

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

We consider a discrete network of a large number of pin-type homogeneous rods oriented along a given vector and connected by elastic springs at each point. The asymptotic behavior of small oscillations of the discrete system is studied in the case where the distances between the nearest rods tend to zero. For generic non-periodic arrays of rods, we deduce equations describing the homogenized model of the system. It is shown that the homogenized equations correspond to a nonstandard dynamics of an elastic medium. Namely, the homogenized stress tensor in the medium depends linearly not only on the strain tensor but also on the rotation tensor.

Розглядається дискретна сітка, утворена великою кількістю нескінченно тонких однорідних стрижнів, орієнтованих уздовж заданого вектора та з'єднаних між собою пружинами у кожній своїй точці. Вивчається асимптотична поведінка малих коливань такої дискретної системи, коли відстані між найближчими стрижнями прямують до нуля. Для загальних неперіодичних розташувань стрижнів виведено рівняння, що описують усереднену модель системи. Показано, що усереднені рівняння відповідають несиметричній динаміці пружного середовища. А саме, тензор напруг у середовищі лінійно залежить не лише від тензора деформацій, але і від тензора обергань.

1. Введение. Одним из фундаментальных постулатов механики упругой среды является утверждение о том, что при малых деформациях тензор напряжений в среде $\sigma[\underline{u}] = \{\sigma_{ij}[\underline{u}]\}_{i,j=1}^3$ линейно зависит от тензора деформаций среды $e[\underline{u}] = \left\{ e_{ij}[\underline{u}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}_{i,j=1}^3$. Такая зависимость представляется с помощью тензора упругости $A = \{a_{npqr}(\underline{x}, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$. А именно, имеет место закон Гука

$$\sigma[u] = Ae[u], \quad (1.1)$$

где $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$ — смещение среды, а тензор четвертого ранга A является симметричным относительно перестановок пар индексов и индексов в парах. Этот закон подтверждается экспериментально для широкого класса однородных упругих материалов.

Однако в последнее время появилось много работ, посвященных изучению (как теоретическому, так и экспериментальному) сложных веществ, свойства которых существенно отличаются от свойств, постулируемых в классической теории упругости [1–6]. В частности, тензор напряжений в этих веществах зависит не только от тензора напряжений, но и от тензора вращений

$$\omega[\underline{u}] = \left\{ \omega_{ij}[\underline{u}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}_{i,j=1}^3.$$

А именно, для таких веществ выполняется закон Гука в нестандартной форме

$$\sigma[u] = A^D e[\underline{u}] + A^R \omega[\underline{u}], \quad (1.2)$$

где тензоры четвертого ранга A^D и A^R могут рассматриваться как деформационная и вращательная части тензора упругости соответственно. Более того, эти части не

*Выполнена при частичной поддержке фонда DAAD.

имеют свойств симметрии, постулируемых в классической механике сплошной среды.

Примерами таких веществ являются некоторые виды жидких кристаллов, полимеры, поликристаллические материалы и др. [6]. Однако характерная особенность микроструктуры таких веществ практически нигде не обсуждалась, поэтому причины упомянутого поведения этих веществ не были указаны. Таким образом, является необходимым построение микроскопических моделей таких веществ, усреднение которых приводит к нестандартному закону Гука (1.2). Так, в работе [7] в качестве такой модели был предложен композит, состоящий из упругого тела с большим числом мелких твердых частиц, ориентированных вдоль заданного направления.

В настоящей статье предлагается простейшая дискретная модель, усреднение которой приводит к закону Гука вида (1.2). А именно, рассматривается дискретная система, состоящая из большого числа абсолютно тонких однородных стержней, взаимодействующих между собой и ориентированных вдоль заданного направления \underline{l} . В результате взаимодействия стержни двигаются трансляционно и не вращаются, вследствие чего движение стержней однозначно определяется движением их центра масс. Такое движение может быть реализовано, например, в случае сильно намагничивающихся стержней, подверженных воздействию сильного внешнего магнитного поля, когда стержни ориентируются вдоль направления поля (рис. 1).

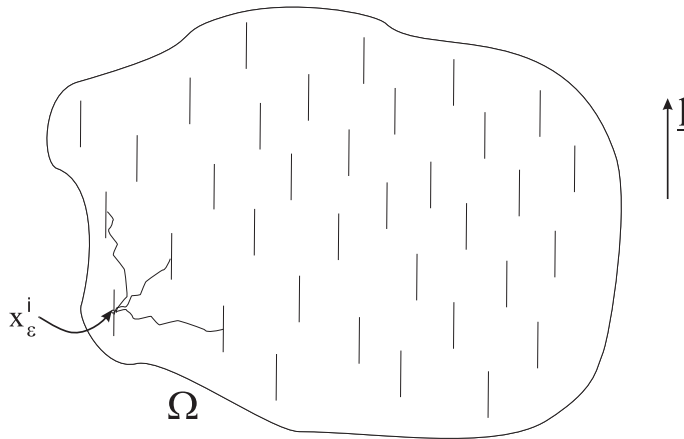


Рис. 1. Дискретная система ориентированных стержней.

Изучается асимптотическое поведение такой дискретной системы, когда параметр микроструктуры, задающий расстояния между ближайшими стержнями и их размеры, стремится к нулю. Как результат, получена усредненная модель движения упругого континуального тела, для которого справедлив закон Гука вида (1.2).

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему из N (N — большое число) абсолютно тонких однородных стержней, расположенных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и взаимодействующих между собой посредством упругих сил (например, пружин). Введем малый параметр $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{N}} \rightarrow 0$ и обозначим через $\underline{x}_\varepsilon^i$ центры стержней. Предположим, что размеры стержней и расстояния

между ближайшими из них имеют порядок ε . Более того, будем полагать, что все стержни имеют одинаковую длину и ориентацию. Такая ситуация может быть реализована, например, в случае сильно намагничивающихся стержней, помещенных в очень сильное внешнее магнитное поле, направленное вдоль постоянного вектора \underline{l} . Тогда все стержни ориентируются вдоль \underline{l} (см. [8]) и под действием упругих сил (пружин) движутся трансляционно.

Опишем теперь дискретную сетку из стержней и пружин. Все стержни имеют конечные массы $m_\varepsilon^i = M^i \varepsilon^3$ ($0 < m_1 \leq M^i \leq m_2 < \infty$, где m_1 и m_2 не зависят от ε) и бесконечно малый объем, т. е. рассматривается система абсолютно тонких стержней. Предполагается, что некоторые соседние стержни (расстояния между ними имеют порядок ε) связаны между собой одинаковыми упругими пружинами в каждой своей точке. Поскольку все стержни движутся трансляционно, они могут быть отождествлены с их центрами $\underline{x}_\varepsilon^i$, взаимодействующими между собой с „эффективной” (нецентральной) силой, равной силе взаимодействия целых стержней. Таким образом, система из стержней и пружин образует трехмерный граф, вершины которого соответствуют центрам стержней $\underline{x}_\varepsilon^i$, а ребра — „эффективным” связям между этими центрами. Единственным условием на регулярность описанного расположения является выполнение условия *триангуляции* (см. ниже). Предполагается также, что каждый стержень взаимодействует с конечным числом соседних стержней, не зависящим от ε .

Определим взаимодействие между стержнями следующим образом. Обозначим смещение i -го стержня через $\underline{u}_\varepsilon^i(t)$, $i = \overline{1, N}$, и предположим, что пружины, соединяющие каждую точку соседних стержней друг с другом, приводят к линейному упругому взаимодействию между соответствующими точками. Тогда упругая энергия двух соседних стержней определяется выражением

$$\langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}_3 , а матрица упругости C_ε^{ij} для i - и j -го стержней ($C_\varepsilon^{ij} \equiv 0$, если эти стержни не взаимодействуют) определяется равенством

$$C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j) = \frac{k^{ij}}{l^2} \int_{-l\varepsilon/2}^{l\varepsilon/2} dt_i \int_{-l\varepsilon/2}^{l\varepsilon/2} dt_j \left\langle \frac{\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j}{|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j|}, \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j|} \right\rangle \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j|}. \quad (2.1)$$

Здесь k^{ij} — упругие постоянные пружин ($0 < k_1 \leq k^{ij} \leq k_2$), соединяющих точки i - и j -го стержней, l — длина стержней, t_i и t_j — натуральные параметры i - и j -го стержней ($t_i, t_j \in \left[-\frac{l}{2}\varepsilon, \frac{l}{2}\varepsilon\right]$), а через \underline{x} и \underline{y} обозначены точки на i - и j -м стержнях соответственно ($\underline{x} = \underline{x}_\varepsilon^i + t_i \underline{l}$, $\underline{y} = \underline{x}_\varepsilon^j + t_j \underline{l}$). Заметим, что условие $k_1 > 0$ является ключевым в данном случае. Если $k_1 = 0$, то из-за бесконечного значения постоянной Корна в (4.5) (см. далее) может возникнуть неустойчивость (см., например, [9]). Как было отмечено, все стержни могут быть отождествлены с их центрами $\underline{x}_\varepsilon^i$, взаимодействующими между собой с „эффективной” силой, определяемой равенством (2.1). Существенное же отличие такого взаимодействия от центрального взаимодействия, рассмотренного в работе [11] и определяемого матрицей

$$C_{\varepsilon, l=0}^{ij}(\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j) = k^{ij} \varepsilon^2 \left\langle \frac{\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j}{|x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j|}, \frac{x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j}{|x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j|} \right\rangle \frac{x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j}{|x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j|}, \quad (2.2)$$

получаемой в пределе при $l \rightarrow 0$, состоит в том, что матрица C_{ε}^{ij} в отличие от матрицы $C_{\varepsilon, l=0}^{ij}$ не является инвариантной относительно поворотов. Это обстоятельство и ведет к появлению зависимости напряжений в среде от вращений.

