УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. С. Чурилова (Днепропетр. нац. ун-т)

ОЦЕНКИ НОРМ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

For functions defined on the real line or a half-line, we obtain Kolmogorov-type inequalities that estimate the L_p-norms ($1 \le p < \infty$) of fractional derivatives in terms of the L_p-norms of functions (or the L_p-norms of their truncated derivatives) and their L_p-moduli of continuity and establish their sharpness for $p = 1$. Applications of the obtained inequalities are given.

Для функцій, заданих на всій дійсній осі або півосі, одержано нерівності типу Колмогорова, які оцінюють L_p-норми ($1 \le p < \infty$) дробових похідних через L_p-норми функцій (або L_p-норми їхніх зрізаних похідних) та їхні L_p-модулі неперервності, та при $p = 1$ встановлено їхню точність. Наведено застосування одержаних нерівностей.

1. Введение. В настоящей статье будем рассматривать три взаимосвязанные задачи: задачу о точных неравенствах типа Колмогорова для дробных производных функций, заданных на всей числовой оси или полуоси, задачу о наилучшем приближении неограниченного оператора дробного дифференцирования линейными ограниченными операторами, а также задачу об оптимальном восстановлении оператора дробного дифференцирования на классе функций, заданных с известной погрешностью. С результатами решения этих задач для операторов дифференцирования целых порядков можно ознакомиться, например, в обзорах [1 – 3] и монографии [4], где имеются также дальнейшие ссылки. По поводу известных случаев решения этих задач для операторов дробного дифференцирования см. [5 – 13]. Данная работа является продолжением исследований, начатых авторами в работах [6, 8].

Опишем кратко структуру статьи. В п. 2 приведены пространства и производные, используемые в статье, а также общая постановка задачи аппроксимации неограниченного оператора линейными ограниченными и задачи оптимального восстановления операторов на классе функций, заданных с погрешностью.

В п. 3 изложено точное решение первой задачи в случае приближения операторов дробного дифференцирования $D^{\alpha}_{\pm}$, $0 < \alpha < 1$, в форме Маршо (см. [14, с. 95]). В процессе решения этой задачи получены неравенства, оценивающие L_p-норму дробных производных через L_p- и H^{ω}_{p}-нормы самих функций, при $p = 1$ установлена точность полученных неравенств. Из доказанных неравенств выведено следствие об оценке модуля непрерывности оператора дробного дифференцирования по Маршо и получено решение задачи оптимального восстановления операторов дробного дифференцирования на классе функций, заданных с погрешностью.

В п. 4 установлены неравенства, оценивающие L_p-норму дробной производной через L_p-норму усеченной дробной производной и H^{ω}_{p}-норму функции, и доказана их точность при $p = 1$.

2. Необходимые определения и обозначения. Постановки задач. Пусть G есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |x(u)|^p \, du \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{u \in G} |x(u)|, & p = \infty, \end{cases}$$

а через $C(G)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_C = \|x\|_{C(G)} := \sup_{u \in G} |x(u)|.$$

Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности, т. е. неубывающая на $\mathbb{R}_+$, непрерывная и полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Через $H^\omega(G)$ будем обозначать множество функций $x \in C(G)$ таких, что

$$\|x\|_{H^\omega(G)} := \sup_{\substack{t \in G \\ t \ne 0}} \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{C(G)}}{\omega(|t|)} < \infty,$$

а через $H_p^\omega(G)$, $1 \le p < \infty$, — множество функций $x \in L_p(G)$, для которых

$$\|x\|_{H_p^\omega(G)} := \sup_{\substack{t \in G \\ t \ne 0}} \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{L_p(G)}}{\omega(|t|)} < \infty.$$

Если $\omega(t) = t^\beta,\ 0 < \beta \le 1$, то вместо $H_p^\omega(G)$ будем писать $H_p^\beta(G)$.

Если X есть $H^\omega(G)$ или $H_p^\omega(G)$, то через UX обозначим единичный шар пространства X, т. е. множество функций $x \in X$ таких, что $\|x\|_X \le 1$.

Производные $D_\pm^\alpha x$, $0 < \alpha < 1$, в смысле Маршо для функций $x\colon G \to \mathbb{R}$ определяются следующим образом:

$$(D_\pm^\alpha x)(u) := A_\alpha \int_0^\infty \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

где $A_\alpha = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$ (в случае $G = \mathbb{R}_+$ данной формулой определяется только правосторонняя производная $D_-^\alpha x$).

