УДК 517.98 + 519.21

У. А. Розиков, У. У. Жамилов

(Ин-т математики и информ. технологий АН Узбекистана, Ташкент)

ВОЛЬТЕРРОВСКИЕ КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ДВУПОЛОЙ ПОПУЛЯЦИИ*

We introduce the notion of Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population. The description of the fixed points of Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population is reduced to the description of the fixed points of Volterra-type operators. Several Lyapunov functions are constructed for the Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population. By using these functions, we obtain an upper bound for the ω-limit set of trajectories. It is shown that the set of all Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population is a convex compact set, and the extreme points of this set are found. Volterra quadratic stochastic operators of a bisexual population that have a 2-periodic orbit (trajectory) are constructed.

Уведено поняття вольтеррівського квадратичного стохастичного оператора двополої популяції (ВКСОДП). Опис нерухомих точок ВКСОДП зведено до опису нерухомих точок операторів вольтеррівського типу. Побудовано кілька функцій Ляпунова для ВКСОДП. З використанням цих функцій отримано оцінку зверху для ω-граничної множини траєкторій. Показано, що множина всіх ВКСОДП є опуклим компактом, і знайдено крайні точки цієї множини. Побудовано ВКСОДП, що мають періодичну орбіту (траєкторію) з періодом 2.

1. Введение. Понятие квадратичных стохастических операторов было сформулировано С. Н. Бернштейном [1]. Теория квадратичных стохастических операторов развивалась в течение более 85 лет, и было опубликовано много работ (см., например, [1 – 13]). В последние годы возрос интерес к данной теории в связи с многочисленными применениями к задачам математики, биологии и физики.

Квадратичный стохастический оператор (КСО) свободной популяции имеет следующий смысл. Предположим, что свободная популяция состоит из m элементов. Множество

$$S^{m-1}=\left\{x=(x_1,\ldots,x_m)\in R^m\colon x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^m x_i=1\right\} \tag{1}$$

называется $(m-1)$-мерным симплексом.

КСО, отображающий симплекс $V\colon S^{m-1}\to S^{m-1}$ в себя, имеет вид

$$V\colon x'_k=\sum_{i,j=1}^m p_{ij,k}x_ix_j,\quad k=1,\ldots,m, \tag{2}$$

где $p_{ij,k}$ — коэффициент наследственности и

$$p_{ij,k}\geq 0,\qquad \sum_{k=1}^m p_{ij,k}=1,\quad i,j,k=1,\ldots,m. \tag{3}$$

Траектория $\{x^{(n)}\}$, $n=0,1,2,\ldots$, для $x^{(0)}\in S^{m-1}$ под действием КСО (2) определяется следующим образом: $x^{(n+1)}=V(x^{(n)})$, $n=0,1,2,\ldots$.

Одна из основных задач для данного оператора в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. Эта проблема была

*Частично поддержана грантом Research grant – Maths/ASI/ – UNESCO FR:3240230333, TWAS, Триест, Италия.

полностью решена для вольтерровских КСО (см. [2–5]), которые определяются равенствами (2), (3) и дополнительным предположением

$$p_{ij,k} = 0, \quad \text{если} \quad k \notin \{i, j\}. \tag{4}$$

С использованием теории функций Ляпунова и турниров теория КСО (2)–(4) получила дальнейшее развитие (см. [2–5]). В настоящей работе мы рассматриваем КСО двуполой популяции.

Опишем кратко структуру статьи. В п. 2 дано определение КСО двуполой популяции и определено ВКСОДП. Описан канонический вид произвольного ВКСОДП. Изучению множества неподвижных точек ВКСОДП посвящен п. 3. Доказывается, что множество неподвижных точек ВКСОДП совпадает с множеством неподвижных точек операторов вольтрерровского типа (см. [5]). В пункте 4 изучены функции Ляпунова для ВКСОДП. В п. 5 описаны крайние точки множества ВКСОДП и показано, что такие операторы могут иметь периодическую орбиту с периодом 2.

2. Определения.

Определение 1 [6]. *Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — множество женских типов, $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_\nu\}$ — мужских. Число $n + \nu$ называется размерностью популяции. Состоянием популяции называется пара распределений вероятностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ на множествах соответственно $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$:*

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1; \qquad y_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} y_k = 1. \tag{5}$$

Пространством состояний данной популяции является $S^{n-1} \times S^{\nu-1}$ — декартово произведение $(n-1)$-мерного симплекса S^{n-1} на $(\nu - 1)$-мерный симплекс $S^{\nu-1}$. Дифференциация популяции называется наследственной, если при любом состоянии (x, y) в поколении G однозначно определено состояние (x', y'), возникающее в следующем поколении G' путем скрещиваний и отбора.