Потенциальная энергия взаимодействия стержней имеет вид

$$H(\underline{u}_{\varepsilon}^1, \dots, \underline{u}_{\varepsilon}^N) = H_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_{\varepsilon}^{ij}(\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j), \underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j \rangle, \quad (2.3)$$

где суммирование ведется по всем парам взаимодействующих стержней, а H_0 — произвольная постоянная. Поскольку энергия (2.3) инвариантна относительно перемещений множества стержней, минимизация энергии определяет множество положений равновесия. Единственный минимум определяется условием, что все стержни, отдаленные от неподвижной границы $\partial\Omega$ на расстояния, меньшие $C\varepsilon$ (C — некоторая постоянная), жестко зажаты (соответствующие смещения $\underline{u}_{\varepsilon}^i$ равны нулю). Таким образом, система стержней имеет единственное положение равновесия $\{\underline{u}_{\varepsilon}^i\}_{i=1}^N$.

Обозначим через M количество стержней, расположенных в граничном слое $U(\partial\Omega, C\varepsilon)$, $M = O(\varepsilon^{-2}) \ll N = \varepsilon^{-3}$. Тогда движение дискретной сетки из взаимодействующих стержней описывается системой $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m_{\varepsilon}^i \ddot{\underline{u}}_{\varepsilon}^i = -\nabla_{\underline{u}_{\varepsilon}^i} H(\underline{u}_{\varepsilon}^1, \dots, \underline{u}_{\varepsilon}^N), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.4)$$

дополненных начальными и краевыми условиями соответственно:

$$\underline{u}_{\varepsilon}^i(0) = \underline{0}, \quad \dot{\underline{u}}_{\varepsilon}^i(0) = \underline{a}_{\varepsilon}^i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.5)$$

$$\underline{u}_{\varepsilon}^i(t) \equiv 0, \quad t > 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad (2.6)$$

где $\underline{a}_{\varepsilon}^i$, $i = \overline{1, N}$, — множество заданных постоянных таких, что кинетическая энергия

$$\sum_{i=1}^N m_{\varepsilon}^i |\underline{a}_{\varepsilon}^i|^2 \leq C \quad (2.7)$$

является ограниченной равномерно по ε .

Целью настоящего исследования является выведение континуального предела для задачи (2.4)–(2.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Прежде чем сформулировать основной результат, введем некоторые обозначения и сделаем определенные предположения. Обозначим через d_{ε}^i расстояние от стержня Q_{ε}^i с центром в точке $\underline{x}_{\varepsilon}^i$ до остальных стержней и до границы $\partial\Omega$, т. е. $d_{\varepsilon}^i = \text{dist}\left\{Q_{\varepsilon}^i, \bigcup_{j \neq i} Q_{\varepsilon}^j \cup \partial\Omega\right\}$. Предположим, что выполняются такие условия:

I. Геометрические условия:

1) $c_1\varepsilon \leq d_\varepsilon^i \leq c_2\varepsilon$, $i = \overline{1, N}$, где постоянные c_1, c_2 , $0 < c_1, c_2 < \infty$, не зависят от ε ;

2) предполагается, что центр каждого стержня связан ребрами графа Γ_Ω с центрами некоторых других стержней, находящихся на расстояниях, меньших $C\varepsilon$, где $C > 0$ — фиксированная постоянная, не зависящая от ε ; более того, рассматриваются графы, удовлетворяющие так называемому *триангуляционному условию*.

Определение. Граф Γ_Ω , вершины которого соответствуют центрам стержней $\underline{x}_\varepsilon^i$, а ребра — „эффективным” связям между этими центрами, удовлетворяет триангуляционному условию, если он является сужением на область Ω графа Γ (если ребро Γ пересекает $\partial\Omega$, то мы добавляем точку пересечения к графу Γ_Ω), для которого существует подграф $\Gamma' \subset \Gamma$, образующий триангуляцию \mathbb{R}^3 , т. е. разбивающий \mathbb{R}^3 на симплексы с углами, равномерно ограниченными снизу постоянной $C > 0$, не зависящей от ε . При этом Γ' может и не содержать в себе всех вершин $\underline{x}_\varepsilon^i$.

Эта триангуляция приводит к невырожденности эффективной упругой матрицы.

II. Условия на взаимодействие:

1) стержни Q_ε^i и Q_ε^j могут взаимодействовать, если они находятся на расстоянии порядка $O(\varepsilon)$ друг от друга; таким образом, матрица взаимодействия стержней $C^{ij} = 0$, если $\text{dist}(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j) \geq C_1\varepsilon$, $C_1 > 0$; в частности, все стержни, центры которых соединены общим ребром симплекса, взаимодействуют между собой;

2) матрица взаимодействия стержней определяется равенством (2.1).

При выполнении этих условий решение дискретной задачи (2.4)–(2.6) в определенном смысле сходится к вектор-функции $\underline{u}(\underline{x}, t)$, являющейся решением задачи несимметричной теории линейной упругости

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[a_{npqr}^D(\underline{x}) e_{qr}[u] + a_{npqr}^R(\underline{x}) \omega_{qr}[u] \right] \underline{e}^n = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{0}, \quad \left. \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\underline{x}, t) \right|_{t=0} = \underline{a}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega,$$

где \underline{e}_r , $r = \overline{1, 3}$, — ортонормированный базис в \mathbb{R}^3 , функции $\rho(\underline{x})$, $a_{npqr}^D(\underline{x})$, $a_{npqr}^R(\underline{x})$ и вектор-функция $\underline{a}(\underline{x})$ определяются в пунктах 3 и 4 (формулы (3.9)–(3.11), (5.1), (5.2)). Для общих непериодических расположений стержней деформационная и вращательная части тензора упругости $a_{npqr}^D(\underline{x})$ и $a_{npqr}^R(\underline{x})$ определяются через мезохарактеристику, введенную в третьем пункте. Для периодического расположения частиц эти коэффициенты являются константами и вычисляются в терминах упругих постоянных (см. п. 6).

3. Мезохарактеристика. Обозначим через $K_h^{\underline{x}} = K(\underline{x}, h)$ куб длины $h > 0$ ($\varepsilon \ll h \ll 1$) с центром в точке $\underline{x} \in \Omega$. Ориентация куба произвольна и не зависит ни от \underline{x} , ни от h . Для определенности предполагается, что ребра этого куба параллельны координатным осям.

