К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.544; 517.968

З. М. Лысенко, Л. В. Матвиюк (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова),
А. П. Нечаев, В. Т. Швец (Одес. гос. академия холода)

К ТЕОРИИ ФРЕДГОЛЬМА ОДНОЙ ПЛОСКОСТНОЙ ЗАДАЧИ СО СДВИГОМ ДЛЯ ПАРЫ ФУНКЦИЙ

We obtain necessary and sufficient conditions of the Fredholm properties and the formula for the calculation of index of a planar problem with shift and conjugation for a pair of functions.

Одержано необхідні та достатні умови фредгольмовості, а також формулу обчислення індексу однієї площинної задачі із зсувом та спряженістю для пари функцій.

1. Постановка задачи. Пусть $\Pi = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с обычной мерой Лебега $dA(w) = dx\,dy$, $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $\bar{\Pi} = \Pi \cup \mathbb{R}$, $\dot{\bar{\Pi}} = \bar{\Pi} \cup \{\infty\}$; $\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$; $S \oplus T$ — прямая сумма либо пространств, либо операторов S и T; $X \otimes Y$ — декартово произведение пространств X и Y; $\mathbb{C}f = \bar{f}$, $If = f$; запись $A \simeq B$ означает, что операторы A и B отличаются на вполне непрерывный оператор; $A_2(\Pi)$ — бергманово пространство в области Π всех аналитических в $L_2(\Pi)$ функций, $\tilde{A}_2(\Pi) = \{\mathbb{C}f,\ f \in A_2(\Pi)\}$ — антибергманово пространство в области Π всех антианалитических в $L_2(\Pi)$ функций. Известно [1, 2], что гильбертовы пространства $A_2(\Pi)$ и $\tilde{A}_2(\Pi)$ являются замкнутыми подпространствами в $L_2(\Pi)$. Пусть $Z_2(\Pi)$ и $\tilde{Z}_2(\Pi)$ — ортогональные дополнения в $L_2(\Pi)$ к пространствам $A_2(\Pi)$ и $\tilde{A}_2(\Pi)$ соответственно. Тогда существуют ортогональные проекторы $B_\Pi \colon L_2(\Pi) \to A_2(\Pi)$ (бергмановский) и $\tilde{B}_\Pi \colon L_2(\Pi) \to \tilde{A}_2(\Pi)$ (антибергмановский). Проекторы B_Π и $\tilde{B}_\Pi$ являются [1, с. 37] (см. также [2], формулы (2.7), (2.10)) двумерными интегральными операторами следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} (B_\Pi f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_\Pi \frac{f(w)}{(z-\bar{w})^2}\,dA(w), \\ (\tilde{B}_\Pi f)(z) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_\Pi \frac{f(w)}{(\bar{z}-w)^2}\,dA(w), \end{aligned}\right. \qquad f \in L_2(\Pi), \quad z \in \Pi.$$

Легко проверить (см. [1, с. 224, 225]), что

$$\tilde{B}_\Pi = \mathbb{C}B_\Pi\mathbb{C}, \tag{1}$$

$$B_\Pi\tilde{B}_\Pi = \tilde{B}_\Pi B_\Pi = 0. \tag{2}$$

Введем оператор сдвига

$$(W_\alpha f)(z) = f[\alpha(z)],$$

где отображение (сдвиг) $\alpha \colon \Pi \to \Pi$ удовлетворяет условию

$$W_\alpha B_\Pi W_\alpha^{-1} = \tilde{B}_\Pi. \tag{3}$$

Например, в качестве α можно взять [1] (формула (10.9)) отображение $\alpha(z) = -\bar{z}$.

Рассмотрим следующую плоскостную задачу со сдвигом и сопряжением о нахождении пары функций $\psi \in A_2(\Pi)$ и $\varphi \in \tilde{A}_2(\Pi)$, удовлетворяющих условию

$$a(t)\psi[\alpha(t)] + b(t)\overline{\psi[\alpha(t)]} + e(t)\varphi(t) + d(t)\overline{\varphi(t)} = h(t), \quad t \in \Pi, \tag{4}$$

где правая часть h — известная гармоническая функция из $A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi)$, коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $e(t)$ и $d(t)$ — известные функции из $C(\dot{\overline{\Pi}})$.

