УДК 519.21

С. В. Боднарчук (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
А. М. Кулик (Ін-т математики НАН Украины, Киев)

УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ШУМОМ ЛЕВИ

A sufficient condition is obtained for smoothness of the density of distribution for a multidimensional Levy-driven Ornstein – Uhlenbeck process, i.e., a solution to a linear stochastic differential equation with Levy noise.

Отримано достатню умову гладкості щільності розподілу багатовимірного процесу Орнштейна – Уленбека з шумом Леві, тобто розв’язку лінійного стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві.

1. Введение. Настоящая статья является продолжением работы [1]. В этих двух статьях исследуются локальные свойства распределений процессов Орнштейна – Уленбека с шумом Леви, т. е. решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) вида

$$X(t) = X(0) + \int_0^t AX(s)\,ds + U(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где U — процесс Леви (т. е. однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями) со значениями в $\mathbb{R}^m$, A — матрица размера $m \times m$. Такие уравнения представляют собой структурно наиболее простой класс СДУ с шумом Леви. Основная цель данного исследования состоит в том, чтобы выяснить на примере этого важного частного класса процессов какими должны быть необходимые и достаточные условия существования и/или гладкости плотности переходной вероятности для процессов Маркова, задаваемых СДУ с шумом Леви (подробнее см. в [1]).

Одномерные процессы Орнштейна – Уленбека, т. е. решения (1) с $m = 1$, полностью исследованы в [1]. При этом были установлены два обстоятельства, принципиально важные для дальнейших исследований. Во-первых, было показано, что при наличии нетривиального коэффициента переноса A возникает эффект „регуляризации”, состоящий в следующем. При $A = 0$ процесс X фактически совпадает с процессом Леви U. Задача исследования локальных свойств распределений процессов Леви имеет долгую историю и является весьма непростой. Известен ряд достаточных условий, таких как условия Сато или Калленберга (утверждения 1 и 2 соответственно предложения 1 [1]), но общие критерии, устанавливающие существование и/или гладкость плотности в терминах эффективно проверяемых условий на меру Леви процесса, на данный момент не установлены. Напротив, при $A \neq 0$ такие критерии доступны, по крайней мере, в одномерном случае (см.

[1], предложение 2 и теорема 1). Во-вторых, вопросы *существования* плотности и ее *регулярности* существенно различны и требуют отдельного изучения. Для *существования* плотности распределения $p_t(x)$ решения уравнения (1) с $X(0) = 0,$ в случае нетривиального коэффициента переноса A и отсутствия диффузионной компоненты, необходимо и достаточно, чтобы мера Леви Π процесса U была бесконечна. С другой стороны, для того чтобы эта плотность была *ограниченной* при каждом $t > 0,$ необходимо выполнение условия

$$\left(\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} (u^2 \wedge \varepsilon^2) \Pi(du) \to +\infty, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{2}$$

Условие (2) оказывается достаточным даже для существования плотности, лежащей в классе C_b^∞ бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными. Таким образом, для существования плотности необходимо и достаточно, чтобы общая интенсивность скачка была бесконечной, в то время как ее регулярность однозначно определяется более тонким условием (2), описывающим асимптотическое поведение меры Леви в окрестности нуля.

В случае размерности $m \geq 2$ появляются новые трудности, обусловленные возможностью частичного вырождения компонент линейной системы (1). Так, возникает вопрос о том, какого рода условие невырожденности (матричного) коэффициента переноса A обеспечивает эффект „регуляризации” скачкообразного шума. Полный ответ на этот вопрос в контексте задачи о *существовании* плотности дает теорема 3 [1] (см. также [2]). В данной работе мы приводим полный ответ на этот вопрос в контексте задачи о *гладкости* плотности.

2. Предварительные сведения и основной результат. Рассмотрим линейное СДУ

$$X(t) = \int\limits_0^t AX(s)\,ds + BW(t) + DZ(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

где A, B, D — матрицы размеров $m \times m,\ m \times k,\ m \times d$ соответственно, W и Z — независимые винеровский процесс в $\mathbb{R}^k$ и процесс Леви в $\mathbb{R}^d$, причем Z не содержит диффузионной компоненты и для каждого собственного подпространства $L \subset \mathbb{R}^d$

$$\Pi(\mathbb{R}^d \setminus L) = +\infty.$$

Здесь Π — мера Леви процесса Z; приведенное выше условие часто называют условием Ямазато (см. [3]). Говоря формально, (3) является частным случаем (1), но с помощью несложных рассуждений задача исследования локальных свойств распределений решений (1) сводится к аналогичной задаче для уравнения (3) (см. [1], раздел 4).

Даже в сравнительно простом диффузионном случае (т. е. при $D = 0$) вопрос существования плотности распределения решения не тривиален. Его история восходит к известному примеру Колмогорова, в котором одномерный винеровский процесс порождает решение двумерного уравнения с абсолютно непрерывным распределением [4]. Следующее известное *условие управляемости* Калмана дает критерий существования плотности для распределения решения уравнения (3):

$$\mathrm{Rank}\,[B, AB, \ldots, A^{m-1}B] = m,$$

где $[B, AB, \ldots, A^{m-1}B]$ — матрица размера $m \times mk$, составленная из матриц $B, \ldots, A^{m-1}B$ (см., например, [5]). Отметим, что в этом случае решение (3) — гауссовский процесс, так что плотность распределения, если только она существует, лежит в C_b^∞.