Введем функционал

$$E_{\varepsilon h}^{\tau}[\underline{v}; \underline{x}; T; \Theta] = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_{\varepsilon}^{ij}(\underline{v}^i - \underline{v}^j), \underline{v}^i - \underline{v}^j \rangle +$$

$$+ h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_{i \in K_h^{\underline{x}}} \left| \underline{v}^i - \sum_{j,k=1}^3 T^{jk} \underline{\varphi}^{jk}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}) - \sum_{j,k=1}^3 \Theta^{jk} \underline{\psi}^{jk}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}) \right|^2, \quad (3.1)$$

где $\sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}}$ обозначает суммирование по всем парам взаимодействующих стержней, расположенных внутри куба $K_h^{\underline{x}}$ (количество этих стержней обозначим через p), $\underline{v} = (v^1, \dots, v^p)$, $\underline{\varphi}^{jk}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_j e^k + x_k e^j)$, $\underline{\psi}^{jk}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_k e^j - x_j e^k)$, а $\{T^{jk}\}_{j,k=1}^3$ и $\{\Theta^{jk}\}_{j,k=1}^3$ — произвольные тензоры второго ранга с постоянными компонентами, такие что $T^{jk} = T^{kj}$ и $\Theta^{jk} = -\Theta^{kj}$ соответственно. Первая сумма в (3.1) представляет собой упругую энергию в $K_h^{\underline{x}}$, вторая является штрафным членом, представляющим собой отклонения векторов \underline{v}_i от линейной части $\sum_{j,k=1}^3 T^{jk} \underline{\varphi}^{jk}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}) + \sum_{j,k=1}^3 \Theta^{jk} \underline{\psi}^{jk}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x})$. Это выражение можно рассматривать как линейную часть (дифференциал) усредненной вектор-функции $\underline{u}(\underline{x})$ (см. (4.13)), $0 < \tau < 2$ — параметр. Ищется минимум этого функционала среди всех векторов, соответствующих стержням $Q_{\varepsilon}^i \in K_h^{\underline{x}}$, $i = 1, \dots, p$. Минимизирующие векторы обозначим через $\{\underline{w}^i\}_{i=1}^p$:

$$\min_{\underline{v}} E_{\varepsilon h}^{\tau}[\underline{v}; \underline{x}; T; \Theta] = E_{\varepsilon h}^{\tau}[\underline{w}; \underline{x}; T; \Theta].$$

Рассмотрим специальные множества тензоров:

$$\underline{\underline{T}}_{(np)} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n) =$$

$$= \left\{ T_{(np)}^{jk} = \frac{1}{2}(\delta_{jn} \delta_{kp} + \delta_{jp} \delta_{kn}) \right\}_{j,k=1}^3, \quad n, p = \overline{1, 3},$$

и

$$\underline{\underline{\Theta}}_{(np)} = \frac{1}{2}(\underline{e}^p \otimes \underline{e}^n - \underline{e}^n \otimes \underline{e}^p) =$$

$$= \left\{ \Theta_{(np)}^{jk} = \frac{1}{2}(\delta_{jp} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kp}) \right\}_{j,k=1}^3, \quad n, p = \overline{1, 3}.$$

Если векторы $\{\underline{w}_{np}^i\}_{i=1}^p$ минимизируют функционал $E_{\varepsilon h}^{\tau}[\underline{w}; \underline{x}; \underline{\underline{T}}_{(np)}; \underline{0}]$, в котором $T^{jk} = T_{(np)}^{jk}$ и $\Theta^{jk} = 0$, $j, k = \overline{1, 3}$, а векторы $\{\underline{v}_{np}^i\}_{i=1}^p$ минимизируют функционал $E_{\varepsilon h}^{\tau}[\underline{v}; \underline{x}; \underline{0}; \underline{\underline{\Theta}}_{(np)}]$, в котором $T^{jk} = 0$, $j, k = \overline{1, 3}$, и $\Theta^{jk} = \Theta_{(np)}^{jk}$, то множества векторов $\{\underline{w}_{np}^i\}$, $\{\underline{v}_{np}^i\}$ и $\{\underline{w}^i\}$ удовлетворяют таким алгебраическим системам уравнений соответственно (уравнениям Эйлера–Лагранжа):

$$\sum_{j \in K_h^{\underline{x}}}^i C_{\varepsilon}^{ij}(\underline{w}_{np}^i - \underline{w}_{np}^j) + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \underline{w}_{np}^i = h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}), \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in K_h^{\underline{x}}}^i C_{\varepsilon}^{ij}(\underline{v}_{np}^i - \underline{v}_{np}^j) + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \underline{v}_{np}^i = h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_j^i C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}^i - \underline{w}^j) + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \underline{w}^i = \\ & = h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \left\{ \sum_{j,k=1}^3 T^{jk} \varphi^{jk}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}) + \sum_{j,k=1}^3 \Theta^{jk} \psi^{jk}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}) \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

для всех стержней $Q_\varepsilon^i \in K_h^{\underline{x}}$, где $\sum_{j \in K_h^{\underline{x}}}^i$ обозначает суммирование по всем стержням, расположенным в кубе $K_h^{\underline{x}}$ и взаимодействующим (т. е. связанным пружинами) с заданным стержнем Q_ε^i . Очевидно, $\underline{w}_{np}^i = \underline{w}_{pn}^i$ и $\underline{v}_{np}^i = -\underline{v}_{pn}^i$.

Учитывая формулу (2.1), имеем $\underline{w}^i = \sum_{n,p=1}^3 \underline{w}_{np}^i T^{np} + \sum_{n,p=1}^3 \underline{v}_{np}^i \Theta^{np}$. Подставим эту формулу в (3.1). Тогда

$$\begin{aligned} & \min_{\underline{v}} E_{\varepsilon h}^\tau[\underline{v}; \underline{x}; T; \Theta] = \\ & = E_{\varepsilon h}^\tau[\underline{w}; \underline{x}; T; \Theta] = \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) T^{np} T^{qr} + \\ & + 2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 b_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) T^{np} \Theta^{qr} + \sum_{n,p,q,r=1}^3 c_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) \Theta^{np} \Theta^{qr}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) & = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}_{np}^i - \underline{w}_{np}^j), \underline{w}_{qr}^i - \underline{w}_{qr}^j \rangle + \\ & + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_i \langle \underline{w}_{np}^i - \varphi^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}), \underline{w}_{qr}^i - \varphi^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}) \rangle, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} b_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) & = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}_{np}^i - \underline{w}_{np}^j), \underline{v}_{qr}^i - \underline{v}_{qr}^j \rangle + \\ & + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_i \langle \underline{w}_{np}^i - \varphi^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}), \underline{v}_{qr}^i - \psi^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}) \rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} c_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) & = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{v}_{np}^i - \underline{v}_{np}^j), \underline{v}_{qr}^i - \underline{v}_{qr}^j \rangle + \\ & + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_i \langle \underline{v}_{np}^i - \psi^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}), \underline{v}_{qr}^i - \psi^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти коэффициенты играют важную роль и определяют эффективный тензор напряжений среды. А именно, предположим, что равномерно по $\underline{x} \in \Omega$ существуют пределы

$$a_{npqr}(\underline{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau)}{h^3}, \quad (3.9)$$

$$b_{npqr}(\underline{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{b_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{b_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau)}{h^3}, \quad (3.10)$$

$$c_{npqr}(\underline{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau)}{h^3}, \quad (3.11)$$

где $a_{npqr}(\underline{x})$, $b_{npqr}(\underline{x})$, $c_{npqr}(\underline{x})$ — непрерывные положительно определенные тензоры. Из (3.6)–(3.8) следует, что тензоры $\{a_{npqr}(\underline{x})\}$, $\{b_{npqr}(\underline{x})\}$ и $\{c_{npqr}(\underline{x})\}$ обладают такими свойствами симметрии:

$$a_{npqr} = a_{qnrp} = a_{pnqr}, \quad b_{npqr} = b_{pnqr} = -b_{nprq},$$

$$c_{npqr} = c_{qnrp} = -c_{pnqr} = -c_{nprq} = \dots$$

Замечание. Если пределы (3.9)–(3.11) существуют для некоторого $\tau > 0$, то они существуют для любого $\tau > 0$ и предельные тензоры не зависят от τ (см., например, [10]).

В пункте 7 будет приведен пример периодического расположения стержней, когда пределы (3.9)–(3.11) вычисляются явно.

Легко видеть, что в случае центрального взаимодействия, определяемого равенством (2.2), минимизанты $\underline{v}_{np}^i = \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x})$, вследствие чего $b_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) = c_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) = 0$.

4. Дискретное неравенство Корна и компактность семейства решений. Сведем нестационарную задачу (2.4)–(2.6) к стационарной с помощью преобразования Лапласа по времени t . Обозначим преобразование Лапласа решений $\underline{u}_\varepsilon^i(t)$ через $\underline{u}_\varepsilon^i(\lambda) = L\underline{u}_\varepsilon^i(t)$.