Отображение $W : S^{n-1} \times S^{\nu-1} \to S^{n-1} \times S^{\nu-1}$, определяемое равенством

$$(x', y') = W(x, y), \qquad (x, y) \in S^{n-1} \times S^{\nu-1}, \tag{6}$$

называется эволюционным оператором. В координатах оно превращается в систему равенств

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_\nu), \quad 1 \leq i \leq n, \\ y'_k &= g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_\nu), \quad 1 \leq k \leq \nu, \end{aligned} \tag{7}$$

которые также называются эволюционными. Отображение (6) при любом начальном состоянии (x^0, y^0) однозначно определяет траекторию

$$\{(x^{(t)}, y^{(t)})\}_{t=0}^{\infty} \colon (x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) =$$

$$= W((x^{(t)}, y^{(t)})) = W^{(t+1)}((x^{(0)}, y^{(0)})), \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Множество предельных точек траектории, начинающейся в точке (x^0, y^0), называется ее предельным множеством и обозначается через $\omega(x^0, y^0)$. Выведем эволюционные уравнения двуполой популяции. Исходными данными для этого являются коэффициенты наследственности $p^{(f)}_{ik,j}, p^{(m)}_{ik,l}$. Величина $p^{(f)}_{ik,j}$ определяется как вероятность рождения потомка женского типа F_j, $1 \le j \le n$, у матери типа F_i, $1 \le i \le n$, и отца типа M_k, $1 \le k \le \nu$. Аналогично определяется $p^{(m)}_{ik,l}$, $1 \le i \le n$, $1 \le k$, $l \le \nu$. Очевидно,

$$\begin{aligned} &p^{(f)}_{ik,j} \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} p^{(f)}_{ik,j} = 1, \\ &p^{(m)}_{ik,l} \ge 0, \qquad \sum_{l=1}^{\nu} p^{(m)}_{ik,l} = 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Коэффициенты наследственности суммарно учитывают, например, такие факторы, как рекомбинационный процесс, отбор гамет, мутации, дифференциальная рождаемость.

Пусть (x, y) — состояние в поколении G. В следующем поколении G' в момент его зарождения вероятности типов находятся по формуле полной вероятности:

$$W\colon \begin{cases} x'_j = \sum_{i,k=1}^{n,\nu} p^{(f)}_{ik,j} x_i y_k, & 1 \le j \le n, \\ y'_l = \sum_{i,k=1}^{n,\nu} p^{(m)}_{ik,l} x_i y_k, & 1 \le l \le \nu. \end{cases} \tag{10}$$

Определение 2. *Эволюционный оператор* (10) *назовем вольтерровским квадратичным стохастическим оператором двуполой популяции* (ВКСОДП), *если коэффициенты наследственности* (9) *удовлетворяют условию*

$$\begin{aligned} &p^{(f)}_{ik,j} = 0, \quad \text{если} \quad j \notin \{i, k\} \quad 1 \le i, \quad j \le n, \quad 1 \le k \le \nu, \\ &p^{(m)}_{ik,l} = 0, \quad \text{если} \quad l \notin \{i, k\} \quad 1 \le i \le n, \quad 1 \le k, \quad l \le \nu. \end{aligned} \tag{11}$$

Для определенности предположим, что $n \le \nu$. Тогда легко видеть, что произвольный ВКСОДП имеет вид

$$W\colon \begin{cases} x'_j = x_j \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{\nu} (p^{(f)}_{jk,j} - 1) y_k\right) + y_j \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} p^{(f)}_{kj,j} x_k\right), & 1 \le j \le n, \\ y'_l = y_l \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne l}}^{n} (p^{(m)}_{kl,l} - 1) x_k\right) + x_l \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \ne l}}^{\nu} p^{(m)}_{lk,l} y_k\right), & 1 \le l \le n, \\ y'_l = y_l \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne l}}^{n} (p^{(m)}_{kl,l} - 1) x_k\right), & n < l \le \nu. \end{cases} \tag{12}$$

3. Множество неподвижных точек. Множество $\mathrm{Fix}(W)$ — неподвижные точки ВКСОДП. Неподвижные точки оператора W являются решениями уравнения $W((x, y)) = (x, y)$, т. е.

$$x_j = x_j \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{\nu} (p^{(f)}_{jk,j} - 1) y_k\right) + y_j \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{n} p^{(f)}_{kj,j} x_k\right), \quad 1 \le j \le n,$$

$$y_l = y_l\left(1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(p_{kl,l}^{(m)} - 1)x_k\right) + x_l\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\nu} p_{lk,l}^{(m)} y_k\right), \quad 1 \le l \le n, \tag{13}$$

$$y_l = y_l\left(1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{n}(p_{kl,l}^{(m)} - 1)x_k\right), \quad n < l \le \nu.$$

В системе уравнений (13) в первых $n-1$ уравнениях x_n заменим на $x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ и получим

$$\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu}(1 - p_{jk,j}^{(f)})y_k + y_j p_{nj,j}^{(f)}\right]x_j +$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}\left(p_{nj,j}^{(f)} - p_{kj,j}^{(f)}\right) y_j x_k = y_j p_{nj,j}^{(f)}, \qquad 1 \le j \le n-1. \tag{14}$$

Из системы линейных уравнений (относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) (14) по методу Крамера находим неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Обозначим через $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ матрицу, состоящую из коффициентов системы (14), и через $C^s = (c_{ij}^{(s)})_{s=1}^{n-1}$ матрицу, полученную из матрицы C с помощью замены s-го столбца столбцом свободных членов, где

$$c_{ij} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu}(1 - p_{jk,j}^{(f)})y_k + y_j p_{nj,j}^{(f)}, & \text{если} \quad i = j, \\ y_j(p_{nj,j}^{(f)} - p_{ij,j}^{(f)}), & \text{если} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{15}$$

$$c_{ij}^{(s)} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если} \quad j \neq s, \\ y_j p_{nj,j}^{(f)}, & \text{если} \quad j = s, \quad 1 \le i, \quad j \le n-1, \end{cases} \tag{16}$$

а определители обозначим через $\triangle = \det(C)$, $\triangle_s = \det(C^s)$.

