УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
О. М. Станжицький, І. Г. Новак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ВІДПОВІДНІСТЬ МІЖ РОЗВ'ЯЗКАМИ СТОХАСТИЧНИХ ТА ЗВИЧАЙНИХ РІВНЯНЬ

For a weakly nonlinear stochastic system, we construct a system of ordinary differential equations the behavior of solutions of which at infinity is similar to the behavior of solutions of the original stochastic system.

Для слабонелинейной стохастической системы построена система обыкновенных дифференциальных уравнений, поведение решений которой на бесконечности подобно поведению решений исходной стохастической системы.

1. Вступ. У даній роботі вивчається асимптотична поведінка на нескінченності розв'язків стохастичної системи Іто методами якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Основна ідея полягає в застосуванні до дослідження методу асимптотичної еквівалентності. Згідно з цим методом за вихідною нелінійною стохастичною системою будується лінійна система звичайних диференціальних рівнянь така, що кожному розв'язку стохастичної системи можна поставити у відповідність такий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (взагалі кажучи, з випадковими початковими даними), що в певних імовірнісних сенсах їх різниця прямує до нуля при $t \to \infty$.

Для звичайних диференціальних рівнянь даний підхід є добре відомим. Перші результати в цьому напрямку були отримані Вітнером [1], Левінсоном [2], Якубовичем [3]. Після піонерських робіт цих авторів проблеми асимптотичної еквівалентності диференціальних рівнянь, включаючи лінійні, нелінійні та функціональні рівняння, вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [4, 6] та наведену в них бібліографію).

На думку авторів, даний підхід до вивчення стохастичних систем також заслуговує на увагу.

Питанням дослідження асимптотичної поведінки стохастичних систем шляхом порівняння з детермінованими присвячено порівняно мало робіт (див., наприклад, [6, 9, 10]).

У даній роботі узагальнено результати роботи [11] та монографії [12], в яких отримано умови асимптотичної відповідності лінійної стохастичної системи і системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли детермінована система є системою зі сталими коефіцієнтами і всі її розв'язки обмежені на півосі $t \geq 0$.

Ми розглянемо більш загальну ситуацію, а саме, коли лінійна детермінована система є системою зі змінними коефіцієнтами і може допускати і необмежені на півосі розв'язки. Більш того, покажемо, що в лінійному випадку можна побудувати відповідність між системами, при якій нетривіальним розв'язкам стохастичної системи відповідають нетривіальні розв'язки детермінованої системи.

Робота складається зі вступу і трьох пунктів. У першому пункті вивчаються умови асимптотичної відповідності слабконелінійної стохастичної системи і лі-

© А. М. САМОЙЛЕНКО, О. М. СТАНЖИЦЬКИЙ, І. Г. НОВАК, 2011

нійної системи звичайних диференціальних рівнянь у припущенні, що остання є експоненціально дихотомічною на осі.

У другому пункті розглянуто лінійний випадок стохастичної системи. Тут побудовано відповідність, яка кожному нетривіальному розв'язку стохастичної системи ставить у відповідність нетривіальний розв'язок детермінованої системи.

Третій пункт присвячено застосуванню отриманих результатів.

2. Слабконелінійний випадок. Розглянемо систему стохастичних рівнянь Іто вигляду

$$dy = (A(t)y + f(t,y))dt + \sigma(t,y)dW(t) \tag{1}$$

і систему лінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$dx = A(t)xdt. \tag{2}$$

Означення. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи* (1) *можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи* (2) *такий, що*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

то систему (2) *назвемо асимптотично відповідною до системи* (1) *у середньому квадратичному. Якщо ж кожному розв'язку $y(t)$ системи* (1) *можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи* (2) *такий, що з імовірністю* 1

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0,$$

то систему (2) *назвемо асимптотично відповідною до системи* (1) *з імовірністю* 1.

У подальшому будемо вважати, що виконуються наступні умови. Матриця $A(t)$ є неперервною й обмеженою при $t \in \mathbf{R^1}$. Позначимо

$$a := \sup_{t\in\mathbf{R^1}} \|A(t)\|,$$

де $\|A(t)\|$ — норма матриці.

Відносно функцій $f(t,y)$ і $\sigma(t,y)$ будемо вважати, що вони неперервні за сукупністю змінних при $t \geq 0, y \in \mathbf{R^n}$ і задовольняють за змінною y глобальну умову Ліпшиця, $W(t)$ — стандартний скалярний вінерівський процес, визначений при $t \geq 0$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbf{P})$, $\{F_t, t \geq 0\}$ — фільтрація, відносно якої узгоджено процес $W(t)$.

Відомо (див., наприклад, [13, с. 107]), що за вказаних вище умов на функції A, f та σ система стохастичних рівнянь (1) має потраєкторно єдиний розв'язок $y(t) = y(t,\omega)$ з початковою умовою $y(t_0) = y_0$, де y_0 — випадкова величина, що є F_{t_0}-вимірною, і $\mathbf{E}|y_0|^2 < \infty$. Даний розв'язок визначено при $t \geq t_0$.

Нехай функції f і σ задовольняють умови: існують невід'ємні неперервні при $t \geq 0$ функції $\eta(t)$ та $\rho(t)$ такі, що для всіх $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R^n}$

$$|f(t,x)| \leq \eta(t)|x|, \tag{3}$$

$$|\sigma(t,x)| \leq \rho(t)|x|. \tag{4}$$

Позначимо через $X(t,\tau)$ матрицант системи (2), тобто фундаментальну систему її розв'язків, $X(\tau,\tau) = E$ — одинична матриця. Покладемо $X(t) := X(t,0)$.

Нехай система (2) експоненціально дихотомічна на $\mathbf{R^1}$, тобто існують два доповнюючих проектори P_1, P_2, а також додатні сталі N_1, N_2, ν_1, ν_2 такі, що виконуються нерівності

$$\|X(t)P_1X^{-1}(s)\| \leq N_1 e^{-\nu_1(t-s)}, \quad t \geq s, \tag{5}$$

$$\|X(t)P_2X^{-1}(s)\| \leq N_2 e^{-\nu_2(s-t)}, \quad s \geq t. \tag{6}$$

Позначимо

$$X_1(t,s) := X(t)P_1X^{-1}(s),$$

$$X_2(t,s) := X(t)P_2X^{-1}(s).$$

З інтегрального зображення матриці $X(t,\tau)$ та леми Гронуолла – Беллмана для його норми отримуємо оцінку при будь-яких $t,\tau \in \mathbf{R^1}$:

$$\|X(t,\tau)\| \leq e^{a|t-\tau|}. \tag{7}$$

Відомо також, що матрицант $X(t,\tau)$ та матриці $X_i(t,\tau)$, $i = 1,2$, задовольняють еволюційну властивість для $t,\tau \in \mathbf{R^1}$:

$$X(t,\tau) = X(t,s)X(s,\tau),$$

$$X_i(t,\tau) = X_i(t,s)X_i(s,\tau).$$

У подальшому нам знадобиться оцінка другого моменту розв'язку системи (1).

Має місце наступна лема.