Для уравнения, в котором скачкообразный шум содержится нетривиальным образом, аналогом условия Калмана является условие

$$\mathbf{H_1})\quad \mathrm{Rank}\,[B, AB, \ldots, A^{m-1}B, D, AD, \ldots, A^{m-1}D] = m.$$

В [2] доказано, что если мера Леви процесса Z удовлетворяет многомерному аналогу достаточного условия Сато, то условие $\mathbf{H_1}$ достаточно для существования плотности распределения для решения уравнения (3). С другой стороны, согласно теореме 2 [1], если выполнены условие $\mathbf{H_1}$ и многомерный аналог достаточного условия Калленберга, то плотность распределения лежит в C_b^∞. Таким образом, условие $\mathbf{H_1}$ отвечает за эффект „сохранения гладкости, представленной в шуме (W, Z)": при выполнении условий, достаточных либо для существования, либо для гладкости плотности процесса (W, Z), аналогичное свойство оказывается справедливым и для распределения решения (3).

Однако условие $\mathbf{H_1}$ не обеспечивает эффект „регуляризации": решение уравнения (3), даже при выполненных условиях Ямазато и $\mathbf{H_1}$, может иметь сингулярное распределение [1] (пример 1). Такой эффект, по крайней мере в контексте задачи существования плотности, обеспечивает условие

$$\mathbf{H_2})\quad \mathrm{Rank}\,[B, AB, \ldots, A^{m-1}B, AD, AD^2, \ldots, A^m D] = m,$$

а именно, при выполненных условиях Ямазато и $\mathbf{H_2}$ решение уравнения (3) имеет абсолютно непрерывное распределение. Этот результат установлен в [1] (теорема 3), см. также [6], где аналогичный результат получен при условии, отличном по форме от условия $\mathbf{H_2}$, но по существу эквивалентном ему. Отметим, что в приведенных выше ссылках рассмотрен случай $B = 0$, но обобщение упомянутых результатов для произвольных B не составляет существенных сложностей; то же замечание касается и приведенной выше ссылки [2].

Основным результатом данной статьи является следующая теорема, которая показывает, что условие $\mathbf{H_2}$ обеспечивает эффект „регуляризации" и в контексте задачи о гладкости плотности распределения решения уравнения (3).

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения* (3) *удовлетворяют условию* $\mathbf{H_2}$, *а мера Леви процесса* Z *удовлетворяет условию*

$$\left[\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1} \inf_{l:\ \|l\|_{\mathbb{R}^d}=1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[(u,l)^2_{\mathbb{R}^d} \wedge \varepsilon^2\right] \Pi(du) \to +\infty, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{4}$$

Тогда распределение $X(t),\ t > 0$, *имеет плотность класса* C_b^∞.

Теорема будет доказана в следующем пункте. Отметим, что условие (4) является многомерным аналогом условия (2), которое, напомним, является *необходимым и достаточным* для существования плотности класса C_b^∞ одномерного уравнения с невырожденным коэффициентом переноса. Допуская некоторую неточность, можно сказать, что необходимое и достаточное условие (2) в многомерном случае распадается на два: (4) и

$$\left[\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1} \sup_{l:\, \|l\|_{\mathbb{R}^d}=1} \int_{\mathbb{R}^d} \left[(u,l)^2_{\mathbb{R}^d} \wedge \varepsilon^2\right] \Pi(du) \to +\infty, \quad \varepsilon \to 0+. \tag{5}$$

Условие (4) является *достаточным* в силу приведенной теоремы. С другой стороны, условие (5) является *необходимым* для существования ограниченной плотности распределения для решения СДУ, не обязательно линейного, с шумом Леви ([7], теорема 1.4).

3. Доказательство теоремы. Согласно общим свойствам преобразования Фурье, для доказательства существования плотности класса C_b^∞ у распределения m-мерного случайного вектора достаточно, чтобы характеристическая функция ϕ этого вектора удовлетворяла условию

$$\forall\, n \geq 0\colon \|z\|^n_{\mathbb{R}^m} |\phi(z)| \to 0, \quad \|z\|_{\mathbb{R}^m} \to \infty.$$

Характеристическую функцию величины $X(t)$ можно записать в явном виде (см., например, [1], формула (10)):

$$\phi_{X(t)}(z) = \exp\left\{\int_0^t \left(-\frac{1}{2}\|B^* e^{(t-s)A^*} z\|^2_{\mathbb{R}^k} + \int_{\mathbb{R}^d} \left[\exp\{i(e^{(t-s)A}Du, z)_{\mathbb{R}^m}\} - 1 \, - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - i(e^{(t-s)A}Du, z)_{\mathbb{R}^m} \chi_{\{\|u\|_{\mathbb{R}^d} \leq 1\}}\right] \Pi(du)\right) ds\right\}, \quad z \in \mathbb{R}^m,$$