Усеченные дробные производные Маршо определяются так [14]:

$$(D_{\pm,h}^\alpha x)(u) := A_\alpha \int_h^\infty \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad h > 0.$$

Рассматриваемая нами задача о неравенствах типа Колмогорова состоит в оценке $\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(G)}$ через $\|x\|_{L_p(G)}$ и $\|x\|_{H_p^\omega(G)}$, или, что эквивалентно, в решении следующей экстремальной задачи на классе $UH_p^\omega(G)$:

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(G)} \to \sup, \quad \|x\|_{L_p(G)} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

Общая постановка задачи наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами (см. [15], а также, например, [1; 2; 4, с. 391]) состоит в следующем.

Пусть X, Y — банаховы пространства; $A\colon X \to Y$ — некоторый оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D(A) \subset X$; $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$ — множество линейных ограниченных операторов T, которые действуют из X в Y и нормы которых $\|T\| = \|T\|_{X\to Y}$ не превышают числа $N > 0$; $Q \subset D(A)$ — некоторый класс элементов. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|Ax - Tx\|_Y : x \in Q\right\}$$

называется уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а величина

$$E(N) = E(N; A, Q) := \inf\left\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1}$$

— наилучшим приближением оператора A множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q.

Задача состоит в вычислении (исследовании) величины $E(N)$ и отыскании (исследовании вопросов существования, единственности, характеризации) экстремального оператора, т. е. оператора, реализующего нижнюю грань в правой части (1).

Для пространств X и Y, оператора A и класса Q функцию

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta, Q) = \sup\left\{\|Ax\|_Y : x \in Q,\ \|x\|_X \le \delta\right\} \tag{2}$$

переменной δ называют модулем непрерывности оператора A на классе Q. Задача вычисления модуля непрерывности $\Omega(\delta)$ является (см., например, [4]) абстрактной версией задачи о точном неравенстве типа Колмогорова.

Пусть, далее,

$$\Delta(N) = \Delta(N, Q) = \sup\left\{\|Ax\|_Y - N\|x\|_X : x \in Q\right\} = \sup\left\{\Omega(\delta) - N\delta\colon \delta > 0\right\},$$

$$l(\delta) = \inf\left\{E(N) + N\delta\colon N \ge 0\right\}.$$

Следующая теорема С. Б. Стечкина дает простую, но часто используемую и эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности и, таким образом, устанавливает связь задачи наилучшего приближения неограниченных операторов с задачей о точных неравенствах типа Колмогорова.

Теорема 1 [15] (см. также [1, 2] и [4, с. 392] (теорема 7.1.1))**.** *Если A — однородный* (*в частности, линейный*) *оператор, Q — центрально-симметричное выпуклое множество из области определения оператора A, то выполняются неравенства*

$$E(N) \ge \Delta(N), \quad N \ge 0,$$

$$\Omega(\delta) \le l(\delta), \quad \delta \ge 0.$$

Если при этом существуют элемент $x \in Q$ и линейный ограниченный оператор T такие, что

$$\|Ax\|_Y = U(T) + \|T\|\,\|x\|_X, \tag{3}$$

то справедливы равенства

$$\omega\left(\|x\|_X\right)=\|Ax\|_Y\,,\quad E\left(\|T\|\right)=U\left(T\right)=\|Ax\|_Y-\|T\|\,\|x\|_X\,,$$

и, значит, оператор T является экстремальным в задаче (1) *при* $N=\|T\|$, *а элемент x — в задаче* (2) *при* $\delta=\|x\|_X$.

Многие задачи вычислительной математики, теории функций и других разделов математики являются некорректными задачами восстановления значений оператора A на элементах класса $Q\subset D(A)$ в предположении, что элементы класса Q заданы с известной погрешностью. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}$ операторов (однозначных отображений), действующих из пространства X в пространство Y. При этом в качестве $\mathcal{R}$, как правило, берется одно из следующих множеств:

$\mathcal{O}=\mathcal{O}(X,Y)$ — множество всех отображений пространства X в пространство Y;

$\mathcal{L}=\mathcal{L}(X,Y)$ — множество линейных операторов, действующих из X в Y;

$\mathcal{B}=\mathcal{B}(X,Y)$ — множество всех линейных ограниченных операторов из X в Y;

$\mathcal{L}(N)=\mathcal{L}(N;X,Y)$ — множество операторов из $\mathcal{B}$, норма которых не превышает N.