Лема 1. *Нехай відносно функцій $A(t)$, $f(t,x)$ та $\sigma(t,x)$ виконуються наведені вище умови, а також*

$$a_1 := \int_0^\infty \eta(t)dt < \infty, \tag{8}$$

$$a_2 := \int_0^\infty \rho^2(t)dt < \infty. \tag{9}$$

Тоді існує стала $a_3 > 0$ така, що для довільного розв'язку $y(t)$ системи (1) *при $t \geq t_0$ справджується оцінка*

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 \leq a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2 e^{2a(t-t_0)}. \tag{10}$$

Доведення. Неважко бачити, що $y(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$y(t) = X(t,t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t X(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t X(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau). \tag{11}$$

Звідси отримуємо

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 < 3\|X(t,t_0)\|^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2 + 3\mathbf{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} |X(t,\tau)f(\tau,y(\tau))|d\tau\right)^2 +$$

$$+3\int\limits_{t_0}^{t} \|X(t,\tau)\|^2\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le 3e^{2a(t-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2 + 3\int\limits_{t_0}^{t}\eta(\tau)d\tau\int\limits_{t_0}^{t} e^{2a(t-\tau)}\eta(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+3\int\limits_{t_0}^{t} e^{2a(t-\tau)}\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le 3e^{2a(t-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2 + 3\int\limits_{t_0}^{t} e^{2a(t-\tau)}(a_1\eta(\tau)+\rho^2(\tau))\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Отже,

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 \le 3e^{2a(t-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2 + 3\int\limits_{t_0}^{t} e^{2a(t-\tau)}(a_1\eta(\tau)+\rho^2(\tau))\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Домножаючи останню нерівність на $e^{-2a(t-t_0)}$, маємо

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 e^{-2a(t-t_0)} \le 3\mathbf{E}|y(t_0)|^2 + 3\int\limits_{t_0}^{t} e^{-2a(\tau-t_0)}(a_1\eta(\tau)+\rho^2(\tau))\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau.$$

Звідси і з нерівності Гроноулла – Беллмана отримуємо

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 e^{-2a(t-t_0)} \le 3\mathbf{E}|y(t_0)|^2 e^{3\int_{t_0}^{t}(a_1\eta(\tau)+\rho^2(\tau))d\tau},$$

або

$$\mathbf{E}|y(t)|^2 \le 3\mathbf{E}|y(t_0)|^2 e^{3a_1^2+3a_2} e^{2a(t-t_0)},$$

що і є потрібною оцінкою зі сталою $a_3 = 3e^{3a_1^2+3a_2}$.

Лему доведено.

Далі будемо використовувати невласний стохастичний інтеграл вигляду

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} f(t)dw(t) \tag{12}$$

від F_t-вимірного процесу. Даний інтеграл будемо розуміти як середньоквадратичну границю власних стохастичних інтегралів:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} f(t)dw(t) = \lim_{A\to\infty}\int\limits_{t_0}^{A} f(t)dw(t).$$

Відносно існування використовуваних у подальшому властивостей таких інтегралів справедливою є наступна лема.

Лема 2. *Якщо для F_t-вимірного випадкового процесу $f(t)$ виконано умову $\int_0^\infty \mathbf{E}|f(t)|^2 dt < \infty$, то стохастичний інтеграл* (12) *існує і має властивості*:

1) *для будь-якого* $t_1 > t_0$ $\int_{t_0}^\infty f(t)dw(t) = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dw(t) + \int_{t_1}^\infty f(t)dw(t)$;

2) $\mathbf{E}\int_{t_0}^\infty f(t)dw(t) = 0$;

3) $\mathbf{E}\left|\int_{t_0}^\infty f(t)dw(t)\right|^2 = \int_{t_0}^\infty \mathbf{E}|f(t)|^2 dt.$

Доведення. Існування інтеграла випливає з того, що в умовах леми для довільної послідовності $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, послідовність $\int_{t_0}^{a_n} f(t)dw(t)$ фундаментальна в середньому квадратичному. Властивості $1-3$ отримуються граничним переходом у відповідних властивостях звичайних стохастичних інтегралів (див. також [14, с. 259]).

Теорема 1. *Нехай функція $A(t)$ є неперервною і обмеженою при $t \in \mathbf{R^1}$, функції $f(t,x)$ і $\sigma(t,x)$ неперервні за сукупністю змінних при $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R^n}$ і задовольняють за змінною x глобальну умову Ліпшиця та умови* (3) *і* (4), *система* (2) *експоненціально дихотомічна на осі, а також*

$$a_4 := \int_0^\infty e^{2at}\eta^2(t)dt < \infty, \tag{13}$$

$$a_5 := \int_0^\infty e^{2at}\rho^2(t)dt < \infty. \tag{14}$$

Тоді система (2) *асимптотично відповідна в середньому квадратичному до системи* (1).

Доведення. Насамперед зазначимо, що з умов (13) і (14) випливають умови (8), (9), а тому справджується оцінка (10). Далі, оскільки

$$X(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau) = X(t)(P_1 + P_2)X^{-1}(\tau) =$$
$$= X(t)P_1X^{-1}(\tau) + X(t)P_2X^{-1}(\tau) = X_1(t,\tau) + X_2(t,\tau),$$

то (11) можна записати у вигляді

$$y(t) = X(t,t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^t X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^t X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau) + \int_{t_0}^t X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau),$$

або

$$y(t) = X(t,t_0)y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau) -$$

$$- \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau - \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau).$$

Враховуючи, що $X_2(t,\tau) = X(t,t_0)X_2(t_0,\tau)$, маємо

$$y(t) = X(t,t_0)\left[y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right] +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau) -$$

$$- \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau - \int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau). \qquad (15)$$

Тепер кожному розв'язку $y(t)$ системи (1), що починається у момент часу t_0, поставимо у відповідність такий розв'язок $x(t)$ системи (2), що

$$x(t_0) = y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau). \qquad (16)$$

Перевіримо збіжність у середньому квадратичному інтегралів у (15). Справді з (6), (8), (10), (13) та нерівності Коші – Буняковського отримуємо

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 \le \mathbf{E}\left(\int\limits_{t_0}^{\infty} \|X_2(t_0,\tau)\|\eta(\tau)|y(\tau)|d\tau\right)^2 \le$$

$$\le \int\limits_{t_0}^{\infty} \|X_2(t_0,\tau)\|d\tau \int\limits_{t_0}^{\infty} \eta^2(\tau)\|X_2(t_0,\tau)\|\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le a_3N_2^2 \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\nu_2(\tau-t_0)}d\tau \int\limits_{t_0}^{\infty} \eta^2(\tau)e^{-\nu_2(\tau-t_0)}e^{2a(\tau-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{a_3N_2^2}{\nu_2}\mathbf{E}|y(t_0)|^2 \int\limits_{t_0}^{\infty} \eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau < \infty.$$

Для другого інтеграла в (15) маємо оцінку

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 \leq \int\limits_{t_0}^{\infty} N_2^2 e^{-2\nu_2(\tau-t_0)}\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq a_3 N_2^2 \mathbf{E}|y(t_0)|^2 \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-2\nu_2(\tau-t_0)}\rho^2(\tau)e^{2a(\tau-t_0)}d\tau \leq$$

$$\leq a_3 N_2^2 \mathbf{E}|y(t_0)|^2 \int\limits_{t_0}^{\infty} \rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau < \infty.$$

Останні два доданки в (15) оцінюються аналогічно. Покажемо тепер, що для відповідних розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ має місце граничне співвідношення

$$\mathbf{E}|x(t)-y(t)|^2 \to 0, \quad t \to \infty. \tag{17}$$

Оскільки розв'язок системи (2) має вигляд $x(t) = X(t,t_0)x(t_0)$, то з (15) і (16) одержуємо

$$\mathbf{E}|x(t)-y(t)|^2 \leq 4\left(\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 + \right.$$

$$+\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 + \mathbf{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 +$$

$$\left. +\mathbf{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2\right). \tag{18}$$

Оцінимо у (18) кожен із доданків. Маємо

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 \leq \mathbf{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t,\tau)\|\eta(\tau)|y(\tau)|d\tau\right)^2 \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} \|X_1(t,\tau)\|d\tau \int\limits_{t_0}^{t} N_1 e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq N_1^2 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\nu_1(t-\tau)}d\tau \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \frac{N_1^2}{\nu_1} a_3 \mathbf{E}|y(t_0)|^2 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau. \tag{19}$$

Але при $t \geq 2t_0$ отримуємо

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau = \int\limits_{t_0}^{t/2} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau +$$

$$+\int\limits_{t/2}^{t} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau \le e^{-\frac{\nu_1 t}{2}}\int\limits_{t_0}^{t/2}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \int\limits_{t/2}^{t}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau \le$$

$$\le e^{-\frac{\nu_1 t}{2}}\int\limits_{t_0}^{\infty}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \int\limits_{t/2}^{t}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau \to 0, \quad t\to\infty. \tag{20}$$

Останнє співвідношення випливає з (13). Тому і вираз у правій частині (19) прямує до нуля при $t \to \infty$.