Применяя преобразование Лапласа к (2.4)–(2.6), получаем

$$m_\varepsilon^i \lambda^2 \underline{u}_\varepsilon^i + \nabla_{\underline{u}_\varepsilon^i} H(\underline{u}_\varepsilon^1, \dots, \underline{u}_\varepsilon^N) - m_\varepsilon^i \underline{a}_\varepsilon^i = \underline{0}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.1)$$

$$\underline{u}_\varepsilon^i(\lambda) \equiv 0, \quad i = \overline{1, M}.$$

Зафиксируем $\lambda > 0$. Учитывая (2.3), устанавливаем, что решения задачи (4.1) минимизируют квадратичный функционал

$$\Phi_\varepsilon(\underline{u}_\varepsilon) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle + \lambda^2 \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 - 2 \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i \langle \underline{a}_\varepsilon^i, \underline{u}_\varepsilon^i \rangle, \quad (4.2)$$

где $\underline{u}_\varepsilon = (\underline{u}_\varepsilon^1, \dots, \underline{u}_\varepsilon^N)$. Для установления компактности $\underline{u}_\varepsilon$ необходимо получить равномерную по ε оценку на энергию взаимодействия

$$\sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle \leq C,$$

где C независит от ε . Из (4.2) следует, что $\Phi_\varepsilon(\underline{u}_\varepsilon) \leq \Phi_\varepsilon(\underline{0}) = 0$. Используя неравенство Коши–Шварца, имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle + \lambda^2 \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\langle \underline{a}_\varepsilon^i, \underline{u}_\varepsilon^i \rangle| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left(\sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{a}_\varepsilon^i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq 2 \left(\sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{a}_\varepsilon^i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} (\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle \right)^{1/2} = \\
&= \frac{2}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{a}_\varepsilon^i|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} (\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle + \lambda^2 \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Итак, учитывая (2.7), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} (\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle + \lambda^2 \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 \leq \\
&\leq \frac{4}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{a}_\varepsilon^i|^2 \leq \frac{4}{\lambda^2} C = \text{const}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Таким образом, сумма $\sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} (\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle$ является ограниченной равномерно по ε .

Построим по векторам $\underline{u}_\varepsilon^i$ кусочно-линейный сплайн

$$\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \underline{u}_\varepsilon^i L_\varepsilon^i(\underline{x}), \quad (4.4)$$

где L_ε^i — конечный элемент симплексов, определенных в геометрическом условии I.2 второго пункта. Функция L_ε^i является непрерывной в \mathbb{R}^3 , линейной в каждом симплексе подграфа Γ' и $L_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^j) = \delta_{ij}$.

Легко видеть, что

$$C_1 \|\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \sum'_{i,j} |\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j|^2 + \varepsilon^3 \sum_i |\underline{u}_\varepsilon^i|^2 \leq C_2 \|\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

где суммирование $\sum'_{i,j}$ ведется по всем парам вершин $(\underline{x}_\varepsilon^i, \underline{x}_\varepsilon^j)$, связанных ребрами симплексов, триангулирующих область Ω , а постоянные C_1 и C_2 не зависят от ε .

Имеет место такой дискретный аналог неравенства Корна.

Теорема 1. *Предположим, что граф, вершины которого соответствуют центрам стержней $\underline{x}_\varepsilon^i$, а ребра — „эффективным” связям между этими центрами (см. (2.1)), удовлетворяет триангуляционному условию I.2. Пусть $\underline{u}_\varepsilon^i$ обозначает преобразование Лапласа решений задачи (2.4)–(2.6). Тогда выполняется неравенство*

$$\|\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} (\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle, \quad (4.5)$$

где постоянная $C = \frac{8c_1^6}{3k_1c_3}$, $c_3 > 0$, не зависит от ε (см. (2.1) и геометрическое условие I.1).

Доказательство. Рассмотрим любой из симплексов $P_{\alpha\varepsilon}$, образующих триангуляцию области Ω , и обозначим через $\underline{x}_\varepsilon^\alpha$ его центр масс. Поскольку сплайн $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})$ является линейной вектор-функцией внутри этого симплекса, можно записать его в виде

$$\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 \left\{ e_{np}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha)] \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^\alpha) + \omega_{np}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^\alpha) \right\}, \quad \underline{x} \in P_{\alpha\varepsilon}. \quad (4.6)$$

Обозначим через $\sum_{i,j}^\alpha$ суммирование по всем ребрам $(\underline{x}_\varepsilon^i, \underline{x}_\varepsilon^j)$ симплекса $P_{\alpha\varepsilon}$. Тогда с учетом (4.4) и (4.6) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j}^\alpha \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j), \underline{u}_\varepsilon^i - \underline{u}_\varepsilon^j \rangle = \\ & = \sum_{i,j}^\alpha \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)), \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle = \\ & = \sum_{i,j}^\alpha \left\langle C_\varepsilon^{ij} \sum_{n,p=1}^3 \left\{ e_{np}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha)] \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) + \omega_{np}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) \right\}, \right. \\ & \quad \left. \sum_{q,r=1}^3 \left\{ e_{qr}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha)] \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) + \omega_{qr}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^\alpha)] \underline{\psi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) \right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Далее, используя (2.1), можно показать, что

$$\begin{aligned} & \langle C_\varepsilon^{ij} \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j), \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) \rangle = \\ & = \frac{k^{ij} \varepsilon^2}{4 |\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|^3} \left(4(\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) + \right. \\ & \quad + \frac{l^2 \varepsilon^2}{2} [l_p l_r (\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq}) + l_n l_r (\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq}) + \\ & \quad \left. + l_q (\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) + l_n l_q (\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) \right], \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle C_\varepsilon^{ij} \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j), \underline{\psi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) \rangle = \\ & = \frac{k^{ij} l^2 \varepsilon^4}{8 |\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|^3} [l_p l_q (\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) + l_n l_q (\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) - \\ & \quad - l_r (\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq}) - l_n l_r (\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq})], \quad (4.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle C_\varepsilon^{ij} \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j), \underline{\psi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) \rangle = \\ & = \frac{k^{ij} l^2 \varepsilon^4}{8 |\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|^3} [l_n l_q (\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) - l_p l_q (\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{ir} - \underline{x}_\varepsilon^{jr}) + \\ & \quad + l_r (\underline{x}_\varepsilon^{in} - \underline{x}_\varepsilon^{jn})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq}) - l_n l_r (\underline{x}_\varepsilon^{ip} - \underline{x}_\varepsilon^{jp})(\underline{x}_\varepsilon^{iq} - \underline{x}_\varepsilon^{jq})], \quad (4.9) \end{aligned}$$

откуда получаем оценку

$$\begin{aligned} & \langle C_{\varepsilon}^{ij} \varphi^{np}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j), \varphi^{qr}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j) \rangle \geq \\ & \geq \frac{k_1}{c_1^3 \varepsilon} \sum_{n,p,q,r=1}^3 \varepsilon_{np} [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha})] \varepsilon_{qr} [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha})] \times \\ & \times \sum_{i,j}^{\alpha} (x_{\varepsilon}^{i_n} - x_{\varepsilon}^{j_n})(x_{\varepsilon}^{i_p} - x_{\varepsilon}^{j_p})(x_{\varepsilon}^{i_q} - x_{\varepsilon}^{j_q})(x_{\varepsilon}^{i_r} - x_{\varepsilon}^{j_r}) + \\ & + \frac{l^2 k_1}{2c_1^3} \varepsilon \left(\sum_{n,p=1}^3 l_n (x_{\varepsilon}^{i_p} - x_{\varepsilon}^{j_p}) \frac{\partial u_{\varepsilon n}(\underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha})}{\partial x_p} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

в которой величины $u_{\varepsilon n}$, l_n и $x_{\varepsilon}^{i_n}$, $n = \overline{1,3}$, являются координатами вектор-функции $\underline{u}_{\varepsilon}$, вектора ориентации \underline{l} и векторов $\underline{x}_{\varepsilon}^i = (x_{\varepsilon}^{i_1}, x_{\varepsilon}^{i_2}, x_{\varepsilon}^{i_3})$ соответственно. Отсюда следует, что (см. [11])

$$\sum_{i,j}^{\alpha} \langle C_{\varepsilon}^{ij} (\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j), \underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j \rangle \geq \frac{k_1 c_3}{c_1^3} \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}^2 [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^{\alpha})] \varepsilon^3, \quad c_3 > 0.$$

Поскольку вектор-функция $\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})$ является линейной внутри каждого из симплексов $P_{\alpha\varepsilon}$, $\varepsilon_{np} [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})]$ является константой в $P_{\alpha\varepsilon}$, а значит,

$$\sum_{i,j}^{\alpha} \langle C_{\varepsilon}^{ij} (\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j), \underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j \rangle \geq c \int_{P_{\alpha\varepsilon}} \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}^2 [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})] d\underline{x},$$

где $c = 6k_1 \frac{c_3}{c_1^3}$. Суммируя по всем симплексам, образующим триангуляцию области Ω , и учитывая, что каждое ребро $(\underline{x}_{\varepsilon}^i, \underline{x}_{\varepsilon}^j)$ входит в эту сумму не более 8 раз, имеем

$$\begin{aligned} & 8 \sum_{i,j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} (\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j), \underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j \rangle \geq \\ & \geq 8 \sum_{i,j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} (\underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j), \underline{u}_{\varepsilon}^i - \underline{u}_{\varepsilon}^j \rangle \geq c \int_{\Omega} \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}^2 [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})] d\underline{x}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Так как $\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^i) = \underline{u}_{\varepsilon}^i = \underline{0}$ для $\underline{x}_{\varepsilon}^i \in U(\partial\Omega, C\varepsilon)$, сплайн $\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})$ принадлежит $H_0^1(\Omega)$. Теперь можно применить первое неравенство Корна (см., например, [12])

$$\| \underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2 \int_{\Omega} \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}^2 [\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})] d\underline{x}, \quad \underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega). \quad (4.12)$$

Из неравенств (4.11) и (4.12) следует (4.5).