Напомним [3], что линейный ограниченный оператор U называется фредгольмовым, если его образ замкнут, а дефектные числа $\alpha = \dim \operatorname{Ker} U$ и $\beta = \dim \operatorname{coKer} U$ конечны, при этом целое число $\operatorname{ind} U = \alpha - \beta$ называется индексом оператора U. Под фредгольмовостью и индексом плоскостной задачи $Uf = h$ будем понимать соответственно фредгольмовость и индекс оператора U. В данной работе с помощью операторного подхода найдены необходимые и достаточные условия фредгольмовости, а также формула для нахождения индекса задачи (4). Что касается операторного подхода, то он является аналогом операторного подхода, разработанного С. Ф. Скороходом [4] и Н. И. Лисовец [5] для краевых задач. Суть операторного подхода для краевых задач можно найти также в обзорной статье Г. С. Литвинчука [6].

Отметим, что плоскостные задачи без сдвига в пространстве Бергмана рассматривались А. Д. Джураевым [7, 8], И. И. Комяком [9, 10]. Задачи такого типа играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций [11], теории конформных отображений и римановых поверхностей [12, 13], теории квазиконформных отображений [14]. Что касается алгебр операторов с бергмановскими проекторами, то исследования и обзор по этой тематике можно найти в монографии Н. Л. Василевского [2]. В [15] найден критерий фредгольмовости операторной алгебры, порожденной бергмановскими проекторами и оператором карлемановского сдвига.

Введем оператор

$$T_0 = \big[(a + b\mathbb{C})W, e + d\mathbb{C}\big] \colon A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi) \to A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi),$$

где $W = W_\alpha$. Тогда задача (4) запишется в операторной форме:

$$T_0(\psi(t), \varphi(t)) = h(t). \tag{5}$$

Таким образом, теория Фредгольма задачи (4) — это теория Фредгольма оператора

$$T_0 \in \mathcal{L}\big(A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi)\big).$$

2. Теория Фредгольма оператора Π_W. Введем линейный ограниченный оператор

$$\Pi_W = \begin{bmatrix} B_\Pi W^{-1} \\ \tilde{B}_\Pi \mathbb{C} \end{bmatrix} \colon \quad A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi) \to A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi).$$

Лемма 1. *Оператор* $\Pi_W \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi))$ *фредгольмов.*

Доказательство. Регуляризатором оператора Π_W является оператор

$$\Pi_W^{(-1)} = \big(WB_\Pi, \mathbb{C}\tilde{B}_\Pi\big) \in \mathcal{L}\big(A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi)\big).$$

Действительно, на основании (1) – (3)

$$\Pi^{(-1)}\Pi_W = WB_\Pi W^{-1} + \mathbb{C}\tilde{B}_\Pi\mathbb{C} = \tilde{B}_\Pi + B_\Pi,$$

$$\Pi_W\Pi^{(-1)} = \begin{bmatrix} B_\Pi & B_\Pi W^{-1}\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi \\ \tilde{B}_\Pi\mathbb{C}WB_\Pi & \tilde{B}_\Pi \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{B_\Pi, \tilde{B}_\Pi\}.$$

Остается отметить, что $\tilde{B}_\Pi + B_\Pi$ — единичный оператор в пространстве $A_2(\Pi) \oplus \oplus \tilde{A}_2(\Pi)$, $\operatorname{diag}\{B_\Pi, \tilde{B}_\Pi\}$ — единичный оператор в пространстве $A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi)$.