Для числа $\delta\geq 0$ и оператора $T\in\mathcal{R}$ положим

$$U_\delta\left(T\right):=\sup\left\{\|Ax-T\eta\|_Y:x\in Q,\ \eta\in X,\ \|x-\eta\|_X\leq\delta\right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{R}\right)=\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{R};A,Q\right)=\inf\left\{U_\delta\left(T\right):T\in\mathcal{R}\right\}\tag{4}$$

есть величина наилучшего восстановления оператора A с помощью множества отображений (методов восстановления) $\mathcal{R}$ на элементах класса Q, заданных с погрешностью δ.

Связь задачи (4) с неравенствами типа Колмогорова, с одной стороны, и задачей приближения неограниченных операторов ограниченными, с другой, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2 [1, 2], [4, с. 403] (теорема 7.1.4). *Если $\Omega(\delta)$ — выпуклая вверх на $[0,\infty]$ функция и для любого $N>0$*

$$E(N)=\sup_{\delta>0}\{\Omega(\delta)-N\delta\},$$

то для любого $\delta>0$

$$\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{O}\right)=\mathcal{E}_\delta\left(\mathcal{L}\right)=\Omega\left(\delta\right),$$

причем экстремальные операторы в задаче (1) *и задаче восстановления оператора при $\delta>0$, если N является субдифференциалом* (*производной*) *Ω при этом фиксированном δ, совпадают.*

3. Решение задач о наилучшем приближении и оптимальном восстановлении операторов дробного дифференцирования. Пусть $\alpha\in(0;1)$, $G=\mathbb{R}$ или $G=\mathbb{R}_+$, $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности, такой, что

$$\int\limits_0^1\frac{\omega\left(t\right)}{t^{1+\alpha}}dt<\infty.\tag{5}$$

Для операторов дробного дифференцирования $D^{\alpha}_{\pm}\colon L_p(G) \to L_p(G)$, $1 \le p < \infty$ (при $G = \mathbb{R}_+$ только для D^{α}_{-}), будем рассматривать задачу наилучшего приближения этих операторов множеством линейных ограниченных операторов $T\colon L_p(G) \to \to L_p(G)$, для которых $\|T\| \le N$, $N > 0$, на классе $UH^{\omega}_p(G)$.

С этой целью оценим уклонение оператора дробного дифференцирования D^{α}_{-} от оператора взятия усеченной дробной производной $D^{\alpha}_{-,h}$ и покажем, что оператор $D^{\alpha}_{-,h}$ и будет экстремальным в нашей задаче для пространства $L_1(G)$ (рассуждения в случае оператора D^{α}_{+} аналогичны).

Прежде всего покажем, что линейный оператор $D^{\alpha}_{-,h}$ является ограниченным. Используя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\left\|D^{\alpha}_{-,h}x\right\|_{L_p(G)} = A_\alpha \left\|\int\limits_h^\infty \frac{x(\cdot) - x(\cdot + t)}{t^{1+\alpha}}dt\right\|_{L_p(G)} \le$$

$$\le A_\alpha \int\limits_h^\infty \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{L_p(G)}}{t^{1+\alpha}}dt \le A_\alpha \int\limits_h^\infty \frac{2\,\|x\|_{L_p(G)}}{t^{1+\alpha}}dt = \frac{2A_\alpha}{\alpha h^\alpha}\,\|x\|_{L_p(G)}\,.$$

Следовательно,

$$\left\|D^{\alpha}_{-,h}\right\| = \sup_{\|x\|_{L_p(G)} \le 1} \left\|D^{\alpha}_{-,h}x\right\|_{L_p(G)} \le \frac{2A_\alpha}{\alpha h^\alpha}.$$

Полагая

$$h = h_N = \left(\frac{2A_\alpha}{\alpha N}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{2}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha},$$

видим, что оператор D^{α}_{-,h_N} принадлежит множеству приближающих операторов (операторов, нормы которых не превышают N).

