: условие $H \in FMO(0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$ влечет соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} H(x)\psi^n(|x|)\, dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где $\psi(t) = \dfrac{1}{t\,\log(1/t)}$ и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt = \log\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon_0)}$. Пусть $h_{x_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$ при $r \to 0$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$, $\psi(t) := \dfrac{1}{t\,\log(1/t)}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{H(x)dm(x)}{(|x|\log(1/|x|))^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{H(x)dm(x)}{(|x|\log(1/|x|))^n} dS \right) dr \leq C\omega_{n-1} I(\varepsilon, \varepsilon_0),$$

где, как и прежде, $I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$ и $C>0$ — некоторая постоянная.

Таким образом, случай 2 рассмотрен. Осталось рассмотреть случай 3. При каждом фиксированном $\varepsilon_0 < \delta(x_0)$ и произвольном $\varepsilon < \varepsilon_0$ рассмотрим функцию $I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt$, где

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[th_0^{1/(n-1)}(r)], & t \in (\varepsilon,\varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon,\varepsilon_0), \end{cases}$$

$h_0(r) = h_{x_0}(r)$, $x_0 := 0$. Поскольку $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, можно считать, что $I(\varepsilon,\varepsilon_0) > 0$ $\forall(\varepsilon,\varepsilon_0)$. Кроме того, несложный подсчет показывает, что $\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} H(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x) = \omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)$, причем $I(\varepsilon,\varepsilon_0) = o\,(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0))$.

Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Для функций $k_{I,\,b}(r)$ и $q_{y_0}(r)$, определенных в (2), $\int\limits_{\varepsilon}^{\delta_1} \dfrac{dt}{tk_{I,\,b}(t)} < \infty$ и $\int\limits_{\Delta}^{\delta_2} \dfrac{dt}{tq_{z_0}(t)} < \infty$ при каждых фиксированных $\delta_1,\ \delta_2 \in (0,1)$ и $\varepsilon \in (0,\delta_1)$, $\Delta \in (0,\delta_2)$. Действительно, $K_I(x,f)$ и $Q(y,f)$, как известно, не меньше единицы (см. раздел 2.1, § 2 гл. I в [4]), поэтому $k_{I,\,b}(r) \ge 1$ и $q_{y_0}(r) \ge 1$ при почти всех $r>0$. Отсюда следует конечность указанных выше интегралов.

Теорема 1. *Пусть $f\colon D\setminus\{b\} \to \mathbb{R}^3$ — открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, b — существенно особая точка f, y_0 принадлежит $\overline{\mathbb{R}^3} \setminus f\,(D\setminus\{b\})$. Предположим, что относительно $K_I(x,f)$ выполнено одно из следующих условий*:

1) $K_I(x,f) \in FMO(b)$,

2) $k_{I,\,b}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^2\right)$ *при* $r \to 0$,

3) *при некотором* $\delta(b) > 0$, $\delta(b) < \operatorname{dist}(b,\partial D)$, $\displaystyle\int\limits_0^{\delta(b)} \frac{dt}{tk_{I,\,b}^{1/2}(t)} = \infty$, *где*

$k_{I,\,b}(t)$ *определено в* (2). *Предположим, существует $r(y_0) > 0$ такое, что для всех $z_0 \in B\,(y_0, r(y_0)) \setminus \{y_0\}$, для $Q(y,f)$, определенной в* (1), *выполнено одно из условий*:

1*) $Q(y,f) \in FMO(z_0)$,

2*) $q_{z_0}(r) = O\left(\left[\log\dfrac{1}{r}\right]^2\right)$ *при* $r \to 0$,

3*) *при некотором* $\Delta(z_0) > 0$, $\Delta(z_0) < \operatorname{dist}(z_0,\partial D)$, $\displaystyle\int\limits_0^{\Delta(z_0)} \frac{dt}{tq_{z_0}^{1/2}(t)} = \infty$,

где $q_{z_0}(t)$ определено в (2).

Тогда для произвольной окрестности V точки y_0 множество $W := V \cap f(B_f)$ не содержится ни в каком множестве, являющемся квазиконформно эквивалентным открытому интервалу на прямой.

Доказательство легко следует из лемм 1, 2 и замечания 2.

4. Некоторые примеры и замечания. Следующий пример показывает, что условия на $K_I(x,f)$, сформулированные в предыдущих пунктах, нельзя заменить более простым условием $K_I(x,f)\in L^p$ ни для какого сколь угодно большого $p>1$.

Теорема 2. *Для каждого $p>1$ найдется гомеоморфизм с конечным искажением длины $f\colon \mathbb{B}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ такой, что $K_I(x,f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{B}^3)$, точка $x_0=0$ является существенно особой для f и при этом заключение леммы* 1 (*теоремы* 1) *нарушено.*

Доказательство. Зададим гомеоморфизм $f\colon \mathbb{B}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$f(x)=\frac{1+|x|^{\alpha}}{|x|}x\,,$$

где $\alpha\in(0,3/2p)$; можно считать, что $\alpha<1$. Заметим, что $C(f,0)=\{|y|=1\}$, т. е. $x_0=0$ — существенно особая точка f, причем $K_I(x,f)=\left(\frac{1+|x|^{\alpha}}{\alpha|x|^{\alpha}}\right)^2\le\frac{C}{|x|^{2\alpha}}$ (см. там же). Следовательно, $K_I(x,f)$ принадлежит $L^p(\mathbb{B}^3)$, поскольку $\alpha p<3$. Кроме того, заметим, что f — локально квазиконформное отображение, поэтому f^{-1} принадлежит $W^{1,3}_{\rm loc}$. Следовательно, f является отображением с конечным искажением длины в $\mathbb{B}^3\setminus\{0\}$ в силу теоремы 4.6 из [2]. Однако B_f пусто и, следовательно, $V\cap f(B_f)=\varnothing$ для произвольной точки $y_0\in\mathbb{R}^n$ и любой окрестности V, содержащей y_0.