Лемма 2. *Оператор Π_W фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовы одновременно операторы*

$$B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi \in \mathcal{L}(\tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi))$$

и

$$\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi) \in \mathcal{L}(\tilde{Z}_2(\Pi), \tilde{A}_2(\Pi)).$$

В случае фредгольмовости

$$\operatorname{ind}\Pi_W = \operatorname{ind}B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi + \operatorname{ind}\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I \oplus \tilde{B}_\Pi).$$

Доказательство. Используя (1)–(3), получаем

$$\Pi_W(\tilde{B}_\Pi, B_\Pi) = \begin{bmatrix} B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi & B_\Pi W^{-1}B_\Pi \\ \tilde{B}_\Pi\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi & \tilde{B}_\Pi\mathbb{C}B_\Pi \end{bmatrix} = B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi \oplus \tilde{B}_\Pi\mathbb{C}B_\Pi,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Оператор $B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi \in \mathcal{L}(\tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi))$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор*

$$(I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi) \in \mathcal{L}(\tilde{Z}_2(\Pi), Z_2(\Pi)).$$

В случае фредгольмовости

$$\operatorname{ind}B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi = -\operatorname{ind}(I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi).$$

Доказательство. Оператор $W^{-1}\colon L_2(\Pi) \to L_2(\Pi)$ обратим. Представив $L_2(\Pi) = = A_2(\Pi) \oplus Z_2(\Pi)$ и $L_2(\Pi) = \tilde{A}_2(\Pi) \oplus \tilde{Z}_2(\Pi)$, получим

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} B_\Pi \\ I - B_\Pi \end{bmatrix} W^{-1}(\tilde{B}_\Pi, I - \tilde{B}_\Pi) =$$

$$= \begin{bmatrix} B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi & B_\Pi W^{-1}(I - B_\Pi) \\ (I - B_\Pi)W^{-1}\tilde{B}_\Pi & (I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi) \end{bmatrix} =$$

$$= B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi \oplus (I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi).$$

Отсюда

$$0 = \operatorname{ind}B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi + \operatorname{ind}(I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi). \tag{6}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. $\operatorname{ind}\Pi_W = 0.$

Доказательство. Поскольку

$$(I - B_\Pi)\mathbb{C}B_\Pi \cdot B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi = (I - B_\Pi)\mathbb{C}W^{-1}\tilde{B}_\Pi$$

и

$$(I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi) \cdot (I - \tilde{B}_\Pi)\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi = (I - B_\Pi)W^{-1}\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi,$$

то

$$(I - B_\Pi)\mathbb{C}B_\Pi \cdot B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi = (I - B_\Pi)W^{-1}(I - \tilde{B}_\Pi) \cdot (I - \tilde{B}_\Pi)\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi.$$

Отсюда, а также из лемм 1 – 3 получаем

$$\operatorname{ind} B_\Pi W^{-1}\tilde{B}_\Pi = \frac{1}{2}\big\{-\operatorname{ind}(I - B_\Pi)\mathbb{C}B_\Pi + \operatorname{ind}(I - \tilde{B}_\Pi)\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi\big\}.$$

Но поскольку оператор $(I - B_\Pi)\mathbb{C}B_\Pi \in \mathcal{L}(A_2(\Pi), Z_2(\Pi))$ является регуляризатором оператора $B_\Pi\mathbb{C}(I - B_\Pi) \in \mathcal{L}(Z_2(\Pi), A_2(\Pi))$, а оператор $(I - \tilde{B}_\Pi)\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi \in \mathcal{L}(\tilde{A}_2(\Pi), \tilde{Z}_2(\Pi))$ — регуляризатором оператора $\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi) \in \mathcal{L}(\tilde{Z}_2(\Pi), \tilde{A}_2(\Pi))$ и при этом

$$\operatorname{ind} B_\Pi\mathbb{C}(I - B_\Pi) = -\operatorname{ind}(I - B_\Pi)\mathbb{C}B_\Pi,$$
$$\operatorname{ind} \tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi) = -\operatorname{ind}(I - \tilde{B}_\Pi)\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi,$$

на основании леммы 2 имеем

$$\operatorname{ind}\Pi_W = \frac{1}{2}\Big\{\operatorname{ind} B_\Pi\mathbb{C}(I - B_\Pi) - \operatorname{ind}\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi)\} + \operatorname{ind}\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi) =$$
$$= \frac{1}{2}\{\operatorname{ind} B_\Pi\mathbb{C}(I - B_\Pi) + \operatorname{ind}\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi)\Big\}.$$