Из (15), (16) следует, что в каждом элементе s — строке определителя $\triangle_s$ — содержится множитель y_s. Тогда детерминант $\triangle_s$ можно записать в виде $\triangle_s = y_s\overline{\triangle}_s$, где $\overline{\triangle}_s = \det(\overline{C}^{(s)})$, $\overline{C}^{(s)} = (\overline{c}_{ij}^{(s)})$ и

$$\overline{c}_{ij}^{(s)} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если} \quad j \neq s, \\ p_{nj,j}^{(f)}, & \text{если} \quad j = s, \quad 1 \le i, \quad j \le n-1. \end{cases}$$

Следовательно, если $\triangle \neq 0$, решение системы (14) единственно и имеет вид

$$x_s = \frac{\triangle_s}{\triangle} = y_s\frac{\overline{\triangle}_s}{\triangle}, \quad 1 \le s \le n-1. \tag{17}$$

Используя (17), из (13) получаем

$$y_l = y_l \left[1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) y_k \frac{\overline{\triangle}_k}{\triangle} + \frac{\overline{\triangle}_l}{\triangle} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\nu} p_{lk,l}^{(m)} y_k \right) \right]. \tag{18}$$

Обозначим

$$A_l(y_1, y_2, \ldots, y_\nu) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) y_k \frac{\overline{\triangle}_k}{\triangle} + \frac{\overline{\triangle}_l}{\triangle} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\nu} p_{lk,l}^{(m)} y_k \right), \quad 1 \leq l \leq \nu. \tag{19}$$

Тогда (18) принимает вид

$$y_l = y_l(1 + A_l(y)), \quad 1 \leq l \leq \nu. \tag{20}$$

Таким образом, задача описания неподвижных точек оператора W сводится к нахождению неподвижных точек оператора $V\colon S^{\nu-1} \to S^{\nu-1}$ с определенной правой частью (20), т. е.

$$V : y_l' = y_l(1 + A_l(y)), \quad l = 1, \ldots, \nu. \tag{21}$$

***Замечание* 1.** Вершины симплекса $S^{\nu-1}$ будут неподвижными точками оператора V, т. е. решениями системы уравнений (20).

Рассмотрим отображение $A = (A_1, \ldots, A_\nu)\colon S^{\nu-1} \to \mathbb{R}^\nu$, где A_i, $i = \overline{1, \nu}$, определены по формуле (19). Пусть $I = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ и $\alpha \subset I$ — произвольное подмножество. Множества

$$\Gamma_\alpha = \left\{ y \in S^{\nu-1} \colon y_k = 0, k \notin \alpha \right\}$$

называются гранями симплекса. Множество

$$\operatorname{int}(\Gamma_\alpha) = \left\{ y \in \Gamma_\alpha \colon y_k > 0, k \in \alpha \right\}$$

называется относительной внутренностью грани Γ_α.

Для векторов x, $y \in \mathbb{R}^\nu$ положим $x \succ_\alpha y$, если $x_i > y_i$ при $i \in \alpha$, и $x_i \geq y_i$ при $i \notin \alpha$. Если $\alpha = \varnothing$, то пишем $x \succeq y$ (см. [5]).

Теорема 1. 1°. *$A = (A_1, \ldots, A_\nu)\colon S^{\nu-1} \to \mathbb{R}^\nu$ непрерывно.*

2°. *$A(y) \succeq -\mathbb{I} = (-1, -1, \ldots, -1)$ для любого $y \in S^{\nu-1}$.*

3°. *$(A(y), y) = 0$ для каждого $y \in S^{\nu-1}$.*

4°. *Для любого $\alpha \subset I$ выполняется $A(y) \succ_\alpha -\mathbb{I}$ для любой $y \in \operatorname{int}(\Gamma_\alpha)$.*

Доказательство. 1°. Следует из того, что $\triangle \neq 0$.

2°. Для любого l, $1 \leq l \leq \nu$, и любого $y \in S^{\nu-1}$, учитывая (11) и (17), имеем

$$A_l(y) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} \left(p_{kl,l}^{(m)} - 1 \right) y_k \frac{\overline{\triangle}_k}{\triangle} + \frac{\overline{\triangle}_l}{\triangle} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\nu} p_{lk,l}^{(m)} y_k \right) \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) x_k \geq -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{n} x_k \geq -1.$$

3°. Используя (17) и (21), получаем

$$(A(y), y) = \sum_{l=1}^{\nu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) y_k \frac{\overline{\triangle}_k}{\triangle} + \frac{\overline{\triangle}_l}{\triangle} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{\nu} p_{lk,l}^{(m)} y_k \right) \right] y_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{\nu} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) x_k y_l + x_l \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{\nu} p_{lk,l}^{(m)} y_k \right) \right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{\nu} (y_l' - y_l) = \sum_{l=1}^{\nu} y_l' - \sum_{l=1}^{\nu} y_l = 0.$$

4°. Поскольку $\triangle \neq 0$ и $y \in \operatorname{int}(\Gamma_\alpha)$, из свойства 2^0 следует, что $A(y)_\alpha \succ -\mathbb{I}$ для каждого $y \in \operatorname{int}(\Gamma_\alpha)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекают такие следствия.

***Следствие* 1.** $|\mathrm{Fix}(W)| = |\mathrm{Fix}(V)|$, *где* $|\cdot|$ *обозначает число элементов множества.*

***Следствие* 2.** *Оператор* V (*см.* (21)) *является оператором вольтерровского типа.*

Такие операторы изучены в работе [5].