Далі

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 \le a_3\int\limits_{t_0}^{t} N_1^2 e^{-2\nu_1(t-\tau)}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\mathbf{E}|y(t_0)|^2d\tau \le$$

$$\le N_1^2 a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{t_0}^{t} e^{-2\nu_1(t-\tau)}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau \to 0, \quad t\to\infty, \tag{21}$$

аналогічно (19).

Оцінимо третій доданок у (18). З нерівності Коші – Буняковського маємо

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|^2 \le \int\limits_{t}^{\infty}\|X_2(t,\tau)\|d\tau\int\limits_{t}^{\infty}\|X_2(t,\tau)\|\eta^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2d\tau \le$$

$$\le a_3N_2^2\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\nu_2(\tau-t)}d\tau\int\limits_{t}^{\infty}\eta^2(\tau)e^{2a(\tau-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2d\tau \le$$

$$\le \frac{a_3N_2^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2}{\nu_2}\int\limits_{t}^{\infty}\eta^2(\tau)e^{2a\tau} \to 0, \quad t\to\infty. \tag{22}$$

Останнє випливає з умови (13).

Оцінимо нарешті останній доданок у (18):

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{t}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 \le \int\limits_{t}^{\infty} N_2^2\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2d\tau \le$$

$$\le a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2N_2^2\int\limits_{t}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau} \to 0, \quad t\to\infty, \tag{23}$$

внаслідок нерівності (14). Нерівності (18) – (23) завершують доведення теореми.

Виявляється, що, накладаючи більш жорсткі умови на функцію $\rho(t)$, ніж (14), можна встановити й асимптотичну відповідність з імовірністю 1 систем (1) і (2).

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1, *в якій умову* (14) *замінено умовою*

$$\int_0^\infty t^\alpha e^{2at}\rho^2(t)dt < \infty \tag{24}$$

для деякого $\alpha > 1$.

Тоді система (2) *асимптотично відповідна до системи* (1) *з імовірністю* 1.

Доведення. Виберемо послідовність $\{n_k | k \geq 1\}$ так, щоб $n_k > k$, $k \geq 1$ і

$$\int_{n_k}^\infty e^{2at}\eta^2(t)dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1,$$

та послідовність $\{m_k | k \geq 1\}$ так, щоб $m_k > k$, $k \geq 1$, і

$$\int_{m_k}^\infty t^\alpha e^{2at}\rho^2(t)dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

За умовами (13) і (24) такий вибір є можливим.

За послідовностями $\{n_k\}$ і $\{m_k\}$ побудуємо послідовність l_k так, що

$$l_k = 2\max\{n_k, m_k\}, \quad k \geq 1.$$

Тоді очевидними є оцінки

$$\int_{l_k/2}^\infty e^{2at}\eta^2(t)dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1, \tag{25}$$

$$\int_{l_k/2}^\infty e^{2at}\rho^2(t)dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1, \tag{26}$$

$$\int_{l_k/2}^\infty t^\alpha e^{2at}\rho^2(t)dt \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1. \tag{27}$$

Для довільного розв'язку $y(t)$ системи (1), що починається у момент часу t_0, та відповідного йому розв'язку $x(t)$ системи (2), визначеного формулою (16), отримуємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}|x(t)-y(t)| > \frac{1}{k}\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}\left|\int_{t_0}^t X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right| > \frac{1}{4k}\right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}\left|\int_{t_0}^t X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}\left|\int_t^\infty X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right| > \frac{1}{4k}\right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}\left|\int\limits_t^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\} = P_1+P_2+P_3+P_4. \qquad (28)$$

Оцінимо кожну з імовірностей у (28) окремо.

Згідно з нерівністю Чебишова маємо

$$P_1 \leq 16k^2\mathbf{E}\left(\sup_{t\geq l_k}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right|\right)^2 \leq$$

$$\leq 16k^2\mathbf{E}\left(\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{t_0}^{t} N_1e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta(\tau)|y(\tau)|d\tau\right)\right)^2 \leq$$

$$\leq 16k^2N_1^2\mathbf{E}\left(\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{t_0}^{l_k/2} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta(\tau)|y(\tau)|d\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{l_k/2}^{t} e^{-\nu_1(t-\tau)}\eta(\tau)|y(\tau)|d\tau\right)\right)^2 \leq$$

$$\leq 32k^2N_1^2\left(\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{t_0}^{l_k/2} e^{-2\nu_1(t-\tau)}d\tau\right)\int\limits_{t_0}^{l_k/2}\eta^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2d\tau+\right.$$

$$\left.+\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{l_k/2}^{t} e^{-2\nu_1(t-\tau)}d\tau)\int\limits_{l_k/2}^{\infty}\eta^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2d\tau\right)\right), \qquad (29)$$

але

$$\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{t_0}^{l_k/2} e^{-2\nu_1(t-\tau)}d\tau\right) = \sup_{t\geq l_k}\left(e^{-2\nu_1 t}\int\limits_{t_0}^{l_k/2} e^{2\nu_1\tau}d\tau\right) \leq$$

$$\leq e^{-2\nu_1 l_k}\frac{e^{\nu_1 l_k}-e^{2\nu_1 t_0}}{2\nu_1} \leq \frac{e^{-\nu_1 l_k}}{2\nu_1} \leq \frac{e^{-\nu_1 k}}{2\nu_1},$$

$$\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{l_k/2}^{t} e^{-2\nu_1(t-\tau)}d\tau\right) \leq \sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_{0}^{t} e^{-2\nu_1(t-\tau)}d\tau\right) =$$

$$= \sup_{t\geq l_k}\left(e^{-2\nu_1 t}\frac{e^{2\nu_1 t}-1}{2\nu_1}\right) \leq \frac{1}{2\nu_1}.$$

Тому з (29) отримуємо нерівність

$$P_1 \leq 32k^2N_1^2\left(\frac{e^{-\nu_1 k}}{2\nu_1}\int\limits_{t_0}^{\infty}\eta^2(\tau)a_3e^{2a\tau}\mathbf{E}|y(t_0)|^2d\tau+\right.$$

$$+\frac{1}{2\nu_1}a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{l_k/2}^{\infty}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau\Bigg)\le$$

$$\le\frac{16k^2N_1^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2a_3}{\nu_1}\left(a_4e^{-\nu_1 k}+\frac{1}{2^k}\right)=I_k^{(1)}. \tag{30}$$

Оцінимо тепер доданок P_2 у (28). Для цього введемо для натуральних N послідовності подій

$$A_N=\left\{\omega|\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{t_0}^{t}X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{4k}\right\}.$$

Очевидно, що для довільних $K_1\le K_2$ $A_{K_1}\subseteq A_{K_2}$. Отже, A_N – монотонно зростаюча послідовність множин, до того ж

$$A=\left\{\omega|\sup_{t\ge l_k}\left|\int\limits_{t_0}^{t}X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{4k}\right\}=$$

$$=\bigcup_N A_N=\lim_{N\to\infty}A_N,$$

а тому $P_2=\mathbf{P}\{A\}=\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(A_N)$.