где $*$ обозначает операцию сопряжения.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Существует такая положительная константа γ, зависящая от t и матрицы A, что*

$$\int_0^t \left[\cos\left(a + (e^{sA}v, z)_{\mathbb{R}^m}\right) - 1\right] ds \leq$$

$$\leq -\gamma \left(\sum_{k=1}^m \left[(A^k v, z)^2_{\mathbb{R}^m} \wedge 1\right]\right), \quad v, z \in \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что (6) не выполняется, т. е. для произвольного n существуют такие $v_n, z_n \in \mathbb{R}^m,\ a_n \in \mathbb{R}$, что

$$\int_0^t \left[\cos\left(a_n + (e^{sA}v_n, z_n)_{\mathbb{R}^m}\right) - 1\right] ds \geq -\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^m \left[(A^k v_n, z_n)^2_{\mathbb{R}^m} \wedge 1\right]\right). \tag{7}$$

Обозначим $\rho_n(s) = (e^{sA}v_n, z_n)_{\mathbb{R}^m}$. Тогда из (7) следует, что

$$\int_0^t \left[\cos\left(a_n + \rho_n(s)\right) - 1\right] ds \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Далее нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. *Для функции $\rho_n(s)$ имеет место представление*

$$\rho_n(s) = \sum_{k=1}^{K_0} \sum_{j=0}^{N_k-1} s^j e^{\lambda_k s} a_{jk}^{(n)}, \tag{9}$$

где λ_k — (различные) собственные числа матрицы A, K_0 — их количество, N_k — кратность λ_k.

Утверждение 1 стандартным образом доказывается с помощью представления матрицы A через ее жорданову нормальную форму.

Утверждение 2. *Для любого $n \geq 1$ найдутся такие точки $t_1, \ldots, t_m \in \in [0, t]$, что коэффициенты $a_{jk}^{(n)}$ в представлении* (9) *выражаются через значения $\rho_n(t_1), \ldots, \rho_n(t_m)$ линейно, причем единственным образом.*

Доказательство. Пусть $\theta_r(s),\ r = 1, \ldots, m,$ функции $s^j e^{\lambda_k s},\ j = 0, \ldots, N_k - -1,\ k = 1, \ldots, K_0$, занумерованы в произвольном порядке, и $\tilde{a}_r^{(n)},\ r = 1, \ldots, m,$ — соответствующим образом перенумерованные коэффициенты $a_{jk}^{(n)},\ j = 0, \ldots, N_k - - 1,\ k = 1, \ldots, K_0$. Соотношение (9) можно записать в виде

$$\rho_n(s) = \sum_{r=1}^{m} \theta_r(s) \tilde{a}_r^{(n)}, \tag{10}$$

и для доказательства утверждения, очевидно, достаточно установить требуемое свойство для коэффициентов $\tilde{a}_r^{(n)}$ в представлении (10).

Покажем, что функции $\theta_1(s), \ldots, \theta_m(s)$ являются линейно независимыми на $\mathbb{R}$. Пусть это не так. Тогда существуют константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m,$ не все равные нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha_1 \theta_1(s) + \ldots + \alpha_m \theta_m(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Функции $\theta_j(s)$ имеют вид $s^{p_j} e^{(q_j + i w_j)s}$, где $p_j,\ q_j,\ w_j$ — действительные числа. Выберем среди тех из них, у которых соответствующие коэффициенты α_j не равни нулю, функции с максимальным значением q_j; пусть Q — соответствующее максимальное значение для q_j. Среди выбранных функций выделим те, у которых степенная функция возрастает наиболее быстро. Пусть максимальный показатель степени равен P. Тогда (11) можно представить в виде

$$\sum_{k_j} \alpha_{k_j} e^{i w_{k_j} s} = -\frac{1}{e^Q s^P} \sum_{k \neq k_j} \theta_k(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Определитель Вронского функций $e^{i w_{k_j} s}$ имеет вид

$$e^{is \sum_{k_j} w_{k_j}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ w_{k_1} & w_{k_2} & \ldots & w_{k_l} \\ \vdots & & & \vdots \\ w_{k_1}^{l-1} & w_{k_2}^{l-1} & \ldots & w_{k_l}^{l-1} \end{pmatrix},$$

и он не равен нулю, поскольку все w_{k_j} различны. Поэтому слагаемые в левой части (12) являются линейно независимыми, причем их сума в силу леммы Кронекера (см. [8, с. 19, 20]) не стремится к нулю при $s \to \infty$. Отсюда следует, что $\alpha_{k_j} = 0$, поскольку правая часть (12) стремится к нулю при $s \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что функции $\theta_1(s), \ldots, \theta_m(s)$ являются линейно независимыми на $\mathbb{R}$.