Определение 3. *Неподвижная точка* $x \in \mathrm{Fix}(W)$ *называется изолированной неподвижной точкой оператора* (12), *если существует такая окрестность точки* x, *в которой не существует неподвижных точек, кроме* x.

Поскольку W — непрерывный компактный оператор, по теореме Брауэра он имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку. Поэтому если $\triangle = 0$, то система (14) имеет бесконечное множество решений, причем некоторые из них не являются изолированными.

В главе 8 книги [6] найдены условия на коэффициенты оператора (2), при которых оператор (2) имеет только изолированные неподвижные точки. Однако для оператора (12) нет результатов, обеспечивающих изолированность неподвижных точек. Этой проблеме будет посвящена другая работа авторов.

4. Функции Ляпунова.

Определение 4. *Непрерывный функционал* $\varphi\colon S^{n-1} \times S^{\nu-1} \to \mathbb{R}$ *называется функцией Ляпунова, если для любой начальной точки* $(x^0, y^0) \in S^{n-1} \times S^{\nu-1}$ *существует* $\lim_{t\to\infty} \varphi(x^{(t)}, y^{(t)})$.

Ясно, что если $\lim_{t\to\infty} \varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) = C$, то $\omega(x^0, y^0) \subset \varphi^{-1}(C)$.

Через $\operatorname{int}(S^{n-1} \times S^{\nu-1})$ обозначим относительную внутренность симплекса $S^{n-1} \times S^{\nu-1}$.

Теорема 2. *Если* $n < \nu$, *то*:

i) $\varphi(x, y) = \prod_{j=n+1}^{\nu} y_j$ *является функцией Ляпунова;*

ii) *если* $p_{ij,k}^{(m)} \neq 1$ *при всех* $j = 1, \ldots, r$, $k = r+1, \ldots, n$, *то* $\varphi(x, y) = \prod_{j=n+1}^{\nu} y_j^{b_j}$ *является функцией Ляпунова, где* $(b_{n+1}, \ldots, b_\nu) \in S^{\nu-n-1}$, *более того,* $\sum_{t=0}^{\infty} \varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) < +\infty$;

iii) *если* $p_{ij,k}^{(m)} \neq 1$ *при всех* $j = 1, \ldots, r$, $k = r+1, \ldots, n$, *то* $\omega(x^0, y^0) \subset S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Доказательство. i) Из (12) и условия теоремы для функции $\varphi(x,y)$ имеем

$$\varphi(x',y') = \prod_{j=n+1}^{\nu} y'_j = \varphi(x,y) \prod_{j=n+1}^{\nu} \left(1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k\right). \tag{22}$$

Поскольку $0 \leq p_{kj,j}^{(m)} \leq 1$, то $-1 < \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k \leq 0$. Тогда из (22) находим

$$\varphi(x',y') \leq \varphi(x,y).$$

Следовательно, $\varphi(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) \leq \varphi(x^{(t)}, y^{(t)})$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, последовательность $\{\varphi(x^{(t)}, y^{(t)})\}_{t=0,1,\ldots}$ является убывающей и ограничена снизу и, следовательно, существует предел этой последовательности.

ii) Из (12) и условия теоремы для функции $\varphi(x,y)$ имеем

$$\varphi(x',y') = \prod_{j=n+1}^{\nu} (y'_j)^{b_j} = \varphi(x,y)\psi(x), \tag{23}$$

где

$$\psi(x) = \prod_{j=n+1}^{\nu} \left(1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k\right)^{b_j}.$$

Используя неравенство Юнга (см. [13])

$$a_{n+1}^{b_{n+1}} \ldots a_{\nu}^{b_\nu} \leq a_{n+1}b_{n+1} + \ldots + a_\nu b_\nu,$$

где $a_i > 0$ и $b_j \geq 0$, $\sum_{j=n+1}^{\nu} b_j = 1$, для $\psi(x)$ получаем

$$\psi(x) = \prod_{j=n+1}^{\nu} \left(1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k\right)^{b_j} \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\nu} \left(1 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k\right) b_j =$$

$$= \left(\sum_{j=n+1}^{\nu} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k b_j + \sum_{j=n+1}^{\nu} b_j\right). \tag{24}$$

Поскольку $\sum_{j=n+1}^{\nu} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1)x_k \leq 0$, из (24) следует

$$\psi(x) \leq \sum_{j=n+1}^{\nu} b_j = 1.$$

Из (23) и неравенства $\psi(x) \leq 1$ имеем

$$\varphi(x',y') \leq \varphi(x,y). \tag{25}$$

Следовательно, $\varphi(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) \leq \varphi(x^{(t)}, y^{(t)})$ для любого $t \geq 0$.

Из (24) получаем

$$\varphi(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) \leq \varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) \left(1 + \sum_{j=n+1}^{\nu} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} b_j (p_{kj,j}^{(m)} - 1) \right) x_k^{(t)} \right). \tag{26}$$

Введем обозначение $\delta = \max_{\substack{j=\overline{1,r} \\ k=\overline{r+1,n}}} \{p_{kj,j}^{(m)} - 1\} < 0$ и при условии $(x^0, y^0) \in \in \operatorname{int}(S^{n-1} \times S^{\nu-1})$ получим $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} x_k^{(t)} < 1$. Тогда из (26) следует

$$\varphi(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) \leq \varphi(x^{(t)}, y^{(t)})(1 + \delta) < (1 + \delta)^t \varphi(x^{(0)}, y^{(0)}). \tag{27}$$

Следовательно,

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) = 0 \tag{28}$$

и

$$\sum_{t=0}^{\infty} \varphi(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) \leq \varphi(x^{(0)}, y^{(0)}) \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \delta)^t < +\infty. \tag{29}$$

iii) Используя (12), (28) и $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1) x_k \leq 0$, находим

$$y'_j = y_j \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\nu} (p_{kj,j}^{(m)} - 1) x_k \right) \leq y_j, \quad n+1 \leq j \leq \nu.$$

Следовательно, $y_j^{(t+1)} \leq y_j^{(t)}$, $n+1 \leq j \leq \nu$, для любого $t \geq 0$ и $\lim_{t \to \infty} y_j^{(t)} = = \overline{y}_j \geq 0$.