При $N>l_k$ маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{t_0}^{t}X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{4k}\right\}\le$$

$$\le\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{t_0}^{l_k}X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}. \tag{31}$$

Для першого доданка у правій частині (31) виконується, згідно з нерівністю Чебишова, ланцюжок нерівностей

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{t_0}^{l_k}X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$

$$\le 64k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\le t\le N}\left|\int\limits_{t_0}^{l_k}X_1(t,l_k)X_1(l_k,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|\right)^2\le$$

$$\le 64k^2\sup_{l_k\le t\le N}(\|X_1(t,l_k)\|^2)\int\limits_{t_0}^{l_k}\|X_1(l_k,\tau)\|^2\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2d\tau\le$$

$$\leq 64k^2N_1^4a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2e^{-2\nu_1 l_k}\int\limits_{t_0}^{l_k} e^{2\nu_1\tau}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau =$$

$$= 64k^2N_1^4a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2e^{-2\nu_1 l_k}\left(\int\limits_{t_0}^{l_k/2} e^{2\nu_1\tau}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \int\limits_{l_k/2}^{l_k} e^{2\nu_1\tau}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau\right) \leq$$

$$\leq 64k^2N_1^4a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\left(e^{-\nu_1 l_k}\int\limits_{t_0}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \int\limits_{l_k/2}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau\right).$$

З умови (24) випливає, що інтеграл $\int_0^\infty \rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau$ є збіжним. Використовуючи (26), отримуємо нерівність

$$64k^2N_1^4a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\left(e^{-\nu_1 l_k}\int\limits_{t_0}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \int\limits_{l_k/2}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau\right) \leq$$

$$\leq 64k^2N_1^4a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\left(e^{-\nu_1 k}\int\limits_{0}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \int\limits_{l_k/2}^{\infty}e^{2a\tau}\rho^2(\tau)d\tau\right) \leq$$

$$\leq 64k^2N_1^4a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\left(e^{-\nu_1 k}\int\limits_{0}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau + \frac{1}{2^k}\right) = C_k. \qquad (32)$$

Оцінимо тепер другий доданок у правій частині (31):

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} X_1(t,l_k)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{16k}\right\} +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} (X_1(t,\tau)-X_1(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{16k}\right\}. \qquad (33)$$

Оцінимо кожен доданок останньої нерівності. Маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} X_1(t,l_k)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{16k}\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\|X_1(t,l_k)\|\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} \sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{16k}\right\} \leq$$

$$\leq 256k^2N_1^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\leq t\leq N}\left(\left|\int\limits_{l_k}^{t}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2\right)\right)\leq$$

$$\leq 1024k^2N_1^2\int\limits_{l_k}^{N}\rho^2(\tau)a_3e^{2a(\tau-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2d\tau\leq$$

$$\leq 1024k^2N_1^2a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{l_k}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau\leq$$

$$\leq 1024k^2N_1^2a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\frac{1}{2^k}. \tag{34}$$

Для оцінки іншого доданка у правій частині (33) врахуємо те, що $X_1(t,\tau)$, як функція другого аргументу, задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dX_1(t,\tau)}{d\tau}=-X_1(t,\tau)A(\tau). \tag{35}$$

Останнє перевіряється безпосередньо.

З (35) випливає інтегральне співвідношення

$$X_1(t,\tau)=X_1(t,l_k)-\int\limits_{l_k}^{\tau}X_1(t,s)A(s)ds,$$

враховуючи яке, маємо

$$\int\limits_{l_k}^{t}(X_1(t,\tau)-X_1(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)=$$

$$=-\int\limits_{l_k}^{t}\left(\int\limits_{l_k}^{\tau}X_1(t,s)A(s)ds)\sigma(\tau,y(\tau)\right)dW(\tau)=$$

$$=-\int\limits_{l_k}^{t}X_1(t,s)A(s)\left(\int\limits_{l_k}^{t}I_{\{s\leq\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right)ds.$$

Остання рівність випливає з можливості зміни порядку інтегрування в звичайних та стохастичних інтегралах (див., наприклад, властивість 10^0 у [14, с. 256]).

Таким чином, отримуємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}(X_1(t,\tau)-X_1(t,l_k))\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{16k}\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t}X_1(t,s)A(s)\left(\int\limits_{l_k}^{t}I_{\{s\leq\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right)ds\right|>\frac{1}{16k}\right\}\leq$$

$$\leq 256k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} X_1(t,s)A(s)\left(\int\limits_{l_k}^{t} I_{\{s\leq\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right)ds\right|\right)^2 \leq$$

$$\leq 256k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\leq t\leq N}\left(\int\limits_{l_k}^{t} N_1^2 e^{-2\nu_1(t-s)}\|A(s)\|^2 ds\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int\limits_{l_k}^{t}\left|\int\limits_{l_k}^{t} I_{\{s\leq\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 ds\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{256k^2N_1^2a^2}{2\nu_1}\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\leq t\leq N}\left(\int\limits_{l_k}^{t}\left|\int\limits_{l_k}^{t} I_{\{s\leq\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2 ds\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{256k^2N_1^2a^2}{2\nu_1}\int\limits_{l_k}^{N}\mathbf{E}\left(\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} I_{\{s\leq\tau\}}\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2\right)ds \leq$$

$$\leq \frac{1024k^2N_1^2a^2}{2\nu_1}\int\limits_{l_k}^{N}\left(\int\limits_{s}^{N}\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2 d\tau\right)ds \leq$$

$$\leq \frac{1024k^2N_1^2a^2\mathbf{E}|y(t_0|^2a_3}{2\nu_1}\int\limits_{l_k}^{N}\left(\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\int\limits_{l_k}^{\tau}ds\right)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1024k^2N_1^2a^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2a_3}{2\nu_1}\int\limits_{l_k}^{N}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\tau d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1024k^2N_1^2a^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2a_3}{2\nu_1}2^{-k}. \tag{36}$$

З (33), (34) і (36) одержуємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{l_k}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\} \leq$$

$$\leq 1024k^2N_1^2a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\left(1+\frac{a^2}{2\nu_1}\right)\frac{1}{2^k} = B_k. \tag{37}$$

Враховуючи тепер оцінки (32) і (37), маємо

$$\mathbf{P}\left\{\omega|\sup_{l_k\leq t\leq N}\left|\int\limits_{t_0}^{t} X_1(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\} \leq C_k + B_k.$$

Спрямувавши N до нескінченності, отримаємо оцінку для доданка P_2 у (28):

$$P_2 \leq C_k + B_k = I_{(k)}^2. \tag{38}$$

Оцінимо доданок P_3 у формулі (28). На підставі нерівності Чебишова, оцінок (3) і (6) маємо

$$P_3 = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}\left|\int\limits_t^{\infty} X_2(t,\tau)f(\tau,y(\tau))d\tau\right| > \frac{1}{4k}\right\} \leq$$

$$\leq 16k^2\mathbf{E}\left(\left(\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_t^{\infty} N_2 e^{-\nu_2(\tau-t)}\eta(\tau)|y(\tau)|d\tau\right)\right)^2\right) \leq$$

$$\leq 16k^2\mathbf{E}\left(\sup_{t\geq l_k}\left(\int\limits_t^{\infty} N_2^2 e^{-2\nu_2(\tau-t)}d\tau\int\limits_t^{\infty}\eta^2(\tau)|y(\tau)|^2 d\tau\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{16k^2N_2^2}{2\nu_2}a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{l_k}^{\infty}\eta^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau \leq \frac{16k^2N_2^2}{2\nu_2}a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2\frac{1}{2^k} = I_k^{(3)}. \qquad (39)$$

Остання нерівність випливає з оцінки (25).