Теорема 1 доказана.

Теперь установим компактность семейства $\{\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})\}$. Поскольку $\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega)$, из неравенств (4.3) и (4.5) следует, что последовательность сплайнов $\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x})$ ограничена равномерно по ε в пространстве $H_0^1(\Omega)$:

$$\| \underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \text{const}.$$

Значит, эта последовательность является слабо компактной, и вследствие теоремы Реллиха (см., например, [13]) существует подпоследовательность последовательности $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})$ (которую мы для удобства также будем обозначать $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})$) такая, что

$$\begin{aligned} \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) &\rightharpoonup \underline{u}(\underline{x}) \quad \text{слабо в } H_0^1(\Omega), \\ \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) &\rightarrow \underline{u}(\underline{x}) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega), \quad \underline{u}(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Как будет показано в следующем пункте, предельная вектор-функция $\underline{u}(\underline{x})$ является единственным решением усредненной задачи, вследствие чего вся последовательность $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x})$ (а не только некоторая ее подпоследовательность) сходится к однозначно определенной вектор-функции $\underline{u}(\underline{x})$ в $L_2(\Omega)$ (при $\lambda > 0$).

5. Минимизант усредненной задачи. Для того чтобы описать усредненную задачу, введем функцию $\rho(\underline{x}) > 0$ и вектор-функцию $\underline{a}(\underline{x})$, определенные через ячейки Вороного U_i . Напомним, что для заданного множества вершин \underline{x}^i в области Ω разбиение Вороного определяется через ячейки Вороного U_i точек \underline{x}^i : $U_i = \{\underline{x} \in \Omega: |\underline{x}^i - \underline{x}| \leq |\underline{x}^j - \underline{x}|, j \neq i\}$. Известно (см., например, [14]), что ячейки разбиения Вороного являются многогранниками — значит, получено разбиение области Ω многогранниками U_i .

Определим предельные плотности распределения масс стержней $\rho(\underline{x}) > 0$ и их начальных скоростей $\underline{a}(\underline{x})$. Для этого введем функцию распределения масс $\bar{\rho}_\varepsilon(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{m_\varepsilon^i}{|U_i|} \chi_{U_i}(\underline{x})$ и вектор-функцию распределения начальных скоростей $\bar{\underline{a}}_\varepsilon(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \underline{a}_\varepsilon^i \chi_{U_i}(\underline{x})$, где $\chi_{U_i}(x)$ обозначает характеристическую функцию множества U_i , а $|U_i|$ — ее объем. Предполагается, что последовательность функций $\bar{\rho}_\varepsilon(\underline{x})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится *-слабо в $L^\infty(\Omega)$ к функции $\rho(\underline{x}) > 0$:

$$\bar{\rho}_\varepsilon(\underline{x}) \rightharpoonup \rho(\underline{x}) \quad (*\text{-слабо в } L^\infty(\Omega)), \quad (5.1)$$

а последовательность $\bar{\underline{a}}_\varepsilon(\underline{x})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится сильно в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $\underline{a}(\underline{x})$:

$$\bar{\underline{a}}_\varepsilon(\underline{x}) \xrightarrow{L_2(\Omega)} \underline{a}(\underline{x}). \quad (5.2)$$

Также предполагается, что $\rho(\underline{x})$ и $\underline{a}(\underline{x})$ достаточно гладкие. Заметим, что существование пределов (5.1), (5.2) является достаточно общим сужением на пространственное распределение положений стержней и их начальных скоростей. Поскольку не предполагается никакой периодичности структуры, необходимо ввести некоторые условия на это пространственное распределение.

Теорема 2. Пусть $\underline{u}(\underline{x})$ — предельная вектор-функция, определенная в (4.13), расположение стержней (т. е. их центров) удовлетворяет условию неперiodической триангуляции в смысле определения 1.2 и существуют пределы (3.9)–(3.11), (5.1), (5.2). Тогда $\underline{u}(\underline{x})$ минимизирует предельный (усредненный) функционал

$$\begin{aligned} \Phi_0(\underline{u}) = \int_{\Omega} &\left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\underline{x}) \varepsilon_{np}[\underline{u}] \varepsilon_{qr}[\underline{u}] - \right. \\ &\left. - 2 \sum_{n,p=1}^3 \sum_{k=1}^3 b_{npk}(\underline{x}) e_{np}[\underline{u}] \left[\frac{1}{2} \text{rot } \underline{u} \right]_k \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k,l=1}^3 c_{kl}(\underline{x}) \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u} \right]_k \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u} \right]_l + \lambda^2 \rho(\underline{x}) |\underline{v}(\underline{x})|^2 - 2\rho(\underline{x}) \langle \underline{a}(\underline{x}), \underline{v}(\underline{x}) \rangle \Big\} d\underline{x} \quad (5.3)$$

в классе вектор-функций из $H_0^1(\Omega)$. Здесь

$$b_{npk} = \frac{1}{2} \sum_{q,r=1}^3 b_{npqr} \epsilon_{kqr}, \quad c_{kl} = \frac{1}{4} \sum_{n,p,q,r=1}^3 c_{npqr} \epsilon_{knp} \epsilon_{lqr}, \quad (5.4)$$

ϵ_{kqr} — компоненты тензора Леви-Чивита.

Сначала вкратце приведем схему доказательства. Главной целью является установление неравенства

$$\Phi_0(\underline{u}) \leq \Phi_0(\underline{w}) \quad \forall \underline{w}(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega). \quad (5.5)$$

Сначала докажем это неравенство для гладких вектор-функций $\underline{w} \in C_0^2(\Omega)$, а потом используем стандартную процедуру сглаживания. Доказательство состоит из двух шагов: 1) установление оценки сверху и 2) установление оценки снизу.

На первом шаге устанавливается неравенство

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[\underline{u}_\varepsilon] \leq \Phi_0[\underline{w}] \quad \forall \underline{w} \in C_0^2(\Omega), \quad (5.6)$$

где минимизант $\underline{u}_\varepsilon = u_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$ определяется по формуле (4.4).

Ключевым моментом на этом шаге является построение дискретной вектор-функции $\underline{w}_{\varepsilon h}$ для любой $\underline{w}(\underline{x}) \in C_0^2(\Omega)$. Эта вектор-функция называется квази-минимизантом, поскольку если $\underline{w} = \underline{u}$ (где \underline{u} определяется в (4.13)), то полученная вектор-функция $\underline{u}_{\varepsilon h}$ „почти“ минимизирует функционал Φ_ε . Эта вектор-функция строится с помощью „мезоразбиения“ области Ω кубами со стороной h ($\varepsilon \ll h \ll 1$).

Поскольку $\underline{u}_\varepsilon$ минимизирует функционал Φ_ε среди всех дискретных вектор-функций, то

$$\Phi_\varepsilon[\underline{u}_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[\underline{w}_{\varepsilon h}].$$

Дискретная вектор-функция $\underline{w}_{\varepsilon h}$ имеет следующие свойства. Во-первых, вектор-функция

$$\overline{\underline{w}_{\varepsilon h}}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \underline{w}_{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) \chi_{U_i}(\underline{x})$$

аппроксимирует $\underline{w}(\underline{x})$ в таком смысле:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\overline{\underline{w}_{\varepsilon h}}(\underline{x}) - \underline{w}(\underline{x})\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (5.7)$$

Более того, структура вектор-функции $\underline{w}_{\varepsilon h}$ позволяет перейти к пределу в функционале $\Phi_\varepsilon[\underline{w}_{\varepsilon h}]$ и получить неравенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[\underline{w}_{\varepsilon h}] \leq \Phi_0[\underline{w}], \quad (5.8)$$

где Φ_0 — усредненный функционал (5.3).

