К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.956

С. А. Алдашев (Актюб. гос. ун-т им. К. Жубанова, Казахстан)

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Eigenvalues and eigenfunctions of the Hellerstedt problems for the Lavrentiev – Bitsadze multidimensional equation are found.

Знайдено власні значення та власні функції задач Геллерстедта для багатовимірного рівняння Лаврентьєва – Біцадзе.

1. Постановка задачи и основные результаты. Двумерные спектральные задачи для уравнений гиперболо-эллиптического типа интенсивно изучаются [1 – 5], однако, насколько известно автору, их многомерные аналоги не исследованы [6].

Пусть D — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная в полупространстве $t > 0$ сферической поверхностью $\Gamma\colon |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ конусами $K_0\colon |x| = -t$, $K_1\colon |x| = 1 + t$, $-\dfrac{1}{2} \leq t \leq 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S общую часть границ D^+, D^-, представляющих множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m. Часть конусов K_0, K_1, ограничивающих области D^-, обозначим через S_0, S_1 соответственно.

В области D рассмотрим многомерное уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным действительным параметром μ

$$\Delta_x u + (\mathrm{sgn} t)\, u_{tt} = \mu u, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

Рассмотрим следующие спектральные задачи Геллерстедта для уравнения (1).

Задача Γ_μ. Найти решение уравнения (1) в области D при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \qquad u\big|_{S_0} = 0, \tag{2}$$

или

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \qquad u\big|_{S_1} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m$, t к сферическим r, $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, t, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, \ldots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Справедливы следующие леммы [7].

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta)$ принадлежит $W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f_n^k(r) = \int\limits_H f(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH,$$

где H — единичная сфера в E_m.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(r,\theta)$ принадлежала $W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$\left|f_0^1(r)\right| \leq c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} \left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1,\, c_2 = \text{const}.$$

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *для каждого μ имеет собственные функции.*

Теорема 2. *Задача* (1), (3) *имеет собственные значения $\mu = -\gamma_s^2$, $\Big(\gamma_s$ — положительные нули функции Бесселя первого рода $J_s(z)$ целого порядка $s \geq$ $\geq \dfrac{(m+1)}{2}\Big)$ и соответствующие им собственные функции.*

2. Доказательство теорем. В сферических координатах уравнение (1) в области D^+ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} = \mu u, \tag{5}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1,$$

$$g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+$ $+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи Γ_μ в области D^+ будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [7], имеем

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k+\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k=\mu\bar{u}_n^k,\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots, \tag{7}$$

при этом первое из краевых условий (2) и (3) примет вид

$$\bar{u}_n^k\left(r,\sqrt{1-r^2}\right)=0,\qquad k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots,\quad 0\le r\le 1. \tag{8}$$

Выполняя в (7), (8) замену $\bar{u}_n^k(r,t)=r^{1-m/2}u_n^k(r,t)$, а затем полагая $r=\rho\cos\varphi$, $t=\rho\sin\varphi$, $\rho\ge 0$, $0\le\varphi\le\pi$, получаем

$$\upsilon_{n\rho\rho}^k+\frac{1}{\rho}\upsilon_{n\rho}^k+\frac{1}{\rho^2}\upsilon_{n\varphi\varphi}^k+\frac{\overline{\lambda}_n}{\rho^2\cos^2\varphi}\upsilon_n^k=\mu\upsilon_n^k, \tag{9}$$

$$\upsilon_n^k(1,\varphi)=0, \tag{10}$$

где

$$\upsilon_n^k(\rho,\,\varphi)=u_n^k(\rho\cos\varphi,\,\rho\sin\varphi),\qquad \overline{\lambda_n}=\frac{\big[(m-1)(3-m)-4\lambda_n\big]}{4}.$$

Решение задачи (9), (10) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(\rho,\,\varphi)=R(\rho)\phi(\varphi). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), (10), имеем

$$\rho^2R_{\rho\rho}+\rho R_\rho-(\lambda+\rho^2\mu)R=0, \tag{12}$$

$$\phi_{\varphi\varphi}+\left(\lambda+\frac{\bar{\lambda}_n}{\cos^2\varphi}\right)\phi=0,\qquad \lambda=s^2=\mathrm{const}, \tag{13}$$

$$R(1)\phi(\varphi)=0. \tag{14}$$

Ограниченным решением уравнения (12) является функция Бесселя первого рода [8] $R_\mu(\rho)=J_s\big(\sqrt{-\mu}\rho\big)$. Подчинив ее условию $R_\mu(1)=0$, из (14) получим собственные значения $\mu=-\gamma_s^2$, где γ_s — положительные нули функций Бесселя, $s=0,1,\ldots$.

Далее уравнение (13) запишем следующим образом:

$$\phi_{\varphi\varphi}=\left[\frac{l(l-1)}{\cos^2\varphi}-s^2\right]\phi,\qquad l=-n-\frac{m-3}{2}. \tag{15}$$

Выполняя в уравнении (15) замену $\xi=\sin^2\varphi$, получаем уравнение

$$\xi(\xi-1)g_{\xi\xi}+\left[(\alpha+\beta+1)\xi-\frac{1}{2}\right]g_\xi+\alpha\beta g=0,$$

$$g(\xi) = \frac{\phi(\varphi)}{\cos^l \varphi}, \qquad \alpha = \frac{l+s}{2}, \qquad \beta = \frac{l-s}{2},$$

общее решение которого представимо в виде [5]

$$g_s(\xi) = c_{1s} F\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{1}{2}; \xi\right) + c_{2s}\sqrt{\xi} F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \xi\right) \tag{16}$$