Залишилось оцінити доданок P_4 у формулі (28):

$$P_4 = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq l_k}\left|\int\limits_t^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}\left|\int\limits_t^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}\left|\int\limits_t^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{4k}\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\}\right) +$$

$$+\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\leq t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{t} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right| > \frac{1}{8k}\right\}. \qquad (40)$$

Оцінимо кожен доданок під знаком суми окремо. Для цього врахуємо, що $X_2(t,\tau)$, як функція першого аргумента, задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{dX_2(t,\tau)}{dt} = A(t)X_2(t,\tau).$$

Звідси на підставі нерівності Гронуолла – Беллмана та нерівності (6) маємо оцінку

$$\|X_2(t,\tau)\| \leq N_2 e^{a|t-\tau|}. \qquad (41)$$

Далі отримуємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{t} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$

$$\le 64k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{t} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2\right)=$$

$$=64k^2\mathbf{E}\left(\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|X_2(t,l_k+n)\int\limits_{l_k+n}^{t} X_2(l_k+n,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2\right)\le$$

$$\le 64k^2\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\|X_2(t,l_k+n)\|^2\times$$

$$\times\mathbf{E}\left(\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{t} X_2(l_k+n,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|^2\right).$$

Останній вираз, згідно з нерівністю (41) і властивостями стохастичного інтеграла, не перевищує інтеграл

$$64k^2N_2^2e^{2a}4\int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1}\|X_2(l_k+n,\tau)\|^2\rho^2(\tau)\mathbf{E}|y(\tau)|^2d\tau,$$

який на підставі нерівності (6) оцінюється виразом

$$256k^2N_2^2e^{2a}\int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1}N_2^2e^{-2\nu_2(\tau-l_k-n)}\rho^2(\tau)a_3e^{2a(\tau-t_0)}\mathbf{E}|y(t_0)|^2\le$$

$$\le 256k^2e^{2a}a_3\mathbf{E}|y(t_0)|^2N_2^2\int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau. \tag{42}$$

Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{t} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau))\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$

$$\le 256k^2e^{2a}a_3N_2^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{l_k+n}^{l_k+n+1}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau=$$

$$=256k^2e^{2a}a_3N_2^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{l_k}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau\le$$

$$\le 256k^2e^{2a}a_3N_2^2\mathbf{E}|y(t_0)|^2\frac{1}{2^k}=I_k^{(4)}. \tag{43}$$

Залишилось оцінити першу систему в (40). Маємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$

$$\le 64k^2\sup_{l_k\le t<l_k+n+1}(\|X_2(t,l_k+n)\|^2)\int\limits_{l_k+n}^{\infty}\|X_2(l_k+n,\tau)\|^2\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\mathbf{E}|y(t_0)|^2d\tau.$$

Останній вираз, згідно з нерівностями (6) і (41), не перевищує наступного:

$$64k^2N_2^2e^{2a}\int\limits_{l_k+n}^{\infty}N_2^2e^{-2\nu_2(\tau-l_k-n)}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\mathbf{E}|y(t_0)|^2d\tau\le$$

$$\le 64k^2N_2^4e^{2a}\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{l_k+n}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau.$$

Таким чином, для оцінки першої суми в (40) маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$

$$\le 64k^2N_2^4e^{2a}\mathbf{E}|y(t_0)|^2\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{l_k+n}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}d\tau=$$

$$=64k^2N_2^4e^{2a}\mathbf{E}|y(t_0)|^2\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{l_k+n}^{\infty}\frac{1}{\tau^\alpha}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\tau^\alpha d\tau\le$$

$$\le 64k^2N_2^4e^{2a}\mathbf{E}|y(t_0)|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(l_k+n)^\alpha}\int\limits_{l_k+n}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\tau^\alpha d\tau\le$$

$$\le 64k^2N_2^4e^{2a}\mathbf{E}|y(t_0)|^2\int\limits_{l_k}^{\infty}\rho^2(\tau)e^{2a\tau}\tau^\alpha d\tau\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ є збіжним. Позначимо його суму через S. Тоді на підставі нерівності (27) маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\sup_{l_k+n\le t<l_k+n+1}\left|\int\limits_{l_k+n}^{\infty} X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y(\tau))dW(\tau)\right|>\frac{1}{8k}\right\}\le$$

$$\le 64k^2N_2^4e^{2a}\mathbf{E}|y(t_0)|^2S\frac{1}{2^k}=I_k^{(5)}. \tag{44}$$

Отже, з огляду на нерівності (40), (43) і (44) для доданка P_4 у формулі (28) одержуємо

$$P_4 \le I^4_{(k)} + I^5_{(k)}. \tag{45}$$

З оцінок (28), (30), (38), (39), (45) отримуємо

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\ge l_k}|x(t)-y(t)| > \frac{1}{k}\right\} \le \sum_{i=1}^{5} I^i_{(k)} = I_k.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$ є збіжним, то, застосовуючи лему Бореля – Кантелі, завершуємо доведення теореми.

Приклад. Розглянемо в $\mathbf{R^2}$ стохастичну систему вигляду (1)

$$\begin{aligned} dy_1 &= (-(\operatorname{th} t)y_1 + f_1(t)\sin y_2)dt + \sigma_1(t)\sin y_1 dW(t),\\ dy_2 &= (y_1 + (\operatorname{th} t)y_2 + f_2 \sin y_1)dt + \sigma_2(t)\sin y_2 dW(t), \end{aligned} \tag{46}$$

де th — гіперболічний тангенс, функції f_i, σ_i неперервні при $t \ge 0$, $i = 1, 2$.

Матриця $A(t)$ має вигляд

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\operatorname{th} t & 0 \\ 1 & \operatorname{th} t \end{pmatrix}.$$

Відповідна незбурена система є такою:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -(\operatorname{th} t)x_1 dt,\\ dx_2 &= (x_1 + \operatorname{th} t x_2)dt, \end{aligned} \tag{47}$$

до того ж неважко бачити, що вона є експоненціально дихотомічною на осі. Відповідні проектори мають вигляд

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно також, що $\sup_{t\in\mathbf{R^1}} \|A(t)\| \le \sqrt{3}$.

Тоді, беручи, наприклад, $\eta(t) = |f_1(t)| + |f_2(t)|$, a $\rho(t) = |\sigma_1(t)| + |\sigma_2(t)|$, при виконанні умов $\int_0^\infty \eta^2(t)e^{3t}dt < \infty$, $\int_0^\infty \rho^2(t)e^{3t}dt < \infty$ отримуємо, що система (47) асимптотично відповідна системі (46) у середньому квадратичному, а при умовах $\int_0^\infty \eta^2(t)e^{3t}dt < \infty$ і $\int_0^\infty t^\alpha\rho^2(t)e^{3t}dt < \infty$ для деякого $\alpha > 1$ така відповідність має місце з імовірністю 1.

3. Лінійний випадок. Розглянемо тепер випадок, коли система (1) є лінійною, тобто має вигляд

$$dy = (A(t) + B(t))ydt + D(t)ydW(t), \tag{48}$$

де $B(t)$, $D(t)$ — неперервні детерміновані матриці при $t \ge 0$, $A(t)$ така, як і в системі (1).