Теорема 2 доказана.

Следующая теорема показывает, что условие открытости отображения f в результатах предыдущих пунктов является существенным.

Теорема 3. *Существует дискретное отображение с конечным искажением длины $g\colon\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$, для которого $K_I(x,f)\equiv 1,\ x_0=0$ является существенно особой точкой и которое не удовлетворяет заключению леммы* 1 (*теоремы* 1).

Доказательство. Рассмотрим покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ кубами с единичными ребрами

$$C_{k_1,k_2,k_3}=\prod_{i=1}^{3}\left[k_i,k_i+1\right]\,,\quad k_i\in\mathbb{Z}\,.$$

Значение отображения $\sigma_{l,m}(y)$ в точке $y\in\mathbb{R}^n$ определим как отражение точки y относительно гиперплоскости $x_l=m\in\mathbb{Z}$ при $m>0$ и, соответственно, относительно гиперплоскости $x_l=m-1\in\mathbb{Z}$ при $m<0$. Пусть при $m=0$ $\sigma_{l,m}(y)=\sigma_{l,0}(y):=y$. Полагаем

$$\sigma_l\colon=\sigma_{l,\operatorname{sign}k_l}\circ\ldots\sigma_{l,|k_l|\operatorname{sign}k_l}\,,$$

где $\operatorname{sign}k_l$ — знак числа k_l и

$$G_0:=\sigma_1\circ\sigma_2\circ\sigma_3\,.$$

Заметим, что $G_0(x)\in C_{0,0,0}$ для любой точки $x\in C_{k_1,k_2,k_3}$. Сжатие $G_1(x)= =\frac{\sqrt{3}}{3}x$ переводит $C_{0,0,0}$ в некоторый куб A_0, полностью лежащий в $\overline{\mathbb{B}^3}$. Положим $G_2:=G_1\circ G_0$. Заметим, что точка $z_0=\infty$ является изолированной существенно особой точкой отображения G_2, причем $C(G_2,\infty)=A_0\subset\overline{\mathbb{B}^3}$. Тогда отображение $g:=G_2\circ G_3$, где $G_3(x)=\frac{x}{|x|^2}$, имеет изолированную существенно особую точку

$x_0 = 0$, причем $C(g, 0) \subset \overline{\mathbb{B}^3}$. По построению отображения g видно, что g сохраняет длину кривых в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, является отображением с конечным метрическим искажением, дискретно, $K_I(g, x) = 1$ и $Q(y, f) \equiv \chi_{\underline{g(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})}}$, где χ_{A_0} — характеристическая функция $A_0 \subset \mathbb{R}^3$. Однако $g(B_g) \subset \overline{\mathbb{B}^3}$, поэтому для произвольной окрестности V точки $y_0 \notin \overline{\mathbb{B}^3}$ имеем $V \cap g(B_g) = \varnothing$.

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 3.** Заключения леммы 1 (теоремы 1) справедливы для произвольных открытых дискретных отображений, удовлетворяющих для любых измеримого множества $E \subset D$, семейства кривых Γ в E, $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ и некоторых измеримых по Лебегу функций $Q_1 \colon D \to [1, \infty]$, $Q_2 \colon f(D) \to [1, \infty]$ оценкам вида $M(f(\Gamma)) \le \int\limits_D Q_1(x)\rho^3(x)\, dm(x)$, $M(\Gamma) \le \int\limits_{f(E)} Q_2(y)\rho_*^3(y)\, dm(y)$. При этом $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ должны удовлетворять оценкам вида (5), где $K_I(x, f)$ и $Q(y, f)$ заменены на $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ соответственно.

1. *Севостьянов Е. А.* О множествах точек ветвления отображений, более общих, чем квазирегулярные // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 215 – 230.
2. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. D'Anal. Math. – 2004. – **93**. – P. 215 – 236.
3. *Севостьянов Е. А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН. Сер. мат. – 2010. – **74**, № 1. – С. 159 – 174.
4. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982. – 286 с.
5. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1971. – **488**. – P. 1 – 31.
6. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ibid. – 1970. – **465**. – P. 1 – 13.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – New York etc.: Springer, 1971. – **229**.
8. *Зорич В. А.* Теорема М.А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Мат. сб. – 1967. – **116**, № 3. – С. 415 – 433.
9. *Whyburn G. T.* Analytic topology. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1942.
10. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. – 1969. – **448**. – P. 1 – 40.
11. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.
12. *Стругов Ю. Ф.* Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 4. – С. 859 – 861.
13. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
14. *Miklyukov V. M.* Relative distance of lavrent'eff and prime ends of nonparametric surfaces // Ukr. Math. Bull. – 2004. – **1**, № 3. – P. 353 – 376.
15. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконфомных отображений // Мат. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 261 – 272.
16. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Communs Pure and Appl. Math. – 1961. – **14**. – P. 415 – 426.
17. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.

Получено 29.03.10,
после доработки — 18.09.10