Занумеруем в произвольном порядке множество $\{s_l, l \geq 1\}$ рациональных точек отрезка $[0, t]$. Рассмотрим векторы

$$\Theta_{jr} = \begin{pmatrix} \theta_j(s_1) \\ \vdots \\ \theta_j(s_r) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad r \geq 1.$$

Покажем, что при некотором $r_0 \geq m$ эти векторы линейно независимы. Предположив обратное, получим, что для произвольного $r \geq m$ существуют константы $\beta_{jr},\ j = 1, \ldots, m,$ не все равные нулю и такие, что

$$\beta_{1r}\Theta_{1r} + \ldots + \beta_{mr}\Theta_{mr} = 0. \tag{13}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{j=1}^{m} |\beta_{jr}|^2 = 1$. Тогда, поскольку сфера — это компакт, переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\beta_{jr} \to \beta_j, \quad 1 \leq j \leq m,$$

причем $\sum_{j=1}^{m} |\beta_j|^2 = 1$. Кроме того, рассматривая l-ю координату в соотношении (13) и переходя к пределу при $r \to \infty$, получаем

$$\beta_1\theta_1(s_l) + \ldots + \beta_m\theta_m(s_l) = 0, \quad l \geq 1. \tag{14}$$

Функция

$$h(s) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\theta_j(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

очевидно, является аналитической на $\mathbb{R}$. С другой стороны, из (14) следует, что она тождественно равна нулю на $[0, t]$, а значит, и на всем $\mathbb{R}$. Это противоречит линейной независимости функций $\theta_1(s), \ldots, \theta_m(s)$, доказанной выше.

Таким образом, существует такое $r_0 \geq m$, что $\mathrm{Rank}[\Theta_{1r_0}, \ldots, \Theta_{mr_0}] = m$, где $[\Theta_{1r_0}, \ldots, \Theta_{mr_0}]$ обозначает матрицу, составленную из вектор-столбцов $\Theta_{1r_0}, \ldots$ $\ldots, \Theta_{mr_0}$. Отсюда следует, что существует m линейно независимых строк матрицы $[\Theta_{1r_0}, \ldots, \Theta_{mr_0}]$. Каждая строка этой матрицы имеет вид

$$(\theta_1(s_l), \ldots, \theta_m(s_l)),$$

где l — номер строки. Таким образом, мы доказали существование номеров $l_1, \ldots, l_m$ таких, что матрица

$$Q = \Big(\theta_r(s_{l_p})\Big)_{r,p=1}^{m}$$

невырождена. Записывая (10) для $s = s_{l_p},\ p = 1, \ldots, m,$ и решая получившуюся систему уравнений относительно неизвестных $a_r^{(n)} r = 1, \ldots, m,$ получаем

$$\tilde{a}_r^{(n)} = \sum_{p=1}^{m} \left(Q^{-1}\right)_{rp} \rho_n(s_{l_p}), \quad r = 1, \ldots, m,$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Представим функции $\rho_n(s)$ виде

$$\rho_n(s) = b_n + c_n \psi_n(s),$$

где $b_n = \rho_n(0)$, $c_n = \sup_{0 \le s \le t} |\rho_n'(s)|$. По построению, $\psi_n(0) = 0$ и $\sup_{0 \le s \le t} |\psi_n'(s)| = 1$.

Утверждение 3. *Существует такая подпоследовательность* $\{n_k\}$, *что последовательность функций* $\psi_{n_k}'(s)$ *сходится при* $k \to \infty$ *равномерно по* $s \in [0, t]$.

Доказательство. В силу (10)

$$\psi_n'(s) = \sum_{r=1}^{m} \theta_r'(s) \tilde{b}_r^{(n)}, \quad s \in [0, t], \tag{15}$$

где $\tilde{b}_r^{(n)} = \tilde{a}_r^{(n)} / c_n$. Для представления (15) справедлив следующий аналог утверждения 2. Если все собственные числа $\lambda_k,\ k = 1, \ldots, K_0$, отличны от нуля, то существуют такие точки $t_1, \ldots, t_m \in [0, t]$, что коэффициенты $\tilde{b}_r^{(n)}$ выражаются через значения $\psi_n'(t_1), \ldots, \psi_n'(t_m)$ линейно, причем единственным образом. Если же какое-то из собственных чисел равно нулю, то одна из функций θ_r тождественно равна 1. При этом соответствующий коэффициент $\tilde{b}_r^{(n)}$ не определяется однозначно, но он несуществен, так как θ_r' тождественно равна 0. Остальные же коэффициенты $\tilde{b}_r^{(n)}$ выражаются через значения $\psi_n'(t_1), \ldots, \psi_n'(t_m)$ линейно, причем единственным образом. Доказательство приведенных фактов дословно совпадает с доказательством утверждения 2.

Напомним, что по построению $|\psi_n'(s)| \le 1$. Поэтому существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$, что $\psi_{n_k}'(t_r) \to h_r,\ k \to \infty$. Следовательно, сходятся и соответствующие коэффициенты $\tilde{b}_r^{(n_k)}$ (кроме, возможно, одного несущественного коэффициента при функции, тождественно равной 0). Отсюда следует равномерная сходимость функций $\psi_{n_k}'(s)$ на каждом ограниченном отрезке.

Утверждение 3 доказано.