При $b_j = 1$, $b_p = 0$, $p \neq j$, из (28) получаем $\overline{y}_j = 0$, $n+1 \leq j \leq \nu$, т. е. $\lim_{t \to \infty} y_j^{(t)} = 0$, $n+1 \leq j \leq \nu \Rightarrow \omega(x^0, y^0) \subset S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $n = \nu$ и $p_{jk,j}^{(f)} + p_{jk,j}^{(m)} < 1$, $p_{kj,j}^{(m)} + p_{kj,j}^{(f)} < 1$, при всех $j = \overline{1,r}$, $k = \overline{r+1,n}$, то для любого $r < n$ функция $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{r} (x_j + y_j)$ является функцией Ляпунова. Более того, $\sum_{t=0}^{\infty} \varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) < +\infty$.*

Доказательство. Используя канонический вид оператора (12), для $\varphi(W(x,y))$ получаем

$$\varphi(x', y') = \sum_{j=1}^{r} (x'_j + y'_j) = \varphi(x,y) + \psi(x,y), \tag{30}$$

где

$$\psi(x,y) = \sum_{j=1}^{r} \left[x_j \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (p_{jk,j}^{(f)} + p_{jk,j}^{(m)} - 1) y_k \right) + y_j \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (p_{kj,j}^{(m)} + p_{kj,j}^{(f)} - 1) x_k \right) \right]. \tag{31}$$

Запишем (31) в виде

$$\psi(x,y)=\sum_{j=1}^{r}\left[x_j\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}(p^{(f)}_{jk,j}-p^{(m)}_{jk,k})y_k\right)+y_j\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}(p^{(m)}_{kj,j}-p^{(f)}_{kj,k})x_k\right)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\left[x_j\left(\sum_{k=r+1}^{n}(p^{(f)}_{jk,j}-p^{(m)}_{jk,k})y_k\right)+y_j\left(\sum_{k=r+1}^{n}(p^{(m)}_{kj,j}-p^{(f)}_{kj,k})x_k\right)\right].$$

Первая сумма равна нулю, т. е.

$$\sum_{j=1}^{r}\left[x_j\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}(p^{(f)}_{jk,j}-p^{(m)}_{jk,k})y_k\right)+y_j\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}(p^{(m)}_{kj,j}-p^{(f)}_{kj,k})x_k\right)\right]=0.$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{r}\left[x_j\left(\sum_{k=1}^{r}(p^{(f)}_{jk,j}-p^{(m)}_{jk,k})y_k\right)+y_j\left(\sum_{k=1}^{r}(p^{(m)}_{kj,j}-p^{(f)}_{kj,k})x_k\right)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(f)}_{jk,j}x_jy_k-\sum_{j=1}^{r}x_jy_j-\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(f)}_{kj,k}x_jy_k+\sum_{j=1}^{r}x_jy_j+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(m)}_{kj,j}x_jy_k-\sum_{j=1}^{r}x_jy_j-\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(m)}_{jk,k}x_jy_k+\sum_{j=1}^{r}x_jy_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(f)}_{jk,j}x_jy_k-\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(f)}_{kj,k}x_jy_k+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(m)}_{kj,j}x_jy_k-\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}p^{(m)}_{jk,k}x_jy_k=0.$$

Тогда (31) принимает вид

$$\psi(x,y)=\sum_{j=1}^{r}\left[x_j\left(\sum_{k=r+1}^{n}(p^{(f)}_{jk,j}+p^{(m)}_{jk,j}-1)y_k\right)+\right.$$

$$\left.+y_j\left(\sum_{k=r+1}^{n}(p^{(m)}_{kj,j}+p^{(f)}_{kj,k}-1)x_k\right)\right]. \tag{32}$$

По условию теоремы $-1<\alpha=\min\limits_{\substack{j=\overline{1,r}\\k=\overline{r+1,n}}}\{p^{(f)}_{jk,j}+p^{(m)}_{jk,j}-1,p^{(m)}_{kj,j}+p^{(f)}_{kj,j}-1\}<0$, тогда из (32) получаем

$$\psi(x,y)\leq\alpha\sum_{j=1}^{r}\left[x_j\left(\sum_{k=r+1}^{n}y_k\right)+y_j\left(\sum_{k=r+1}^{n}x_k\right)\right]=$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{r} \left[x_j \left(1 - \sum_{k=1}^{r} y_k \right) + y_j \left(1 - \sum_{k=1}^{r} x_k \right) \right] =$$

$$= \alpha \left[\sum_{j=1}^{r} x_j \left(1 - \sum_{k=1}^{r} y_k \right) + \sum_{j=1}^{r} y_j \left(1 - \sum_{k=1}^{r} x_k \right) \right] =$$

$$= \alpha \left[\sum_{j=1}^{r} x_j + \sum_{j=1}^{r} y_j - \sum_{j=1}^{r} x_j \sum_{k=1}^{r} y_k - \sum_{j=1}^{r} y_j \sum_{k=1}^{r} x_k \right].$$

Следовательно,

$$\psi(x,y) \leq \alpha \left(\varphi(x,y) - 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} x_j y_k \right) \leq \alpha \varphi(x,y). \tag{33}$$

Из (30) и (33) находим

$$\varphi(x',y') \leq (1+\alpha)\varphi(x,y), \quad -1 < \alpha < 0. \tag{34}$$

Ясно, что $\psi(x,y) \leq 0$ и, следовательно, $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{r} (x_j + y_j)$ — функция Ляпунова для оператора (12).