и периодическое по φ, если $s = 0, 1, \ldots$, где c_{1s}, c_{2s} — произвольные независимые постоянные, а $F(\alpha, \beta, \gamma; \xi)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Таким образом, из (11), (16) следует, что общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\upsilon^k_{n,\mu}(\rho, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} J_s\left(\sqrt{-\mu}\rho\right) \times$$

$$\times \cos^l \varphi \left[c_{1s} F\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) + c_{2s} \sin \varphi F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sin^2 \varphi\right)\right]. \tag{17}$$

Поскольку $\left|\upsilon^k_{n,\mu}\left(\rho,\, \frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty$, из (17) имеем

$$c_{1s} F\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{1}{2}; 1\right) + c_{2s} F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1\right) = 0,$$

или

$$c_{2s} = -\frac{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)} c_{1s}, \tag{18}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Подставляя (18) в (17), получаем

$$\upsilon^k_{n,\mu}(\rho,\, \varphi) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{1s} J_s(\sqrt{-\mu}\rho) \cos^l \varphi \left[F\left(\alpha,\, \beta,\, \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta\right)} \sin \varphi F\left(\alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sin^2 \varphi\right)\right]. \tag{19}$$

Подчинив функцию (19) условию (14), получим $c_{1s} = 0$, $s = 0, 1 \ldots$, и, значит, $\upsilon^k_{n,\mu}(\rho, \varphi) \equiv 0$, если $\mu \neq -\gamma_s^2$.

Таким образом, решением задачи (7), (8) в области D^+ является функция

$$u_\mu(r, \theta, t) = \begin{cases} 0, \quad \mu \neq -\gamma_s^2, \quad s = 0, 1, \ldots, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=p}^{\infty} n^{-l} J_s\left(\sqrt{-\mu(r^2+t^2)}\right) (r^2+t^2)^{n/2+(m-3)/4} r^{2-m-n} \times \end{cases}$$

$$\times \left[F\left(-\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} + \frac{s}{2},\, -\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} - \frac{s}{2},\, \frac{1}{2};\, \frac{t^2}{r^2+t^2}\right) - \right.$$

$$-\frac{2\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}+\dfrac{m-3}{4}-\dfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}+\dfrac{m-3}{4}+\dfrac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{m-3}{4}-\dfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{m-3}{4}+\dfrac{s}{2}\right)}t(r^2+t^2)^{-1/2}\times$$

$$\times F\left(-\frac{n}{2}+\frac{5-m}{4}+\frac{s}{2},\, -\frac{n}{2}+\frac{5-m}{4}-\frac{s}{2},\, \frac{3}{2};\, \frac{t^2}{r^2+t^2}\right)\Bigg]Y^k_{n,m}(\theta), \quad \mu=-\gamma_s^2. \tag{20}$$

Из (20) при $t\to+0$ имеем

$$u_\mu(r,\theta,t)=\tau_\mu(r,\theta)=\begin{cases}0, & \mu\neq-\gamma_s^2,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=p}^{\infty}n^{-l}J_s(\sqrt{-\mu}r)Y^k_{n,m}(\theta), & \mu=-\gamma_s^2.\end{cases} \tag{21}$$

Учитывая формулы $[9,10]$

$$2J_s'(z)=J_{s-1}(z)-J_{s+1}(z),$$

$$\frac{d^q}{dz^q}F(a,b,c;z)=\frac{(a)_q(b)_q}{(c)_q}F(a+q,\,b+q,\,c+q;\,z), \quad q=0,1\ldots,$$

$$(a)_q=\frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)}, \qquad \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)}=z^{\alpha-\beta}\left[1+\frac{1}{2z}(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+O(z^{-2})\right],$$

а также оценки $[9,7]$

$$|J_s(z)|\leq\frac{1}{\Gamma(s+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^s,$$

$$|k_n|\leq c_1n^{m-2}, \qquad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y^k_{n,m}(\theta)\right|\leq c_1n^{m/2-1+q}, \quad j=\overline{1,\,m-1}, \quad q=0,1\ldots,$$

нетрудно показать, что если $p\geq\dfrac{m+1}{2}$ и $l>\dfrac{3m+8}{2}$, то решение (20) $u(r,\theta,t)$ принадлежит $C(\bar{D}^+)\cap C^2(D^+)$, и при этом в силу лемм 1 и 2 $\tau_\mu(r,\theta)=r\ \ \tau^*_\mu(r,\theta)$, $\tau^*_\mu(r,\theta)\in W^l_2(S)$, $l>\dfrac{3m+8}{2}$.

Следовательно, задача (1), (2) сводится к задаче Дарбу в области D^- для уравнения

$$\Delta_xu-u_{tt}=\mu u \tag{22}$$

с условиями $u\big|_S=\tau_\mu(r,\theta)$, $u\big|_{S_0}=0$, имеющего для любого μ бесчисленное множество нетривиальных решений [11].

Таким образом, теорема 1 доказана.

В свою очередь, задача (1), (3) сводится к задаче Дарбу в области D^- для уравнения (22) с условиями $u\big|_S=\tau_\mu(r,\theta)$, $u\big|_{S_1}=0$, которая однозначно разрешима [11].

Теперь из представления (21) функций $\tau_\mu(r,\theta)$ следует справедливость теоремы 2.

1. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 150 с.
2. *Кальменов Т. Ш.* О регулярных краевых задачах и их спектре для уравнений гиперболического и смешанного типа: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – М., 1982.
3. *Пономарев С. М.* К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Докл. АН СССР. – 1977. – **223**. – С. 39 – 40.
4. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – Ташкент: Фан, 1977. – 165 с.
5. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 11. – С. 1977 – 1984.
6. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
7. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – **2**. – 295 с.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – **1**. – 294 с.
11. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. – Орал: ЗКАТУ, 2007. – 139 с.

Получено 29.11.10