Но $B_\Pi\mathbb{C}(I - B\Pi) = B_\Pi \cdot B_\Pi\mathbb{C}(I - B_\Pi) = B_\Pi\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi(I - B_\Pi) = B_\Pi\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi$ и, аналогично, $\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}(I - \tilde{B}_\Pi) = \tilde{B}_\Pi\mathbb{C}B_\Pi$. Следовательно,

$$\operatorname{ind}\Pi_W = \frac{1}{2}\{\operatorname{ind} B_\Pi\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi + \operatorname{ind}\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}B_\Pi\}.$$

А так как оператор $B_\Pi\mathbb{C}\tilde{B}_\Pi \in \mathcal{L}\big(\tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi)\big)$ является регуляризатором оператора $\tilde{B}_\Pi\mathbb{C}B_\Pi \in \mathcal{L}\big(A_2(\Pi), \tilde{A}_2(\Pi)\big)$, то получаем $\operatorname{ind}\Pi_W = 0$.

3. Теория Фредгольма оператора $\boldsymbol{T_0}$. Введем вспомогательные операторы:

$$U = dB_\Pi + a\tilde{B}_\Pi, \qquad V = bB_\Pi + e\tilde{B}_\Pi, \qquad \tilde{T}_0 = U + V\mathbb{C}.$$

С учетом равенств (1) – (3) непосредственно находим

$$T_0\Pi_W = (a + b\mathbb{C})WB_\Pi W^{-1} + (e + d\mathbb{C})\tilde{B}_\Pi\mathbb{C} = U + V\mathbb{C}.$$

Отсюда, а также из леммы 4 вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *Операторы* $T_0 \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi), A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))$ *и* $\tilde{T}_0 \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))$ *могут быть фредгольмовыми лишь одновременно, и в случае фредгольмовости*

$$\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind}\tilde{T}_0.$$

Введем матричный оператор

$$T_1 = \begin{bmatrix} U & V \\ V_1 & U_1 \end{bmatrix},$$

где

$$U_1 = \bar{a}B_\Pi + \bar{d}\tilde{B}_\Pi, \qquad V_1 = \bar{e}B_\Pi + \bar{b}\tilde{B}_\Pi.$$

Теорема 1. *Оператор $\tilde{T}_0 \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $T_1 \in \mathcal{L}\big((A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi)) \otimes (A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))\big)$. В случае фредгольмовости*

$$\operatorname{ind} \tilde{T}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ind} T_1.$$

Доказательство. Исключим инволюцию $\mathbb{C}$ в операторе $\tilde{T}_0$. Для этого заметим, что $\tilde{T}_0 iI = i(U - V\mathbb{C})$. Следовательно, операторы $U + V\mathbb{C}$ и $U - V\mathbb{C}$ фредгольмовы одновременно и имеют равные индексы. Отсюда, а также из матричного равенства [3, с. 398]

$$\begin{pmatrix} I & \mathbb{C} \\ I & -\mathbb{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & V \\ \mathbb{C}V\mathbb{C} & \mathbb{C}U\mathbb{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ \mathbb{C} & -\mathbb{C} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} U + V\mathbb{C} & 0 \\ 0 & U - V\mathbb{C} \end{pmatrix}$$

следует, что фредгольмовость среднего множителя в левой части эквивалентна фредгольмовости $\tilde{T}_0$ и при этом

$$\operatorname{ind} \tilde{T}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ind} \begin{pmatrix} U & V \\ \mathbb{C}V\mathbb{C} & \mathbb{C}U\mathbb{C} \end{pmatrix}.$$

Остается отметить, что из (1), (2) следуют равенства $V_1 = \mathbb{C}V\mathbb{C}$, $U_1 = \mathbb{C}U\mathbb{C}$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1, а также леммы 5 следует такая теорема.