Поскольку построение $\underline{w}_{\varepsilon h}$ является ключевым пунктом доказательства, сначала поясним его главную идею. В каждом кубе мезоразбиения эта дискретная вектор-функция имеет вид

$$\underline{w}_{\varepsilon h}^{\underline{x}}(\underline{x}^i_\varepsilon) = \underline{w}(\underline{x}_\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)]\underline{w}_{np}^{i,\alpha} + \sum_{n,p=1}^3 w_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)]\underline{w}_{np}^{i,\alpha}, \quad (5.9)$$

где постоянные векторы $\underline{w}_{np}^{i,\alpha}$, $i = \overline{1, p}$, минимизируют функционал $E_{\varepsilon h}^\tau[\underline{v}; \underline{x}_\alpha; T; \Theta]$ (см. (3.1)) при $T = T_{np}$ и $\Theta = 0$, а векторы $\underline{w}_{np}^{i,\alpha}$, $i = \overline{1, p}$, минимизируют функционал $E_{\varepsilon h}^\tau[\underline{v}; \underline{x}_\alpha; T; \Theta]$ при $T = 0$ и $\Theta = \Theta_{np}$.

Заметим, что при замене $\underline{w}_{np}^{i,\alpha}$ на $\underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\alpha)$ и $\underline{w}_{np}^{i,\alpha}$ на $\underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\alpha)$ квазиминимизант становится линейной частью разложения Тейлора вектор-функции $\underline{w}(\underline{x})$ в мезокубе $K_h^{\underline{x}_\alpha}$ с центром в точке \underline{x}_α .

Вектор-функция (5.9) имеет следующие свойства. Во-первых, она аппроксимирует (в некотором смысле) вектор-функцию $\underline{w}(\underline{x})$ в кубе $K_h^{\underline{x}_\alpha}$. Во-вторых, она „почти“ минимизирует функционал локальной энергии (мезохарактеристику) (3.1), когда $T^{jk} = \varepsilon_{jk}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)]$ и $\Theta^{jk} = \omega_{jk}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)]$. Последнее свойство позволяет перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и вычислить предельный функционал Φ_0 через мезохарактеристику.

Если кубы $K_h^{\underline{x}_\alpha}$ образуют разбиение области Ω , то глобальный квазиминимизант можно построить, грубо говоря, склеивая вместе квазиминимизанты функционала (3.1) с помощью соответствующего разбиения единицы.

На втором шаге устанавливается неравенство

$$\Phi_0[\underline{u}] \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[\underline{u}_\varepsilon]. \quad (5.10)$$

Ясно, что из (5.10) и (5.6) следует (5.5).

Доказательство теоремы 2. Установим оценку сверху.

Возьмем любую вектор-функцию $\underline{w}(\underline{x}) \in C_0^2(\Omega)$. Выберем параметр h таким образом, чтобы существовало покрытие области Ω кубами $K_h^{\underline{x}_\alpha}$ с ребрами, параллельными координатным осям, и с центрами в точках \underline{x}_α , образующих кубическую решетку периода $h - h^{1+\tau/2}$, $0 < \tau < 2$: $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_h^{\underline{x}_\alpha}$. Таким образом, кубы пересекаются, и вследствие такого пересечения можно выделить меньшие кубы $K_{h'}^{\underline{x}_\alpha}$ с тем же центром \underline{x}_α и ребрами длины $h' = h - 2h^{1+\tau/2}$. Известно, что существует множество функций $\{\phi_\alpha(\underline{x}) \in C_0^\infty(\Omega)\}_{\alpha \in \Lambda}$ (разбиение единицы) такое, что

$$\phi_\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & \underline{x} \in K_{h'}^{\underline{x}_\alpha}, \\ 0, & \underline{x} \notin K_h^{\underline{x}_\alpha}, \end{cases} \quad 0 \leq \phi_\alpha(\underline{x}) \leq 1, \quad (5.11)$$

$$|\nabla \phi_\alpha(\underline{x})| \leq \frac{c}{h^{1+\tau/2}}, \quad \sum_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(\underline{x}) \equiv 1, \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}.$$

Построим дискретную вектор-функцию

$$\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i) = \sum_{\alpha \in \Lambda} \left\{ \underline{w}(\underline{x}_\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)]\underline{w}_{np}^{i,\alpha} + \sum_{n,p=1}^3 w_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)]\underline{w}_{np}^{i,\alpha} \right\} \phi_\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i), \quad (5.12)$$

где $\underline{w}_{np}^{i,\alpha}$ и $\underline{v}_{np}^{i,\alpha}$, $i = \overline{1, p}$, — минимизанты функционала $E_{\varepsilon h}^r[\underline{v}; \underline{x}_\alpha; T; \Theta]$, определенного в (3.1), при $T = T_{np}$, $\Theta = 0$ и $T = 0$, $\Theta = \Theta_{np}$ соответственно.

Используя теперь (3.1), (3.6)–(3.11), (5.11), (5.12), а также учитывая (5.4) и равенство

$$[\text{rot} \underline{u}]_q = \sum_{n,p=1}^3 \omega_{np}[\underline{u}] \epsilon_{npq}, \quad (5.13)$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} (\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^j)), \underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\underline{x}) \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x})] \varepsilon_{qr}[\underline{w}(\underline{x})] - \right. \\ & \quad - 2 \sum_{n,p,q=1}^3 b_{npq}(\underline{x}) e_{np}[\underline{u}(\underline{x})] \left[\frac{1}{2} \text{rot} \underline{u}(\underline{x}) \right]_q + \\ & \quad \left. + \sum_{q,r=1}^3 c_{qr}(\underline{x}) \left[\frac{1}{2} \text{rot} \underline{u}(\underline{x}) \right]_q \left[\frac{1}{2} \text{rot} \underline{u}(\underline{x}) \right]_r \right\} d\underline{x}. \quad (5.14) \end{aligned}$$

Заметим, что в случае центрального взаимодействия, определяемого равенством (2.2) и инвариантного относительно вращений ($C_{\varepsilon, l=0}^{ij} \psi^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j) = 0$), минимизанты $\underline{v}_{np}^{i,\alpha} = \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\alpha)$, вследствие чего $b_{npq} = c_{qr} = 0$.

Кроме того, используя (5.1), (5.2) и (5.7), аналогично [11] имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i \langle \underline{a}_\varepsilon^i, \underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i) \rangle = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) \langle \underline{a}(\underline{x}), \underline{w}(\underline{x}) \rangle d\underline{x}, \quad (5.15)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N m_\varepsilon^i |\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x}_\varepsilon^i)|^2 = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}) |\underline{w}(\underline{x})|^2 d\underline{x}. \quad (5.16)$$

Соединяя (4.2), (5.3), (5.14)–(5.16), получаем оценку сверху (5.8).

Установим теперь оценку снизу.

Предположим для простоты, что вектор-функция $\underline{u}(\underline{x})$, определенная в (4.13), принадлежит классу $C_0^2(\Omega)$. Разобьем область Ω на кубы $K_h^{\underline{x}, \alpha}$, центры которых образуют кубическую решетку периода h (т. е. эти кубы не пересекаются):

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_h^{\underline{x}, \alpha}, \quad K_h^{\underline{x}, \alpha} \cap K_h^{\underline{x}, \beta} = \emptyset, \quad \alpha \neq \beta.$$

Заметим, что в отличие от покрытия, введенного на первом шаге доказательства, эти кубы образуют разбиение области Ω .

Теперь в каждом кубе $K_h^{\underline{x}, \alpha}$ построим другой квазиминимизант $\underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x})$, который „почти” минимизирует член взаимодействия в (4.2) (первое слагаемое):

$$\underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) = \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x}_\alpha).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \min_{\underline{u}^\alpha} E_{\varepsilon h}^\tau[\underline{u}^\alpha; \underline{x}; T; \Theta] = \\ & = \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) T^{np} T^{qr} + \\ & + 2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 b_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) T^{np} \Theta^{qr} + \\ & + \sum_{n,p,q,r=1}^3 c_{npqr}(\underline{x}, \varepsilon, h, \tau) \Theta^{np} \Theta^{qr} \leq \\ & \leq E_{\varepsilon h}^\tau[\underline{w}_\varepsilon^\alpha; \underline{x}_\alpha; T; \Theta]. \end{aligned}$$