У цьому випадку теорему 2 вдається підсилити, а саме, показати, що можна так побудувати відповідність між системами (48) та (2), при якій кожному нетривіальному розв'язку системи (48) буде відповідати нетривіальний розв'язок системи (1). Під нетривіальним розв'язком системи (48) будемо розуміти такий, що перетворюється в нуль лише з нульовою ймовірністю.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай система* (2) *експоненціально дихотомічна на осі. Тоді якщо виконуються умови*:

1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{2at}\|B(t)\|^2dt < \infty;$

2) $\displaystyle\int_0^\infty t^\alpha e^{2at}\|D(t)\|^2dt < \infty$ *для деякого* $\alpha > 1,$

то система (2) *асимптотично відповідна системі* (48) *в середньому квадратичному з імовірністю* 1, *до того ж відповідність між розв'язками можна побудувати так, що кожному нетривіальному розв'язку системи* (48), *що починається у момент часу* $t_0 = 0$, *відповідає розв'язок системи* (2) *з нетривіальними з імовірністю* 1 *початковими даними.*

Доведення. Асимптотичну відповідність встановлено в теоремах 1 та 2. Покажемо тепер, що кожному нетривіальному розв'язку системи (48) $y(t, y_0)$, $y(0, y_0) = y_0(\omega) \neq 0$ з імовірністю 1 відповідає нетривіальний розв'язок системи (2).

Для доведення цього факту нам потрібні дві відомі леми з теорії лінійних систем.

Лема 3. *Кожний розв'язок системи* (2) *можна зобразити у вигляді*

$$x(t) = X(t, \tau)x(\tau), \quad \tau, t \in \mathbf{R^1}, \tag{49}$$

де $X(t, \tau)$ — *матрицант системи* (2).

Доведення див., наприклад, у [15, с. 163].

Лема 4. *Кожний розв'язок* $y(t, y_0)$ *системи* (48) *можна зобразити у вигляді*

$$y(t, y_0) = Y(t, t_0)y(t_0, y_0), \quad t \geq t_0, \tag{50}$$

де $Y(t, t_0, \omega)$ — *фундаментальна матриця системи* (48), *невироджена з імовірністю* 1 *для всіх* $t \geq t_0 \geq 0$ $(Y(t_0, t_0) = E)$.

Доведення див., наприклад, у [16, с. 230] (п. 3.1.1).

Повернемося до доведення теореми. Зазначимо, що співвідношення (50) і

$$\det Y(t, t_0) \neq 0 \tag{51}$$

виконуються для всіх t, t_0 з імовірністю 1. Але внаслідок неперервності з імовірністю 1 $Y(t, t_0)$ і $y(t, y_0)$ існує множина $Z \subset \Omega$, $\mathbf{P}(Z) = 1$, така, що для всіх $\omega \in Z$ співвідношення (50) і (51) виконуються при всіх $t \geq t_0 \geq 0$.

Позначимо $Z_0 = \Omega \setminus Z$, $\mathbf{P}(Z_0) = 0$. Через $A_0 \subset \Omega$ позначимо множину

$$A_0 = \{\omega\colon |y_0(\omega)| \neq 0\}.$$

Очевидно, що $\mathbf{P}(A_0) = 1$. Нехай $A_1 = A_0 \setminus Z_0$. Тоді для кожного $\omega \in A_1$:

1) співвідношення (50) і (51) виконуються при всіх $t \geq t_0 \geq 0$;

2) $|y(t, y_0(\omega))| \neq 0$ при всіх $t \geq 0$.

При доведенні теорем 1 і 2 вказана в них відповідність між розв'язками систем (1) і (2) будувалась за формулою (5), яка в лінійному випадку набере вигляду

$$x(t_0) = y(t_0, y_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0, \tau)B(\tau)y(\tau, y_0)d\tau + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0, \tau)D(\tau)y(\tau, y_0)dW(\tau)).$$

Враховуючи тепер (50), останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$x(t_0) = \left(E + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)B(\tau)Y(\tau,t_0)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)D(\tau)Y(\tau,t_0)dW(\tau) \right) y(t_0,y_0), \tag{52}$$

або

$$x(t_0) = (E + \Phi(t_0,\omega))y(t_0,\omega), \tag{53}$$

де

$$\Phi(t_0,\omega) = \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)B(\tau)Y(\tau,t_0)d\tau + \int\limits_{t_0}^{\infty} X_2(t_0,\tau)D(\tau)Y(\tau,t_0)dW(\tau). \tag{54}$$

Оскільки фундаментальна матриця $Y(t,t_0)$ системи (48) складається з лінійно незалежних вектор-стовпчиків, кожен з яких є розв'язком системи (48), то на підставі леми 1 і умови $Y(t_0,t_0) = E$ для $Y(t,t_0)$ отримуємо при $t \geq t_0$ оцінку

$$\mathbf{E}\|Y(t,t_0)\|^2 \leq na_3 e^{2a(t-t_0)}, \tag{55}$$

де a і a_3 — сталі з леми 1, а n — розмірність простору.

Міркуючи, як і при встановленні оцінок імовірностей P_3 і P_4 в теоремі 2, де замість t фігурує t_0, для кожного вектор-стовпика фундаментальної матриці, враховуючи, що математичне сподівання норми його квадрата в точці t_0 дорівнює 1, отримуємо, що

$$\Phi(t_0,\omega) \to 0, \quad t_0 \to \infty, \tag{56}$$

з імовірністю 1. Тому існує цілочислова випадкова величина $t_0(\omega)$ така, що з імовірністю 1 $\Phi(t_0(\omega),\omega) < 1$.

Подальше доведення аналогічне доведенню відповідного факту з [17].

***Зауваження* 1.** З доведеної теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. *Якщо система* (2) *експоненціально стійка, тобто в означенні дихотомії проектор* $P_2 = 0$, *то всі розв'язки системи* (48) *прямують до нуля при* $t \to \infty$ *в середньому квадратичному з імовірністю* 1.

Якщо ж система (2) *експоненціально нестійка, тобто в означенні дихотомії проектор* $P_1 = 0$, *то всі нетривіальні розв'язки системи* (48) *прямують до нескінченності при* $t \to \infty$ *в середньому квадратичному з імовірністю* 1.

4. Застосування отриманих результатів. Продемонструємо деякі застосування отриманих результатів.

Лінійні системи. Спочатку наведемо результат, що отримується без використання асимптотичної відповідності.

Теорема 4. *Нехай матриця* $A(t)$ *неперервна і обмежена при* $t \geq 0$, *а система* (2) *експоненціально дихотомічна при* $t \geq 0$.

Тоді якщо матриці $B(t)$ *і* $D(t)$ *неперервні при* $t \geq 0$ *і задовольняють умову*

$$B(t) \to 0, \quad D(t) \to 0, \quad t \to \infty, \tag{57}$$

то існує $t_0 > 0$ *таке, що при* $t \geq t_0$ *збурена система*

$$dy = (A(t) + B(t)y)dt + D(t)dW(t) \tag{58}$$

експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному.

***Зауваження* 2.** Експоненціальна дихотомія системи розуміється у сенсі означення 3.1 [12, с. 122].

Доведення. Дійсно, якщо система (2) експоненціально дихотомічна, то, як випливає з роботи [18], існує симетрична, гладка, обмежена при $t \geq 0$ матриця $S(t)$ така, що для квадратичної форми $\left(\left(\dfrac{dS}{dt} + A^T S + SA\right) x, x\right)$ існує $N > 0$ з виконанням оцінки

$$\left(\left(\frac{dS}{dt} + A^T S + SA\right) x, x\right) \leq -N|x|^2 \tag{59}$$

при $x \in R^n$, $t \geq 0$.