С целью упрощения обозначений далее считаем, что сами функции $\psi_n'(s)$ сходятся равномерно на каждом отрезке. Обозначим через b_n' такое единственное число из интервала $(-\pi, \pi]$, что $\dfrac{a_n + b_n - b_n'}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ (величины a_n взяты из соотношений (7), (8)). Тогда

$$\cos(a_n + \rho_n(s)) = \cos(a_n + b_n + c_n \psi_n(s)) = \cos(b_n' + c_n \psi_n(s)).$$

Утверждение 4. *Соотношение* (8) *влечет за собой сходимость*

$$b_n' \to 0, \quad c_n \to 0.$$

Доказательство. Предположим, что $c_n \to \infty, n \to \infty$. Из равномерной сходимости функций $\psi_n'(s)$ и равенства $\sup_{0 \le s \le t} |\psi'(s)| = 1$ следует, что существует интервал $[a, b]$, на котором функции $\psi_n'(s)$ и $\psi'(s)$ имеют одинаковый знак при достаточно больших n. Например, пусть $\psi_n'(s) > 0,\ \psi'(s) > 0,\ s \in [a, b]$. Это означает, что функции $\psi_n(s)$ и $\psi(s)$ монотонно возрастают на $[a, b]$. Запишем тривиальную оценку

$$\int_0^t \left[\cos\left(b'_n + c_n\psi_n(s)\right) - 1\right] ds \le \int_a^b \left[\cos\left(b'_n + c_n\psi_n(s)\right) - 1\right] ds$$

и выполним замену переменных $u = \psi_n(s)$. На интервале $[a, b]$ функции $\psi_n(s)$, $\psi(s)$ имеют обратные. Тогда $s = \psi_n^{-1}(u) = r_n(u),\ ds = r'_n(u)du,\ \psi^{-1}(s) = r(u)$. Также для достаточно больших n существует такое $\varepsilon > 0$, что $\psi_n(a) < \psi(a) + \varepsilon, \psi_n(b) > \psi(b) - \varepsilon$. Тогда

$$\int_a^b \left[\cos\left(b'_n + c_n\psi_n(s)\right) - 1\right] ds = \int_{\psi_n(a)}^{\psi_n(b)} \left[\cos(b'_n + c_n u) - 1\right] r'_n(u)du \le$$

$$\le \int_{\psi(a)+\varepsilon}^{\psi(b)-\varepsilon} \left[\cos(b'_n + c_n u) - 1\right] r'_n(u)du \le \cos b'_n \int_{\psi(a)+\varepsilon}^{\psi(b)-\varepsilon} \cos(c_n u) r'_n(u)du -$$

$$- \sin b'_n \int_{\psi(a)+\varepsilon}^{\psi(b)-\varepsilon} \sin(c_n u) r'_n(u)du - (\psi(b) - \psi(a) + 2\varepsilon) r'_n(\psi(a) + \varepsilon).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{\psi(a)+\varepsilon}^{\psi(b)-\varepsilon} \cos(c_n u) r'_n(u)du = \int_{\psi(a)+\varepsilon}^{\psi(b)-\varepsilon} \cos(c_n u)(r'_n(u) - r'(u))du + \int_{\psi(a)+\varepsilon}^{\psi(b)-\varepsilon} \cos(c_n u) r'(u)du. \tag{16}$$

Первый интеграл в правой части равенства (16) стремится к 0 при $n \to \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку $r'_n(u) \to r'(u), n \to \infty$, и $r'_n(u),\ r'(u)$ ограничены на $[\psi(a) + \varepsilon, \psi(b) - \varepsilon]$. Второй интеграл стремится к 0 при $n \to \infty$ в силу леммы Римана, так как $c_n \to \infty$, а $r'(u)$ интегрируема на $[\psi(a) + \varepsilon, \psi(b) - \varepsilon]$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \left[\cos\left(a_n + \rho_n(s)\right) - 1\right]\, ds \le -(\psi(b) - \psi(a) + 2\varepsilon) r'(\psi(a) + \varepsilon) < 0,$$

что противоречит (8).

Предположим теперь, что $c_n \to c > 0$. Поскольку последовательность b'_n ограничена, можно считать, что $b'_n \to b' \in (-\pi, \pi]$. Тогда интеграл в левой части (8) стремится к числу

$$\int_0^t \left[\cos\left(b' + c\psi(s)\right) - 1\right] ds,$$

отличному от нуля, так как предельная функция $\psi(s)$ аналитична и не является константой.

Те же рассуждения делают невозможным существование бесконечного или положительного частичного предела у последовательности $\{c_n\}$. Поэтому $c_n \to 0, n \to \infty$. Из этого и (8) непосредственно следует сходимость $b'_n \to 0$.

Утверждение 4 доказано.

Приведенное утверждение и асимптотическое соотношение $1 - \cos x \sim x^2/2$, $x \to 0$, обеспечивают неравенство

$$\int_0^t [\cos(a_n + \rho_n(s)) - 1]\, ds = \int_0^t [\cos(b_n' + c_n\psi_n(s)) - 1]\, ds \leq$$

$$\leq -\frac{1}{3}\int_0^t (b_n' + c_n\psi_n(s))^2 ds = -\frac{1}{3}\int_0^t (\rho_n(s) - b_n + b_n')^2 ds,$$

которое выполняется при достаточно больших n при условии (8). Используя неравенство

$$\int_0^t (f(s) + d)^2\, ds \geq \int_0^t f^2(s)\, ds - \frac{1}{t}\left(\int_0^t f(s)\, ds\right)^2,$$

отсюда получаем, что предположение (7) влечет за собой выполнение при достаточно больших n неравенства

$$\int_0^t (e^{sA}v, z)^2_{\mathbb{R}^m} ds - \frac{1}{t}\left(\int_0^t (e^{sA}v, z)_{\mathbb{R}^m} ds\right)^2 \leq \frac{3}{n}\sum_{k=1}^m (A^k v_n, z_n)^2 \wedge 1. \qquad (17)$$

Для доказательства леммы нужно показать, что для достаточно больших n неравенство (17) не выполняется. Для этого докажем следующее утверждение.