Выбирая $T^{np} = \varepsilon_{np}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)]$ и $\Theta^{np} = \omega_{np}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)]$, а также учитывая (5.4) и (5.13), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x_\alpha, \varepsilon, h, \tau) \varepsilon_{np}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)] - \\ & - 2 \sum_{n,p,q=1}^3 b_{npq}(x_\alpha, \varepsilon, h, \tau) e_{np}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)] \left[\frac{1}{2} \text{rot } \underline{u}(\underline{x}_\alpha) \right]_q + \\ & + \sum_{q,r=1}^3 c_{qr}(x_\alpha, \varepsilon, h, \tau) \left[\frac{1}{2} \text{rot } \underline{u}(\underline{x}_\alpha) \right]_q \left[\frac{1}{2} \text{rot } \underline{u}(\underline{x}_\alpha) \right]_r \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}_\alpha}} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^j)), \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle + \\ & + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_{i \in K_h^{\underline{x}_\alpha}} \left| \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)] \varphi^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\alpha) - \right. \\ & \left. - \sum_{n,p=1}^3 \omega_{np}[\underline{u}(\underline{x}_\alpha)] \psi^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\alpha) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Используя (2.1) и очевидное равенство

$$\underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^j) = \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j),$$

видим, что

$$\begin{aligned} & \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^j)), \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle = \\ & = \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)), \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (3.9)–(3.11), (4.4) и (4.13), можно показать, что

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\underline{x}) \varepsilon_{np}[\underline{u}(\underline{x})] \varepsilon_{qr}[\underline{u}(\underline{x})] - \right. \\
& - 2 \sum_{n,p,q=1}^3 b_{npq}(\underline{x}) e_{np}[\underline{u}(\underline{x})] \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u}(\underline{x}) \right]_q + \\
& \left. + \sum_{q,r=1}^3 c_{qr}(\underline{x}) \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u}(\underline{x}) \right]_q \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u}(\underline{x}) \right]_r \right\} d\underline{x} \leq \\
& \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} (\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^i) - \underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^j)), \underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^i) - \underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}_{\varepsilon}^j) \rangle. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Кроме того, несложно доказать предельное соотношение

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lambda^2 \sum_{i=1}^N m_{\varepsilon}^i |\underline{u}_{\varepsilon}^i|^2 - 2 \sum_{i=1}^N m_{\varepsilon}^i \langle \underline{a}_{\varepsilon}^i, \underline{u}_{\varepsilon}^i \rangle \right\} = \\
& = \int_{\Omega} [\lambda^2 \rho(\underline{x}) |\underline{u}(\underline{x})|^2 - 2\rho(\underline{x}) \langle \underline{a}(\underline{x}), \underline{u}(\underline{x}) \rangle] d\underline{x}. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Объединяя теперь (5.18) и (5.19), имеем

$$\Phi_0[\underline{u}] \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}[\underline{u}_{\varepsilon}] \quad (5.20)$$

в предположении, что предельная вектор-функция $\underline{u}(\underline{x})$ является гладкой ($C_0^2(\Omega)$). Поскольку это заранее неизвестно, необходимо ввести гладкие аппроксимации $\underline{u}_{\sigma}(\underline{x})$ этой вектор-функции, для них получить неравенство, аналогичное (5.20), а затем выполнить предельный переход по σ (см. [15–17]).

Окончательно, объединяя (5.8) и (5.10), получаем

$$\Phi_0[\underline{u}] \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}[\underline{u}_{\varepsilon}] \leq \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}[\underline{u}_{\varepsilon h}] \leq \Phi_0[\underline{w}] \quad \forall \underline{w} \in C_0^2(\Omega).$$

Вследствие плотности вложения $C_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ имеем

$$\Phi_0[\underline{u}] \leq \Phi_0[\underline{w}] \quad \forall \underline{w} \in H_0^1(\Omega),$$

т. е. оценка (5.10) установлена.

6. Теорема об усреднении. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются геометрические условия I и условия на взаимодействия II, а также существуют пределы (3.9)–(3.11), (5.1), (5.2). Тогда последовательность вектор-функций $\underline{u}_{\varepsilon}(\underline{x}, t)$, определенных в (4.4), сходится слабо в $L_2(\Omega \times [0, T])$ (для любого $T > 0$) к вектор-функции $\underline{u}(\underline{x}, t)$, являющейся решением усредненной задачи

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[a_{npqr}^D(\underline{x}, S^d) e_{qr}[u] + a_{npqr}^R(\underline{x}, S^d) \omega_{qr}[u] \right] \underline{e}^n = \rho \underline{f}, \quad (6.1)$$

$$\underline{x} \in \Omega, \quad t > 0;$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (6.2)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}), \quad \left. \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(\underline{x}, t) \right|_{t=0} = \underline{v}_0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (6.3)$$

Здесь

$$a_{npqr}^D = a_{npqr} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 b_{qrl} \epsilon_{lnp}, \quad (6.4)$$

$$a_{npqr}^R = \frac{1}{4} \sum_{l,m=1}^3 c_{lm} \epsilon_{lnp} \epsilon_{mqr} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 b_{npl} \epsilon_{lqr}.$$

Задача (6.1)–(6.3) имеет единственное решение.

Доказательство. Заметим, что сходимость в теореме 2 была доказана только для $\lambda > 0$. Для доказательства теоремы 3 необходимо применить обратное преобразование Лапласа для установления сходимости $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, t)$ к $\underline{u}(\underline{x}, t)$. Для этого необходимо продолжить эти вектор-функции аналитически в комплексную правую полуплоскость и установить их поведение при $\lambda \rightarrow \infty$.

Аналогично [11] можно показать, что семейство решений $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ задачи (4.1) является аналитическим в области $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Более того, в этой области имеет место оценка

$$\|\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad (6.5)$$

где константа C не зависит от ε .

Таким образом, учитывая теорему 2, аналитичность $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ в $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$ и равномерную оценку (6.5), с помощью теоремы Витали (см. [18]) заключаем, что $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ сходится в $L_2(\Omega)$ к некоторой вектор-функции $\underline{w}(\underline{x}, \lambda)$ равномерно относительно λ в любом компактном множестве области $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Предельная вектор-функция $\underline{w}(\underline{x}, \lambda)$ является аналитической в области $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$, и в этой области

$$\|\underline{w}(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \quad (6.6)$$

Более того, эта вектор-функция является минимизантом функционала (5.3), а следовательно, решением краевой задачи (при $\lambda > 0$):

$$\lambda^2 \rho \underline{u} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left[a_{npqr}^D(\underline{x}) e_{qr}[u] + a_{npqr}^R(\underline{x}) \omega_{qr}[u] \right] \underline{e}^n = \rho \underline{a}, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (6.7)$$

$$\underline{u}(\underline{x}, \lambda) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \quad (6.8)$$

Покажем теперь, что задача (6.7), (6.8) имеет единственное аналитическое решение для всех $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Для любой вектор-функции $\underline{w} \in H_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$C \int_{\Omega} [a_{npqr}^D + a_{npqr}^R] \frac{\partial w_n}{\partial x_p} \frac{\partial w_q}{\partial x_r} d\underline{x} \geq \|\underline{w}\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (6.9)$$

Доказательство. Для заданной вектор-функции $\underline{w} \in H_0^1(\Omega)$ построим последовательность дискретных вектор-функций $\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x})$ в соответствии с (5.12). Используя (5.14) и дискретное неравенство Корна (4.5), легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\underline{w}_{\varepsilon h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq C \int_{\Omega} [a_{npqr}^D + a_{npqr}^R] \frac{\partial w_n}{\partial x_p} \frac{\partial w_q}{\partial x_r} d\underline{x} \leq C \|\underline{w}\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Учитывая (6.10) и (5.7), заключаем, что последовательность $\underline{w}_{\varepsilon h}(\underline{x})$ (с точностью до подпоследовательности) сходится слабо в $H^1(\Omega)$ к $\underline{w}(\underline{x})$. Поэтому

$$\|\underline{w}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \varliminf_{h \rightarrow 0} \varliminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\underline{w}_{\varepsilon h}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} [a_{npqr}^D + a_{npqr}^R] \frac{\partial w_n}{\partial x_p} \frac{\partial w_q}{\partial x_r} d\underline{x}.$$

Лемма доказана.