Из (34) имеем

$$\varphi(x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) \leq (1+\alpha)\varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) \leq (1+\alpha)^t \varphi(x^{(0)}, y^{(0)}). \tag{35}$$

Поскольку $\varphi(x^{(0)}, y^{(0)}) < 2$ и $-1 < \alpha < 0$ для любого $(x^0, y^0) \in \mathrm{int}(S^{n-1} \times S^{\nu-1})$, из (35) следует, что $\varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) \to 0$, $t \to \infty$, и $\sum_{t=0}^{\infty} \varphi(x^{(t)}, y^{(t)}) < +\infty$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 вытекает такое следствие.

***Следствие* 3.** *$x_j^{(t)} \to 0$, $y_j^{(t)} \to 0$ при $t \to \infty$, $j = 1, \ldots, r$, и $\omega(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset \subset \Gamma_{n-r} \times \Gamma_{n-r}$.*

Теорема 4. *Если существуют $l \in \{n+1, \ldots, \nu\}$ и $q \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что $p_{kl,l}^{(m)} \leq p_{qk,q}^{(f)}$ для любого $k \in \{1, \ldots, \nu\}$, то*

$$\varphi(x,y) = \frac{y_l}{x_q}, \quad (x,y) \in \mathrm{int}(S^{n-1} \times S^{\nu-1})$$

является функцией Ляпунова. Более того, $\varphi(x,y)$ — монотонно убывающая функция вдоль любой траектории $\{x^{(t)}, y^{(t)}\}$, где $(x^0, y^0) \in \mathrm{int}(S^{n-1} \times S^{\nu-1})$ и $(x^0, y^0) \notin \notin \mathrm{Fix}(W)$.

Доказательство. Из (12) получаем

$$\varphi(x',y') = \frac{y_l \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\nu} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) x_k \right)}{x_q \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^{\nu} (p_{qk,q}^{(f)} - 1) y_k \right) + y_q \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^{n} p_{kq,q}^{(f)} x_k \right)} =$$

$$= \frac{y_l}{x_q} \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{\nu} (p_{kl,l}^{(m)} - 1) x_k}{1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^{\nu} (p_{qk,q}^{(f)} - 1) y_k + \dfrac{y_q}{x_q} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^{n} p_{kq,q}^{(f)} x_k \right)}. \tag{36}$$

Из условия теоремы следует, что

$$1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{\nu}(p^{(f)}_{qk,q}-1)y_k+\frac{y_q}{x_q}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{n}p^{(f)}_{kq,q}x_k\right)\geq 1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{\nu}\left(p^{(f)}_{qk,q}-1\right)y_k\geq y_q>0$$

и

$$\alpha=\max_{\substack{(x,y)\in\\ \operatorname{int}(S^{n-1}\times S^{\nu-1})}}\frac{1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\nu}\left(p^{(m)}_{kl,l}-1\right)x_k}{1+\sum_{\substack{k=1\\k\neq q}}^{\nu}\left(p^{(f)}_{qk,q}-1\right)y_k}\leq 1. \tag{37}$$

Тогда из (36) и (37) имеем

$$\varphi(x',y')<\alpha\varphi(x,y).$$

Следовательно, $\varphi(x^{(t+1)},y^{(t+1)})<\alpha\varphi(x^{(t)},y^{(t)})$, и это показывает, что $\varphi(x,y)$ — функция Ляпунова, причем монотонно убывающая.

Теорема доказана.

5. Множество всех ВКСОДП. Через $\mathcal{V}$ обозначим множество всех ВКСОДП, определенных на $S^{n-1}\times S^{\nu-1}$. Матрица $\mathbb{P}=\left((p^{(f)}_{ik,j}),(p^{(m)}_{ik,l})\right)$ (при условии (9)) оператора ВКСОДП определяется как точка в пространстве $R^{2\nu n-(n+\nu)}$.

Теорема 5. 1. *$\mathcal{V}$ — выпуклое компактное подмножество в $R^{2\nu n-(n+\nu)}$.*

2. *$\operatorname{Extr}(\mathcal{V})$ — множество крайних точек множества $\mathcal{V}$,*

$$\operatorname{Extr}(\mathcal{V})=\Big\{W\in\mathcal{V}\colon\ \mathbb{P}\text{— матрица оператора } W,\ \text{ состоящая только из } 0 \text{ и } 1\Big\}.$$

3. $|\operatorname{Extr}(\mathcal{V})|=2^{2n\nu-(n+\nu)}$.

Доказательство. 1. Пусть W_1,W_2 — два ВКСОДП, т. е. $W_1,W_2\in\mathcal{V}$. Покажем, что $W=\lambda W_1+(1-\lambda)W_2\in\mathcal{V}$ для любого $\lambda\in[0,1]$.