Утверждение 5. *Для любых $t > 0, v, z \in \mathbb{R}^m$, матрицы A размером $m \times m$ существует такая константа $C_{t,A}$, что выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^m (A^k v, z)^2_{\mathbb{R}^m} \leq C_{t,A}\left[\int_0^t (e^{sA}v, z)^2_{\mathbb{R}^m} ds - \frac{1}{t}\left(\int_0^t (e^{sA}v, z)_{\mathbb{R}^m} ds\right)^2\right].$$

Доказательство. Для любой матрицы $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ и векторов $v, z \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим скалярное произведение

$$(Bv, z)_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i,j=1}^m b_{ij} v_j z_i.$$

Его можно интерпретировать как скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^{m^2}$ следующим образом:

$$(Bv, z)_{\mathbb{R}^m} = (B, w)_{\mathbb{R}^{m^2}},$$

где $B = (b_{11}, \ldots, b_{1m}, b_{21}, \ldots, b_{mm})$, $w = (u_1 z_1, \ldots, u_m z_1, u_1 z_2, \ldots, u_m z_m)$. Тогда $(B, w)^2_{\mathbb{R}^{m^2}}$ — квадратичная форма в $\mathbb{R}^{m^2}$ относительно вектора w. Утверждение 5 будет доказано, если мы покажем, что для любых $t > 0$ и матрицы A размером $m \times m$ (или, что то же самое, вектора в $\mathbb{R}^{m^2}$) существует такая константа $C_{t,A}$, что

$$\sum_{k=1}^m (A^k, w)^2_{\mathbb{R}^{m^2}} \leq C_{t,A}\left[\int_0^t (e^{sA}, w)^2_{\mathbb{R}^{m^2}} ds - \frac{1}{t}\left(\int_0^t (e^{sA}, w)_{\mathbb{R}^{m^2}} ds\right)^2\right], \quad w \in \mathbb{R}^{m^2}.$$

Для доказательства требуемого соотношения воспользуемся следующим свойством квадратических форм.

Утверждение 6. *Пусть Q_1, Q_2 — неотрицательные квадратические формы в $\mathbb{R}^l$, причем для каждого $v \in \mathbb{R}^l$ из равенства $Q_1(v,v) = 0$ следует, что $Q_2(v,v) = 0$. Тогда существует такая константа $M > 0$, что выполняется неравенство*

$$Q_2(v,v) \leq MQ_1(v,v), \quad v \in \mathbb{R}^l.$$

Доказательство. Рассмотрим пучок квадратических форм $Q_1 - \lambda E$, где квадратической форме E соответствует единичная матрица. Существует такая матрица Z, что преобразование $v = Z\xi$ приводит Q_1 и E к диагональному виду (см. [9, с. 281 – 285]). Пусть в новом базисе $\{e_i\}_{i=1}^l$ форма Q_1 имеет вид

$$Q_1(v,v) = \sum_{i=1}^k a_i v_i^2.$$

Здесь $v = \sum_{i=1}^l v_i e_i, \ a_i > 0, \ 1 \leq i \leq k$. Рассмотрим действие формы Q_2 в этом базисе

$$Q_2(v,v) = Q_2\left(\sum_{i=1}^l v_i e_i, \sum_{i=1}^l v_i e_i\right) = \sum_{i,j=1}^l v_i v_j Q_2(e_i, e_j),$$

где $Q_2(v,z)$ — соответствующая квадратической билинейная форма. По неравенству Шварца $Q_2^2(e_i,e_j) \leq Q_2(e_i,e_i)Q_2(e_j,e_j)$. Поэтому $Q_2(e_i,e_j) = 0$, если $i \geq k+1$ или $j \geq k+1$. Также существует такая константа $C > 0$, что $|Q_2(e_i,e_j)| \leq C$ для всех i,j. Поэтому для всех $v \in \mathbb{R}^l$

$$Q_2(v,v) = \sum_{i,j=1}^k v_i v_j Q_2(e_i,e_j) \leq C\left(\sum_{i=1}^k |v_i|\right)^2 \leq$$

$$\leq kC\sum_{i=1}^k |v_i|^2 \leq \frac{kC}{\min\limits_i a_i}\sum_{i=1}^k a_i v_i^2 = MQ_1(v,v),$$

где $M = \dfrac{kC}{\min\limits_i a_i}$.

Утверждение 6 доказано.