Запишем теперь задачу (6.7), (6.8) в следующей слабой форме:

$$L_{\lambda}[\underline{u}, \underline{v}] = F_{\lambda}[\underline{v}] \quad \forall \underline{v} \in H_0^1(\Omega),$$

где

$$L_{\lambda}[\underline{u}, \underline{v}] = \lambda \int_{\Omega} \rho \underline{u} \cdot \overline{\underline{v}} d\underline{x} + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} [a_{npqr}^D + a_{npqr}^R] \frac{\partial u_n}{\partial x_p} \frac{\partial \overline{v}_q}{\partial x_r} d\underline{x}$$

и

$$F_{\lambda}[\underline{v}] = \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \langle \rho \underline{a}, \overline{\underline{v}} \rangle d\underline{x}.$$

Легко видеть, что

$$|L_{\lambda}[\underline{u}, \underline{v}]| \leq C \|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)}, \quad |F_{\lambda}[\underline{v}]| \leq C \|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (6.11)$$

Более того, учитывая (6.9) и тождество $a_{npqr}^D + a_{npqr}^R = a_{qrnp}^D + a_{qrnp}^R$, приходим к выводу, что

$$|L_{\lambda}[\underline{u}, \underline{v}]| \geq C \|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (6.12)$$

Объединяя теперь (6.11), (6.12) и используя теорему Лакса – Мильграма, заключаем, что существует единственное решение $\underline{u}(\underline{x}, \lambda)$ задачи (6.7), (6.8) для любого $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Более того, это решение является аналитическим в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$, так как форма $L_{\lambda}[\underline{u}, \underline{v}]$ аналитическая (см. [19]). Отсюда следует, что $\underline{w}(\underline{x}, \lambda) = \underline{u}(\underline{x}, \lambda)$ в $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

В силу оценок (6.5) и (6.6) можно применить обратное преобразование Лапласа (см., например, [18–20]) и доказать теорему 3 (подробнее см. [11, 15–17, 21]).

7. Периодическое расположение стержней. Приведем пример, когда условия I и II удовлетворяются, а коэффициенты $a_{npqr}(\underline{x})$, $b_{npqr}(\underline{x})$ и $c_{npqr}(\underline{x})$ могут быть вычислены точно. Напомним, что мы отождествляем все стержни (ориентированные вдоль заданного направления \perp) с их центрами, взаимодействующими между собой посредством „эффективной” силы, определяемой равенством (2.1).

Рассмотрим теперь периодическое расположение, при котором центры $\underline{x}_\varepsilon^i$ стержней Q_ε^i образуют кубическую решетку периода ε . Предполагается, что каждая вершина этой решетки взаимодействует посредством нецентральной силы (2.1) с „ближайшими” вершинами (в направлении ребер единичного куба периодичности), „ближними” вершинами (в направлении диагоналей граней куба) и „смежными” вершинами (в направлении диагоналей куба). То есть каждая вершина взаимодействует с $3^3 - 1 = 26$ другими вершинами решетки, причем предполагается, что упругие постоянные k^{ij} нецентральных сил взаимодействия (2.1) для „ближайших”, „ближних” и „смежных” вершин равны соответственно k_1 , k_2 и k_3 (рис. 2). На этом рисунке центр $\underline{x}_\varepsilon^i$ фиксированного стержня изображен темным шаром, а

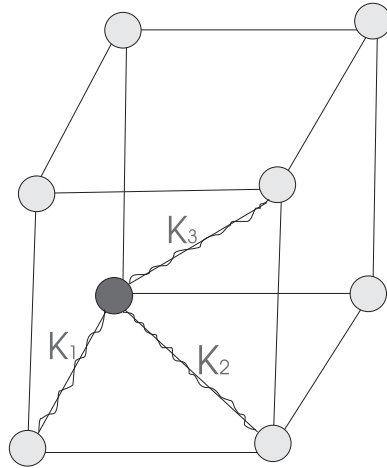


Рис. 2. Основная периодическая решетка.

центры стержней, с которыми он взаимодействует, отмечены светлыми шарами.

Теорема 4. Для описанной кубической решетки (см. рис. 2) коэффициенты упругости $a_{npqr}(\underline{x})$, $b_{npqr}(\underline{x})$ и $c_{npqr}(\underline{x})$, определенные в (3.9)–(3.11), существуют и вычисляются с помощью формул

$$a_{nnnn} = \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right) \frac{2 + l_n^2 l^2}{2},$$

$$a_{nnpp} = \frac{1}{2}\sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3,$$

$$a_{nppp} = \frac{1}{2}\sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 + \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right) \frac{(l_n^2 + l_p^2)l^2}{8},$$

$$a_{nnnp} = \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right) \frac{l_n l_p l^2}{4},$$

$$\begin{aligned}
a_{npnq} &= \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right) \frac{l_p l_q l^2}{8}, \\
b_{nnnp} &= -\frac{l_n l_p l^2}{4} \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right), \\
b_{npnq} &= -\frac{l_p l_q l^2}{8} \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right), \\
b_{nnpn} &= \frac{(l_n^2 - l_p^2) l^2}{8} \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right), \\
c_{npnq} &= \frac{l_p l_q l^2}{8} \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right), \\
c_{nnpn} &= \frac{(l_n^2 + l_p^2) l^2}{8} \left(k_1 + \sqrt{2}k_2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}k_3 \right),
\end{aligned}$$

где индексы n, p, q, r различны. Во всех остальных случаях $a_{npqr} = b_{npqr} = c_{npqr} = 0$.

Доказательство. Аналогично [11] можно показать, что имеют место равенства

$$\begin{aligned}
a_{npqr}(\underline{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_{\varepsilon}^{ij} \varphi^{np}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j), \varphi^{qr}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j) \rangle}{h^3}, \\
b_{npqr}(\underline{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_{\varepsilon}^{ij} \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j), \underline{\psi}^{qr}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j) \rangle}{h^3}, \\
c_{npqr}(\underline{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sum_{i,j \in K_h^{\underline{x}}} \langle C_{\varepsilon}^{ij} \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j), \underline{\psi}^{qr}(\underline{x}_{\varepsilon}^i - \underline{x}_{\varepsilon}^j) \rangle}{h^3},
\end{aligned}$$

из которых с учетом формул (4.7)–(4.9) следует утверждение теоремы.

Автор выражает благодарность Е. Я. Хруслову за плодотворные обсуждения результатов, изложенных в статье.

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. – Paris: Hermann, 1909.
2. *Grioli G.* Ellasticà asymerica // Ann. mat. pura ed appl. – 1960. – 4. – P. 389–418.
3. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – 11. – P. 415–448.
4. *Smolin I. Y., Makarov P. V., Shmick D. V., Savlevich I. V.* A micropolar model of plastic deformation of polycrystals at the mesolevel // Comput. Mat. Sci. – 2000. – 19. – P. 133–142.
5. *Zhang X., Sharma P.* Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems // Int. J. Solids and Struct. – 2005. – 42. – P. 3833–3851.
6. *Leonov A. I.* Algebraic theory of linear viscoelastic nematodynamics // Math. Phys., Ana. and Geom. – 2008. – 11. – P. 87–116.
7. *Berezhnyi M., Khruslov E.* Non-standard dynamics of elastic composites // Networks and Heterogeneous Media. – 2011. – 6. – P. 89–109.
8. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Course of theoretical physics. quantum mechanics. Non-relativistic theory. – London: Pergamon, 1958. – 515 p.
9. *Friesecke G., Theil F.* Validity and failure of the Cauchy–Born rule in 2D mass-spring lattice // J. Nonlinear Sci. – 2002. – № 12. – P. 445–478.

10. *Marchenko V., Khruslov E.* Homogenization of partial differential equations. – Boston: Birkhäuser, 2006. – 401 p.
11. *Berezhnyy M. A., Berlyand L. V.* Continuum limit for three-dimensional mass-spring networks and discrete Korn's inequality // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 2006. – **54**. – P. 635–669.
12. *Oleinic O. A., Shamaev A. S., Iosif'yan G. A.* Mathematical problems in elasticity and homogenization // *Stud. Math. and Appl.* – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1982. – **26**.
13. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504 с.
14. *Косевич А. М.* Теория кристаллической решетки (физическая механика кристалла). – Харьков: Вища шк., 1988. – 304 с.
15. *Berezhnyi M. A.* The asymptotic behavior of viscous incompressible fluid small oscillations with solid interacting particles // *J. Math. Phys., Anal., Geom.* – 2007. – **3**. – P. 135–156.
16. *Berezhnyi M., Berlyand L., Khruslov E.* The homogenized model of small oscillations of complex fluids // *Networks and Heterogeneous Media.* – 2008. – **3**. – P. 835–869.
17. *Бережний М. А.* Усреднені моделі структурованих рідин: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Харків, 2009. – 159 с. URL: <http://www.lib.ua-ru.net/diss/cont/354154.html>.
18. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. – М.: Наука, 1968.
19. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. – Springer, 1995. – 652 p.
20. *Ditkin V. A., Prudnikov A. P.* Integral transforms and operational calculus. – Oxford; New York: Pergamon, 1965. – 529 p.
21. *Berlyand L., Khruslov E.* Homogenized non-Newtonian viscoelastic rheology of a suspension of interacting particles in a viscous Newtonian fluid // *SIAM J. Appl. Math.* – 2004. – **64**. – P. 1002–1034.

Получено 24.01.11,
после доработки — 08.04.11