Тоді, згідно з умовою (57), існує $t_0 > 0$ таке, що при $t \geq t_0$ виконується оцінка

$$\left(\left(\frac{dS}{dt} + A^T S + SA + B^T S + SB + D^T SD\right) x, x\right) \leq -\frac{N}{2}|x|^2, \tag{60}$$

а тому за теоремою 3.3 (див. [12, с. 134]) система (58) є експоненціально дихотомічною в середньому квардратичному, що і доводить теорему.

Для доведеного результату не потрібно прямування до нуля збурюючих коефіцієнтів з вагами. Але для вияснення потраєкторної поведінки розв'язків збуреної системи (58) потрібно більш швидке прямування до нуля $B(t)$ і $D(t)$.

Нехай тепер система (2) експоненціально дихотомічна на осі. Тоді існує матриця $S(t)$ з властивостями, анонсованими в доведенні попередньої теореми.

Теорема 5. *Нехай* $B(t)$ *і* $D(t)$ *прямують до нуля при* $t \to \infty$ *і виконуються умови теореми* 3.

Тоді існує $t_0 > 0$ *таке, що при* $t > t_0$ *система* (58) *експоненціально дихотомічна в середньому квадратичному.*

При цьому розв'язки, що починаються на стійкому підпросторі (*зі вказаного вище означення* 3.1) *прямують до нуля з імовірністю* 1 *при* $t \to \infty$.

Якщо до того ж множина (t, x), $t \geq t_0$, $x \in R^n$ *така, що*

$$((S(t)x, x) \leq 0 \tag{61}$$

(*де* $S(t)$ *— вказана перед теоремою матриця*) *інваріантна для розв'язків системи* (58), *то розв'язки такої системи, що починаються на нестійкому підпросторі* (*зі вказаного вище означення* 3.1) *прямують за нормою до нескінченності з імовірністю* 1 *при* $t \to \infty$.

***Зауваження* 3.** Інваріантність множини (61) для процесу $y(t)$ розуміється в наступному сенсі: якщо $y(t_0)$ (не випадкове) задовольняє (61), то з імовірністю 1 $(S(t)y(t), y(t)) \leq 0$ при $t \geq t_0$. З'ясуванню умов, при яких дана множина є інваріантною для розв'язків стохостичних систем, присвячено багато робіт (див., наприклад, [5, 7, 19]. Наведено необхідні, достатні, необхідні та достатні умови інваріантності множин у термінах коефіцієнтів рівняння.

Доведення. Експоненціальна дихотомія в середньому квадратичному випливає з теореми 4. Тобто існують додатні сталі K, K_1, γ та два доповнюючих підпростори $R^-_{t_0}$, $R^+_{t_0}$ $(R^n = R^-_{t_0} \oplus R^+_{t_0})$ такі, що якщо розв'язок системи (58) починається на $R^-_{t_0}$ $(y(t_0)$ не випадкове), то

$$\mathbf{E}|y(s, t_0, y(t_0)|^2 \leq K \exp^{-\gamma(s-\tau)} \mathbf{E}|y(\tau, t_0, y(t_0))|^2$$

при $s \geq \tau \geq t_0$ і, відповідно, якщо $y(t_0) \in R^+_{t_0}$, то

$$\mathbf{E}|y(s, t_0, y(t_0)|^2 \geq K \exp^{\gamma(s-\tau)} \mathbf{E}|y(\tau, t_0, y(t_0)))|^2$$

при $s \geq \tau \geq t_0, .$

Покажемо тепер, що розв'язки, які починаються на $R^-_{t_0}$, прямують до нуля з імовірністю 1, а ті, що починаються на $R^+_{t_0}$, прямують за нормою до нескінченності з імовірністю 1 при $t \to \infty$.

Дійсно, якщо $y(t_0) = y \in R^-_{t_0}$ (розв'язок позначимо через $y(s, t_0, y_0)$), то $\mathbf{E}|y(s, t_0, y|^2 \to 0$, $s \to \infty$, а тому існує послідовність $\{s_n\}$, $s_n \to \infty$, така, що $y(s_n, t_0, y) \to 0$ з імовірністю 1 при $s_n \to \infty$.

Але внаслідок асимптотичної відповідності для розв'язку $y(s, t_0, y)$ існує розв'язок $x(s, t_0, x_0(\omega))$ системи (2) такий, що з імовірністю 1 $|x(s, t_0, x_0(\omega)) - - y(s, t_0, y)| \to 0$ при $s \to \infty$. Отже, і $x(s_n, t_0, x_0(\omega) \to 0$, $s \to \infty$, з імовірністю 1. Але $x(s, t_0, x_0(\omega))$ прямує або до нуля, або до нескінченності внаслідок дихотомії системи (2). Тепер очевидно, що $x(s, t_0, x_0(\omega))$ прямує до нуля, а тому і $y(s, t_0, y)$ прямує до нуля з імовірністю 1.

Розглянемо розв'язок з $R^+_{t_0}$ $y(s, t_0, y)$:

$y(t_0, t_0, y) = y(t_0) = y_0 \in R^+_{t_0}$, який задовольняє оцінку

$$\mathbf{E}|y(s, t_0, y|^2 \geq K_1 \exp^{\gamma(s-t_0)} |y|^2 \quad \text{при} \quad s \geq t_0.$$

Із доведення теореми 3.3 [12, с. 134] випливають два факти:

1) для будь-якого $y \in R^n$ квадратична форма

$$(S_s y, y) = \mathbf{E}(S(s)y(s, t, y), y(s, t, y)) = \mathbf{E}(S(s)Y(s, t)y, Y(s, t)y),$$

як функція від s, є монотонно спадною, тобто $(S_s y, y) < (S_\tau y, y)$ при $s > \tau \geq t$, $y \neq 0$ $(Y(t, s)$ — матрицант системи (58) у точці t);

2) для розв'язку системи (58), що починається з точки $y \in R^n$ такої, що $(S_s y, y) \leq 0$ при $s \geq t$, справджується оцінка

$$\mathbf{E}|y(s, t, y)|^2 \geq K_1 \exp^{\gamma(s-t)} |y|^2. \tag{62}$$

Згідно з фактом 1 для виконання нерівності $(S_s y, y) \leq 0$ при $s \leq t$ достатньо її виконання в точці t, тобто

$$(S_t y, y) = \mathbf{E}(S(t)y(t, t, y)y(t, t, y)) = (S(t)y, y) < 0.$$

Розглянемо тепер функцію

$$V(t, x) = \int\limits_t^{t+T} \frac{ds}{\mathbf{E}|y(s, t, x)|^2}, \quad x \neq 0, \tag{63}$$

де $T > 0$ є фіксованим і буде визначено пізніше.

Встановимо деякі її властивості.

Насамперед зазначимо, що функцію визначено коректно, оскільки при $x \neq 0$ точка $x = 0$ є недосяжною для процесу $y(s,t,x)$.

З нерівності (10) випливає оцінка

$$V(t,x) = \int_t^{t+T} \frac{ds}{\mathbf{E}|y(s,t,x)|^2} \geq \int_t^{t+T} \frac{\exp^{-2(s-t)}}{a_3|x|^2} ds =$$

$$= \frac{1}{2aa_3}(1 - \exp^{-2aT}) \frac{1}{|x|^2} = \frac{A}{|x|^2.} \tag{64}$$

З [13, c. 231] випливає, що $V(t,x)$ є гладкою по t і двічі гладкою по x при $x \neq 0$.