***Завершение доказательства утверждения* 5.** Рассмотрим неотрицательные квадратические формы в $\mathbb{R}^{m^2}$

$$Q_1(w,w) = \left[\int_0^t (e^{sA}, w)^2_{\mathbb{R}^{m^2}} ds - \frac{1}{t}\left(\int_0^t (e^{sA}, w)_{\mathbb{R}^{m^2}} ds\right)^2\right],$$

$$Q_2(w,w) = \sum_{i=1}^m (A^i, w)^2_{\mathbb{R}^{m^2}}.$$

Если $w \in \mathbb{R}^{m^2}$ таково, что $Q_1(w,w) = 0$, то $(e^{sA}, w)_{\mathbb{R}^{m^2}}$ является константой. Отсюда получаем $(A,w)_{\mathbb{R}^{m^2}} = \ldots = (A^k, w)_{\mathbb{R}^{m^2}} = 0$, т. е. $Q_2(w,w) = 0$. Поэтому квадратические формы Q_1 и Q_2 удовлетворяют условию утверждения 6, и, следовательно, утверждение 5 доказано.

Завершение доказательства леммы. Как было показано выше, предположение (7) влечет за собой (17) при больших n. С другой стороны, из утверждения 5 видно, что (17) при больших n не выполняется. Таким образом, предположение (7) не имеет места, и поэтому оценка (6) справедлива.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим через S^m единичную сферу в $\mathbb{R}^m$. Из условия $\mathbf{H_2}$ следует, что для произвольного $z \in S^m$ есть две возможности: либо существует такое $k = \overline{0, m-1}$, что $B^*(A^k)^*z \neq 0$, либо существует такое $j = \overline{1, m}$, что $D^*(A^j)^*z \neq 0$. Рассмотрим следующие открытые множества:

$$S_k^B = \{z \in S^m \colon B^*(A^k)^*z \neq 0\}, \quad k = \overline{0, m-1},$$

$$S_j^D = \{z \in S^m \colon D^*(A^j)^*z \neq 0\}, \quad j = \overline{1, m},$$

$$S_{kr}^B = \left\{z \in S^m \colon \|B^*(A^k)^*z\|_{\mathbb{R}^k} > \frac{1}{r}\right\}, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad r > 0,$$

$$S_{jq}^D = \left\{z \in S^m \colon \|D^*(A^j)^*z\|_{\mathbb{R}^d} > \frac{1}{q}\right\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad q > 0.$$

При этом $S^m = \left(\bigcup_{k=0}^{m-1} S_k^B\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j^D\right) = \left(\bigcup_{k=0}^{m-1} \bigcup_{r \in Q} S_{kr}^B\right) \cup$ $\cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{q \in Q} S_{jq}^D\right)$ — открытое покрытие компактного множества. Из открытого покрытия можем выделить конечное подпокрытие:

$$S_{k_1 r_1}^B, \ldots, S_{k_l r_l}^B, S_{j_1 q_1}^D, \ldots, S_{j_s q_s}^D.$$

Рассмотрим следующие множества:

$$X_1 = \overline{S_{k_1 r_1}^B},$$

$$X_2 = \overline{S_{k_2 r_2}^B \backslash X_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_l = \overline{S_{k_l r_l}^B \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{l-1} X_i\right)}.$$

Пусть $S_B^m = \bigcup_{i=1}^{l} X_i$,

$$Y_1 = \overline{S_{j_1 q_1}^D \backslash S_B^m},$$

$$Y_2 = \overline{S_{j_2 q_2}^D \backslash \left(Y_1 \bigcup S_B^m\right)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_s = \overline{S_{j_s q_s}^D \backslash \left(\left(\bigcup_{i=1}^{s-1} Y_i\right) \bigcup S_B^m\right)}.$$

Пусть $S_D^m = \bigcup_{i=1}^s Y_i$ и, кроме того, $z \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим два соотношения: $\dfrac{z}{\|z\|_{\mathbb{R}^m}} \in S_B^m$ и $\dfrac{z}{\|z\|_{\mathbb{R}^m}} \in S_D^m$. В силу приведенных выше рассуждений хотя бы одно из этих соотношений выполняется. Докажем, что если выполнено первое соотношение, то существуют такие $\alpha > 0,\ \beta > 0$, что $\lambda\{0 \le s \le t\colon \|B^* e^{(t-s)A^*} z\|_{\mathbb{R}^k} \ge \alpha \|z\|_{\mathbb{R}^m}\} \ge \beta$. Предположим, что это не так. Тогда существует такая последовательность $l_n \in S_B^m,\ n \ge 1$, что

$$\lambda\left\{0 \le s \le t\colon \|B^* e^{(t-s)A^*} l_n\|_{\mathbb{R}^k} > \frac{1}{n}\right\} < \frac{1}{n}, \quad n \ge 1,$$

т. е. последовательность функций $\{\|B^* e^{(t-s)A^*} l_n\|\}$ сходится по мере Лебега к функции, тождественно равной нулю. Поскольку S_B^m — компактное множество, без ограничения общности можем считать, что $l_n \to l \in S_B^m$. Но при каждом $s \in [0,t]$ отображение $\tau_s\colon l \mapsto B^* e^{(t-s)A^*} l$ является линейным и непрерывным, поэтому функция $s \mapsto \|B^* e^{(t-s)A^*} l\|$ почти наверное (по мере Лебега) равна нулю. Поскольку эта функция, очевидно, непрерывна, отсюда следует равенство

$$B^* e^{(t-s)A^*} l = 0, \quad s \in [0,t]. \tag{18}$$

Возьмем $(m-1)$-ю производную по s от равенства (18) и рассмотрим значения функции $B^* e^{(t-s)A^*} l$ и ее производных при $s = t$. Получим

$$B^* l = B^* A^* l = \dots = B^* (A^*)^{m-1} l = 0.$$

Пришли к противоречию, поскольку для всех $l \in S_B^m$ существуют такие $k = \overline{0, m-1},\ r > 0$, что $\|B^*(A^*)^k l\| > \dfrac{1}{r}$.