Пусть P — матрица оператора W_1 и Q — матрица оператора W_2, где

$$\begin{aligned}P&=\left((p^{(f)}_{ik,j}),(p^{(m)}_{ik,l})\right)=\left(P^{(f)},P^{(m)}\right),\\ Q&=\left((q^{(f)}_{ik,j}),(q^{(m)}_{ik,l})\right)=\left(Q^{(f)},Q^{(m)}\right),\qquad 1\leq i,j\leq n,\quad 1\leq k,l\leq\nu.\end{aligned}\tag{38}$$

Тогда матрица оператора W имеет вид

$$\mathbb{P}=\lambda P+(1-\lambda)Q. \tag{39}$$

По определению, элементы матриц P и Q удовлетворяют условию (11). С использованием (39) легко проверяется, что элементы матрицы $\mathbb{P}$ также удовлетворяют условию (11).

2. Предположим, что $W\in\mathcal{V}$ с матрицей $\mathbb{P}=\left(\widehat{p}_{ij,k}\right)$ и с условием $\widehat{p}^{(f)}_{i_0k_0,j_0}=\alpha$, $0<\alpha<1$, для некоторого i_0, k_0, j_0.

Построим два оператора, соответствующие матрицам $P^{(f)}=\left(p^{(f)}_{ik,j}\right)$, $Q^{(f)}=$ $=\left(q^{(f)}_{ik,j}\right)$, следующим образом:

$$p_{ik,j}^{(f)} = \begin{cases} \widehat{p}_{ik,j}^{(f)}, \text{если} \quad (i,k) \neq (i_0,k_0), \\ 1, \text{если} \ \ (i,k,j) = (i_0,k_0,j_0), \\ 0, \text{если} \quad (i,k,j) = (i_0,k_0,j), \quad j \neq j_0, \end{cases}$$

$$q_{ik,j}^{(f)} = \begin{cases} \widehat{p}_{ik,j}^{(f)}, \quad \text{если} \quad (i,k) \neq (i_0,k_0), \\ 0, \text{если} \ \ (i,k,j) = (i_0,k_0,j_0), \\ \dfrac{\widehat{p}_{ik,j}^{(f)}}{1-\alpha}, \text{если} \quad (i,k,j) = (i_0,k_0,j), \quad j \neq j_0. \end{cases}$$

Матрицы $P^{(m)} = Q^{(m)}$ произвольные, элементы которых удовлетворяют условию (11).

Тогда

$$\alpha p_{ik,j}^{(f)} + (1-\alpha) q_{ik,j}^{(f)} =$$

$$= \begin{cases} \widehat{p}_{ik,j}^{(f)}, \text{если} \ \ (i,k) \neq (i_0,k_0), \\ \alpha, \text{если} \ \ (i,k,j) = (i_0,k_0,j_0), \\ \widehat{p}_{ik,j}^{(f)}, \text{если} \ \ (i,k,j) = (i_0,k_0,j), \quad j \neq j_0, \end{cases} = \ \widehat{p}_{ik,j}^{(f)}, \tag{40}$$

$$1 \leq i, \quad j \leq n, \quad 1 \leq k \leq \nu.$$

Поскольку $\alpha > 0$, из (40) получаем

$$\widehat{p}_{ik,j}^{(f)} = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ p_{ik,j}^{(f)} = 0 \quad \text{и} \quad q_{ik,j}^{(f)} = 0. \tag{41}$$

Из (41) и из того, что W_1, W_2 — два ВКСОДП, следует, что $W = \alpha W_1 + (1 - \alpha) W_2$.

Таким образом, если $0 < p_{ik,j}^{(f)} < 1$, $0 < p_{ik,l}^{(m)} < 1$ для некоторого (i,k,j), (i,k,l), то W — не экстремальная точка множества $\mathcal{V}$.

Если $p_{ik,j}^{(f)} = 0, p_{ik,l}^{(m)} = 0$ или $p_{ik,j}^{(f)} = 1$, $p_{ik,l}^{(m)} = 1$ для любых (i,k,j), (i,k,l), то представление $W = \lambda W_1 + (1-\lambda) W_2$, $0 < \lambda < 1$, выполняется тогда и только тогда, когда $W = W_1 = W_2$.

3. Применяя пункты 1, 2 и условия (11), легко вычисляем $|\mathrm{Extr}(\mathcal{V})| = 2^{2n\nu - (\nu+n)}$.

Теорема доказана.

Теперь приведем пример крайних операторов.

***Пример* 1.** Пусть $n = \nu = 2$. В этом случае в силу пункта 3 теоремы 5 существуют 16 крайних ВКСОДП. Приведем полный список этих операторов:

$W_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 + x_2 y_1, x_2 y_2, x_1 + x_2 y_1, x_2 y_2)$,

$W_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 + x_2 y_1, x_2 y_2, x_1, x_2)$,

$W_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 + x_2 y_1, x_2 y_2, y_1, y_2)$,

$W_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 + x_2 y_1, x_2 y_2, x_1 y_1, x_2 y_1 + y_2)$,