Обчислимо $LV(t,x)$:

$$LV(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}, (A(t) + B(t))x\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x) \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

При цьому очевидно, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \leq \|D(t)\|^2 |x|^2. \tag{65}$$

Маємо

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\mathbf{E}|y(t+T,t,x)|^2} - \frac{1}{|x|^2} + \int_t^{t+T} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mathbf{E}|y(s,t,x)|^2}\right) ds.$$

Позначимо $u_s(t,x) = \mathbf{E}|y(s,t,x)|^2$, а $z_s(t,x) = \dfrac{1}{u_s(t,x)}$. Тоді

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} = -\frac{1}{u_s^2(t,x)} \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{1}{u_s^2} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 z^2}{\partial x_i \partial x_j} = 2u_s^{-3} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} - \frac{1}{u_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тому

$$LV(t,x) = \frac{1}{\mathbf{E}|y(t+T,t,x)|^2} - \frac{1}{|x|^2} + \int_t^{t+T} -\frac{1}{u_s^2}\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_s}{\partial x}, (A(t) + B(t)x)x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} a_{i,j}(t,x)\right) ds + \frac{1}{2}\int_t^{t+T} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\frac{\partial u_s}{\partial x_i}}{(\mathbf{E}|y(s,t,x)|^2)^3} a_{i,j}(t,x) ds. \tag{66}$$

Перший інтеграл у (66) за лемою 6.2. [13, c. 230] дорівнює нулю.

Оцінимо тепер $LV(t,x)$ у випадку, коли точка (t,x) належить множині (61). Із урахуванням (62) маємо

$$\mathbf{E}|y(t+T,t,x)|^2 \geq K_1 e^T |x|^2. \tag{67}$$

Виберемо $T > 0$ так, щоб

$$K_1 e^T > 4. \tag{68}$$

Для частинних похідних згідно з лемою 6.1 [13, с. 226] справджується оцінка

$$\left| \frac{\partial u_s(t,x)}{\partial x} \right| \leq K_2 e^{2a(s-t)} |x|,$$

з якої для $LV(t,x)$ отримуємо нерівність

$$LV(t,x) \leq \frac{1}{4|x|^2} - \frac{1}{|x|^2} + \int\limits_t^{t+T} n \frac{K_2^2 e^{4a(s-t)} |x|^2 \|D(t)\|^2 |x|^2}{K_1^3 e^{3\gamma(s-t)} |x|^6} ds \leq$$

$$\leq -\frac{3}{4|x|^2} + n\frac{K_1}{K_1^3} e^{4aT} T \|D(t)\|^2 \frac{1}{|x|^2}.$$

Оскільки $D(t) \to 0$, $t \to 0$, то існує t_0 з оцінки (60) і нерівності

$$n\frac{K_2}{K_1} \exp^{4aT} T \|D(t)\|^2 < \frac{1}{4}$$

(n — розмірність простору.) Тоді при $t \geq t_0$

$$LV(t,x) \leq -\frac{1}{|x|^2} < 0. \tag{69}$$

Використовуючи (69) і інваріантність множини (61), приходимо до висновку, що $V(s, y(s,t,x))$ — невід'ємний супермартингал. Тому з імовірністю 1 існує його скінченна границя при $s \to \infty$. Отже, $\sup_{s \geq t_0} V(s, y(s,t,x)) = B_{t,y} < \infty$ з імовірністю 1.

Тоді на підставі (64) $|y(s,t,x)|^2 \geq \dfrac{A}{B_{ty}}$ з імовірністю 1. Отже, $|y(s,t,x)|$ з імовірністю 1 відділений від нуля. Але внаслідок асимптотичної відповідності $|y(s,t,x)|$ на майже всіх $\omega \in \Omega$ прямує або до нуля, або до нескінченності. Таким чином, $|y(s,t,x)| \to \infty$ при $t \to \infty$ з імовірністю 1.

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо в $\mathbf{R}^2$ систему

$$\begin{aligned} dx_1 &= -x_1 dt + (\alpha_1(t)x_1 + \alpha_2(t)x_2)dW(t), \\ dx_2 &= x_2 dt + (\alpha_2(t)x_1 + \alpha_1(t)x_2)dW(t). \end{aligned} \tag{70}$$

Відповідна незбурена детермінована система має вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2$$

і є експоненціально дихотомічною на осі. Тут матриця

$$S(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а множина (61) задається нерівністю $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$. Нехай $\alpha_i(t)$ такі, що задовольняють умови теореми 3. Тоді, як випливає з теореми 3 роботи [19], множина $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$ інваріантна для (61). Отже, система задовольняє умови теореми 5.

Нелінійні системи. Для нелінійних систем навіть у детермінованому випадку не існує завершена теорія дихотомії. Але з доведення теорем 1 і 2 випливає наступна теорема.

Теорема 6. *Якщо в системі* (1) *функції* f *і* σ *такі, що* $X_2(t,\tau)f(\tau,y) = 0$ *та* $X_2(t,\tau)\sigma(\tau,y) = 0$, *то в теоремах* 1 *і* 2 *кожному розв'язку* $y(t,y_0)$ *системи* (1) *з початковими даними* $y(0,y_0) = y_0$ *можна поставити у відповідність розв'язок* $x(t,y_0)$ *системи* (2) *з початковими даними* $x(0,y_0) = y_0$ *такий, що* $\mathbf{E}|y(t,y_0) - x(t,y_0)|^2 \to 0$ *при* $t \to \infty$ *і з імовірністю* 1 $|y(t,y_0) - x(t,y_0)| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

1. *Witner A.* Linear variations of constants // Amer. J. Math. – 1946. – **68**. – P. 185 – 213.
2. *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. – 1948. – **15**. – P. 111 – 126.
3. *Yakubovich V. A.* On the asymptotic behavior of systems of differential equations // Mat. Sb. – 1951. – **28**. – S. 217 – 240.
4. *Akhmet M. U., Tleubergenova M. A., Zafer A.* Asymptotic equivalence of differential equations and asymptotically almost periodic solutions // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 2007. – **67**. – P. 1 – 14.
5. *Aubin J. P., Da Plato G.* Stochastic viability and invariance // Ann. Scuola: norm. Super Pisa. – 1990. – **27**. – P. 595 – 694.
6. *Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinerbach J. G., Tymoshenko O. A.* On the φ asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // Theory Probab.: Math. Statist. – 2008. – **1**. – P. 11 – 30.
7. *Da Prato G., Frankowska H.* Invariance of stochastic control systems with detrministic arguments // J. Different. Equat. – 2004. – **200**. – P. 18 – 52.
8. *Hernandez M. Eduardo, Pelicer Mauricio L.* Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for partial neutral differential equations // Appl. Math. Lett. – 2005. – **18**. – P. 1265 – 1272.
9. *Булдигін В. В., Коваль В. О.* Про асимптотичні властивості розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь в $\mathbf{R^n}$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 9. – С. 1166 – 1175.
10. *Махно С. Я.* Сходимость решений одномерных стохастических уравнений // Теория вероятности и ее применение. – 1999. – **44**, № 3. – С. 555 – 572.
11. *Креневич А. П.* Асимптотична еквівалентність розв'язків лінійних стохастичних систем Іто // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1368 – 1384.
12. *Самойленко А. М., Станжицький О. М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. – Київ: Наук. думка, 2009. – 338 с.
13. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
14. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Вища шк., 1992. – 320 с.
15. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння: Підручник. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
16. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
17. *Станжицкий А.Н., Креневич А.П., Новак И.Г.* Асимптотическая эквивалентность линейных стохастических систем Ито и колеблемость решений линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**. – С. 1 – 15.
18. *Майзель Ф. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Урал. политехн. ин-та. Сер. мат. – 1954. – **51**, № 10. – С. 20 – 50.
19. *Milian A.* Stochastic viability and comparison theorem // Colloq. math. – 1995. – **68**. – P. 297 – 316.

Одержано 06.07.10,
після доопрацювання — 17.06.11