Если $\dfrac{z}{\|z\|_{\mathbb{R}^m}} \in S_D^m$, то существует такое $j_0 = \overline{1,m}$, что $\|D^*(A^{j_0})^* z\|_{\mathbb{R}^d} \ge q\|z\|_{\mathbb{R}^m}$. Из оценки (6) имеем

$$\int_0^t \left[\cos\left(e^{sA} Du, z\right)_{\mathbb{R}^m} - 1\right] ds \le -\gamma \left(\sum_{k=1}^m \left[(A^k Du, z)^2_{\mathbb{R}^m} \wedge 1\right]\right) \le$$

$$\le -\gamma \left[(A^{j_0} Du, z)^2_{\mathbb{R}^m} \wedge 1\right] = -\gamma \left[(u, D^*(A^{j_0})^* z)^2_{\mathbb{R}^m} \wedge 1\right] =$$

$$= -\gamma \|z\|^2_{\mathbb{R}^m} \left[\left(u, \frac{D^*(A^{j_0})^* z}{\|D^*(A^{j_0})^* z\|_{\mathbb{R}^d}} \left\|D^*(A^{j_0})^* \frac{z}{\|z\|_{\mathbb{R}^m}}\right\|_{\mathbb{R}^d}\right)^2_{\mathbb{R}^m} \wedge \frac{1}{\|z\|^2_{\mathbb{R}^m}}\right] \le$$

$$\le -\gamma q^2 \|z\|^2_{\mathbb{R}^m} \inf_{l\colon \|l\|_{\mathbb{R}^d} = 1} \left[(u, l)^2_{\mathbb{R}^d} \wedge \frac{1}{q^2 \|z\|^2_{\mathbb{R}^m}}\right].$$

Оценим $\|z\|^n_{\mathbb{R}^m} |\phi_{X(t)}(z)|$ при всех $n \ge 0,\ z \in \mathbb{R}^m$. Модуль характеристической функции процесса $X(t)$ имеет вид

$$|\phi_{X(t)}(z)| =$$

$$= \exp\left\{\int_0^t \left(-\frac{1}{2}\|B^* e^{(t-s)A^*} z\|^2_{\mathbb{R}^k} + \int_{\mathbb{R}^d} \left[\cos(e^{(t-s)A} Du, z)_{\mathbb{R}^m} - 1\right] \Pi(du)\right) ds\right\}.$$

Поэтому

$$\|z\|^n_{\mathbb{R}^m}|\phi_{X(t)}(z)| \le$$

$$\le \|z\|^n_{\mathbb{R}^m}\exp\left\{-q^2\|z\|^2_{\mathbb{R}^m}\min\left\{\frac{\alpha\beta}{2q^2},\gamma\inf_{l\colon\|l\|_{\mathbb{R}^d}=1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}[(u,l)^2_{\mathbb{R}^d}\wedge\frac{1}{q^2\|z\|^2_{\mathbb{R}^m}}]\Pi(du)\right\}\right\}. \tag{19}$$

Положим $\varepsilon=\dfrac{1}{q\|z\|_{\mathbb{R}^m}}$. Тогда правая часть неравенства (19) примет вид

$$\frac{1}{q^n}\exp\left\{\ln\frac{1}{\varepsilon}\left(n-\left[\varepsilon^2\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]^{-1}\min\left\{\frac{\alpha\beta}{2q^2},\gamma\inf_{l\colon\|l\|_{\mathbb{R}^d}=1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}[(u,l)^2_{\mathbb{R}^d}\wedge\varepsilon^2]\Pi(du)\right\}\right)\right\}$$

и при выполнении условия (4) стремится к 0 при $\varepsilon\to 0+$.

Теорема доказана.

1. *Боднарчук С. В., Кулик О. М.* Умови існування та гладкості щільності розподілу для процесу Орнштейна – Уленбека з шумом Леві // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2008. – Вип. 79. – С. 21 – 35.
2. *Priola E., Zabczyk J.* Densities for Ornstein – Uhlenbeck processes with jumps // Bull. London Math. Soc. – 2009. – **41**. – P. 41 – 50.
3. *Yamazato M.* Absolute continuity of transition probabilities of multidimensional processes with independent increments // Probab. Theory and Appl. – 1994. – **38**, № 2. – P. 422 – 429.
4. *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen // Ann. Math. II. – 1934. – **35**. – P. 116 – 117.
5. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. – Camdridge Univ. Press, 1992.
6. *Simon T.* On the absolute continuity of multidimensional Ornstein – Uhlenbeck processes // Probab. Theory Relat. Fields, DOI 10.1007/s00440-010-0296-5; arXiv:0908.3736v1.
7. *Kulik A. M.* Stochastic calculus of variations for general Lévy processes and its applications to jump-type SDE's with non-degenerated drift // arxiv.org:math.PR/0606427v2.
8. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Получено 03.09.10