Теорема 2. *Оператор $T_0 \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \otimes \tilde{A}_2(\Pi))$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $T_1 \in \mathcal{L}\big((A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi)) \oplus (A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))\big)$. В случае фредгольмовости*

$$\operatorname{ind} T_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ind} T_1.$$

Согласно [1, с. 225], операторы $aB_\Pi - B_\Pi aI$ и $a\tilde{B}_\Pi - \tilde{B}_\Pi aI$, $a \in C(\dot{\bar{\Pi}})$, вполне непрерывны в $L_2(\Pi)$. Следовательно, операторы из алгебры, порожденной проекторами B_Π, $\tilde{B}_\Pi$ и операторами умножения на функции из $C(\dot{\bar{\Pi}})$, являются операторами локального типа. Тогда из теоремы 2.1 в [10] следует, что операторы T_1 и $\det T_1 = UU_1 - VV_1$ могут быть фредгольмовыми лишь одновременно. Поскольку $\det T_1 \simeq uB_\Pi + \bar{u}\tilde{B}_\Pi$, где $u = \bar{a}d - b\bar{e}$, то из теоремы 2 следует такая теорема.

Теорема 3. *Оператор T_0 фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $\Delta = uB_\Pi + \bar{u}\tilde{B}_\Pi \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))$.*

Теорема 4. *Пусть оператор $U \in \mathcal{L}(A_2(\Pi) \oplus \tilde{A}_2(\Pi))$ фредгольмов. В этом случае оператор T_0 фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор Δ, и если T_0 фредгольмов, то*

$$\operatorname{ind} T_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ind} \Delta.$$

Доказательство непосредственно следует из теорем 2, 3, а также следствия 3.1 в [16].

Отметим, что операторы Δ и U принадлежат алгебре операторов, изученной в работе [1]. В частности, условия фредгольмовости указанных операторов найдены в терминах символа. Это дает возможность для задачи (4) получить явные условия фредгольмовости и формулу вычисления индекса в терминах символа.

Авторы выражают благодарность Н. Л. Василевскому и Ю. И. Карловичу за внимание к работе и ценные советы.

1. *Karlovich Yu. I., Pessoa L.* Algebras generated by Bergman and Antybergman projections and multiplications by piecewise continuous functions // Integr. Equat. Oper. Theory. – 2005. – **52**. – P. 219 – 270.
2. *Vasilevski N. L.* Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2008. – **29**, № 185. – 417 p.
3. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
4. *Скороход С. Ф.* Теория Нетера многоэлементных краевых задач со сдвигом для функций, аналитических в области: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1984. – 132 с.
5. *Лисовец Н. И.* Исследование некоторых смешанных краевых задач теории аналитических функций: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1984. – 149 с.
6. *Литвинчук Г. С.* Об операторном подходе к теории краевых задач со сдвигом для функций, аналитических в области // Научные труды юбилейного семинара, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. – Минск: Изд-во „Университетское”, 1985. – С. 69 – 76.
7. *Джураев А. Д.* К теории систем сингулярных интегральных уравнений на ограниченной области // Докл. АН СССР. – 1979. – **249**, № 1. – С. 22 – 25.
8. *Джураев А. Д.* Теория некоторых систем сингулярных интегральных уравнений по двумерным ограниченным областям // Там же. – 1984. – **279**, № 3. – С. 528 – 532.
9. *Комяк И. И.* Класс двумерных сингулярных интегральных операторов в круговой области // Докл. АН БССР. – 1979. – **23**, № 11. – С. 972 – 975.
10. *Комяк И. И.* Класс двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядром Бергмана // Там же. – № 1. – С. 8 – 11.
11. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 510 с.
12. *Кра И.* Автоморфные формы и клейновы группы. – М.: Мир, 1975.
13. *Шиффер М., Спенсер Д. К.* Функционалы на конечных римановых поверхностях. – М.: Мир, 1975.
14. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969.
15. *Ortega J. R., Vasilevski N. L., de Arellano E. R.* On the algebra generated by the Bergman projection and shift operator I // Integr. Equat. Oper. Theory. – 2003. – **46**. – P. 455 – 471.
16. *Крупник Н. Я.* Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 138 с.

Получено 15.12.09