$W_5(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 y_1, x_2 y_2)$,

$W_6(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_1, x_2)$,

$W_7(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$,

$W_8(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1,x_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2),$
$W_9(x_1,x_2,y_1,y_2)=(y_1,y_2,y_1+x_1y_2,x_2y_2),$
$W_{10}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(y_1,y_2,x_1,x_2),$
$W_{11}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(y_1,y_2,y_1,y_2),$
$W_{12}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(y_1,y_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2),$
$W_{13}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2,x_1+x_2y_1,x_2y_2),$
$W_{14}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_1+y_2,x_1,x_2),$
$W_{15}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_1+y_2,y_1,y_2),$
$W_{16}(x_1,x_2,y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_1+y_2,x_1y_1,x_2y_1+y_2).$

Введем обозначения $e_i=(\delta_{1i},\delta_{2i},\ldots,\delta_{ni})\in S^{n-1}$, $i=1,\ldots,n$, и $\widetilde{e}_j=(\delta_{1j},\delta_{2j},\ldots,\delta_{\nu j})\in S^{\nu-1}$, $j=1,\ldots,\nu$, — вершины симплексов, где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть $\eta_{ij}=(e_i,\widetilde{e}_j)$ — $(n+\nu)$-мерный вектор.

Теорема 6. 1. *Если $i=j$, $i,j=1,2,\ldots,\min\{n,\nu\}$, то η_{ij} — неподвижная точка для любого ВКСОДП.*

2. *Если $i\neq j$ $i,j=1,2,\ldots,\min\{n,\nu\}$, то существует оператор $W_{(ij)}\in\mathcal{V}$, для которого $\{\eta_{ij},\eta_{ji}\}$ образует периодическую орбиту периода два.*

Доказательство. 1. Поскольку произвольный вольтерровский КСО двуполой популяции имеет вид (12), утверждение 1 очевидно.

2. Пусть $i\neq j$. Тогда, используя (12), для системы уравнений

$$W(\eta_{ij})=\eta_{ji},$$

$$W(\eta_{ji})=\eta_{ij}$$

получаем

$$\begin{aligned}
x_j&=x_j(1+(p^{(f)}_{ji,j}-1)y_i)+y_jp^{(f)}_{ij,j}x_i,\\
x_i&=x_i(1+(p^{(f)}_{ij,i}-1)y_j)+y_ip^{(f)}_{ji,i}x_j,\\
y_i&=y_i(1+(p^{(m)}_{ji,i}-1)x_j)+x_ip^{(m)}_{ij,i}y_j,\\
y_j&=y_j(1+(p^{(m)}_{ij,j}-1)x_i)+x_jp^{(m)}_{ji,j}y_i.
\end{aligned}\tag{42}$$

Если

$$p^{(f)}_{ji,j}=p^{(m)}_{ji,j}=p^{(f)}_{ji,i}=p^{(m)}_{ji,i}=1\tag{43}$$

и остальные коэффициенты оператора (12) удовлетворяют условию (11), легко убедиться, что для соответствующего оператора $W_{(ij)}$ имеем $W_{(ij)}(W_{(ij)}(\eta_{ij}))=W_{(ij)}(\eta_{ji})=\eta_{ij}$.

Теорема доказана.

Приведем пример ВКСОДП, который имеет периодическую орбиту с периодом два.

Пример 2. Рассмотрим $n=\nu=2$ и $\eta_{12}=(1,0,0,1)$, $\eta_{21}=(0,1,1,0)$. Оператор $W\colon S^1\times S^1\to S^1\times S^1$ определим следующим образом:

$$W(x_1,x_2,y_1,y_2)=(y_1,y_2,x_1,x_2).\tag{44}$$

Легко видеть, что $W(W(\eta_{12})) = W(\eta_{21}) = \eta_{12}$, т. е. $\{\eta_{12}, \eta_{21}\}$ является периодической орбитой.

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследования // Уч. зап. Научно-исслед. каф. Укр. отд. мат. – 1924. – **1**. – С. 83 – 115.
2. *Ганиходжаев Р. Н.* Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры // Мат. сб. – 1992. – **83**, № 8. – С. 119 – 140.
3. *Ганиходжаев Р. Н.* Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Мат. заметки. – 1994. – **56**. – С. 1125 – 1131.
4. *Ганиходжаев Р. Н., Эшмаматова Д. Б.* Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказ. мат. журн. – 2006. – **8**. – С. 12 – 28.
5. *Ганиходжаев Р. Н., Сабуров М. Х.* Обобщенная модель нелинейных операторов вольтерровского типа и функции Ляпунова // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. – 2008. – **2**. – P. 188 – 196.
6. *Lyubich Yu. I.* Mathematical structures in population genetics // Biomathematics. – 1992. – **22**.
7. *Rozikov U. A., Shamsiddinov N. B.* On non-Volterra quadratic stochastic operators generated by a product measure // Stochast. Anal. and Appl. – 2009. – **27**, № 2. – P. 353 – 362.
8. *Розиков У. А., Жамилов У. У.* F-квадратичные стохастические операторы // Мат. заметки. – 2008. – **83**, № 4. – С. 606 – 612.
9. *Розиков У. А., Жамилов У. У.* О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 9. – С. 81 – 94.
10. *Rozikov U. A., Zada A.* On ℓ-Volterra quadratic stochastic operators // Dokl. Mat. – 2009. – **79**, № 1. – P. 32 – 34.
11. *Жамилов У. У.* Регулярность F-квадратичных стохастических операторов // Уз. мат. журн. – 2008. – № 2. – С. 35 – 45.
12. *Жамилов У. У., Мухитдинов Р. Т.* Условные квадратичные стохастические операторы // Уз. мат. журн. – 2010. – № 2. – С. 31 – 38.
13. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит. 1948.

Получено 17.11.10,
после доработки — 20.05.11