Снова используя обобщенное неравенство Минковского и принадлежность функции x множеству $UH^{\omega}_p(G)$, получаем следующую оценку уклонения:

$$U\left(D^{\alpha}_{-,h}\right) = \sup_{x \in UH^{\omega}_p(G)} \left\|D^{\alpha}_{-}x - D^{\alpha}_{-,h}x\right\|_{L_p(G)} =$$

$$= A_\alpha \sup_{x \in UH^{\omega}_p(G)} \left\|\int\limits_0^h \frac{x(\cdot) - x(\cdot + t)}{t^{1+\alpha}}dt\right\|_{L_p(G)} \le$$

$$\le A_\alpha \sup_{x \in UH^{\omega}_p(G)} \int\limits_0^h \frac{\|x(\cdot) - x(\cdot + t)\|_{L_p(G)}}{t^{1+\alpha}}dt \le$$

$$\le A_\alpha \sup_{x \in UH^{\omega}_p(G)} \|x\|_{H^{\omega}_p(G)} \int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt = A_\alpha \int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Сопоставляя полученные оценки, приходим к аддитивному неравенству, которое выполняется для произвольной функции $x \in H^{\omega}_p(G)$ и произвольного $h > 0$:

$$\left\|D_-^\alpha x\right\|_{L_p(G)} \le \left\|D_-^\alpha x - D_{-,h}^\alpha x\right\|_{L_p(G)} + \left\|D_{-,h}^\alpha x\right\|_{L_p(G)} \le$$

$$\le A_\alpha \left\|x\right\|_{H_p^\omega(G)} \int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{2A_\alpha}{\alpha h^\alpha} \left\|x\right\|_{L_p(G)}. \tag{6}$$

В случае $G = \mathbb{R}$ неравенство (6) было получено авторами в [8], причем при $p = 1$ доказана его точность; экстремальная функция для любого $h > 0$ имеет вид

$$x_h(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega'(u), & u \in (0,h), \\ 0, & u \notin (0,h), \end{cases} \tag{7}$$

где $\omega(\cdot)$ — локально абсолютно непрерывная функция на полуоси $[0,\infty)$. Заметим, что в случае $G = \mathbb{R}_+$ при $p = 1$ неравенство (6) также является точным в том смысле, что ни одну из констант в правой части (при фиксированной другой) нельзя уменьшить, поскольку тогда для достаточно большого $\delta > 0$ функция

$$x_{h,\delta}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega'(u-\delta), & u \in (\delta, h+\delta), \\ 0, & u \in \mathbb{R}_+ \setminus (\delta, h+\delta), \end{cases} \tag{8}$$

будет удовлетворять неравенству противоположного смысла: ее нормы, содержащиеся в правой части неравенства, равны соответственно

$$\left\|x_{h,\delta}\right\|_{H_1^\omega(\mathbb{R}_+)} = 1, \quad \left\|x_{h,\delta}\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} = \frac{\omega(h)}{2}$$

(т. е. совпадают с такими же нормами экстремали на оси), а L_1-норма дробной производной, стоящей слева, стремится к норме дробной производной экстремали на оси при $\delta \to \infty$. Все нормы вычисляются непосредственно; пример такого вычисления будет дан ниже, в доказательстве точности неравенства для усеченной производной.

При $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \alpha < \beta \le 1$, для произвольной функции $x \in H_p^\beta(G)$ неравенство записывается в мультипликативной форме

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(G)} \le \frac{A_\alpha 2^{1-\alpha/\beta}}{\alpha(1-\alpha/\beta)} \left\|x\right\|_{L_p(G)}^{1-\alpha/\beta} \left\|x\right\|_{H_p^\beta(G)}^{\alpha/\beta}$$

и при $G = \mathbb{R}$ и $p = 1$ является точным с экстремальной функцией вида (7), построенной по $\omega(t) = t^\beta$. При $G = \mathbb{R}_+$ и $p = 1$ точность неравенства получается с помощью функций (8) при $\omega(t) = t^\beta$.

Полученное аддитивное неравенство (6) эквивалентно неравенству

$$\left\|D_\pm^\alpha x\right\|_{L_p(G)} \le A_\alpha \int\limits_0^\infty \frac{\min\{2\left\|x\right\|_{L_p(G)}, \left\|x\right\|_{H_p^\omega(G)}\omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt \tag{9}$$

(при $G = \mathbb{R}_+$ только для D_-^α).

Учитывая сделанное замечание, получаем следующую оценку для модуля непрерывности оператора дробного дифференцирования.

Теорема 3. *Пусть* $G = \mathbb{R}$ *или* $G = \mathbb{R}_+$, $1 \le p < \infty$, *модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha \in (0,1)$ *таковы, что выполнено условие* (5). *Тогда для модулей непрерывности операторов* $D_{\pm}^{\alpha}$ (*при* $G = \mathbb{R}_+$ *только оператора* D_{-}^{α}) *на классе* $UH_p^{\omega}(G)$ *при любом* $\delta > 0$ *справедлива оценка*

$$\Omega\left(\delta, UH_p^{\omega}(G)\right) \le A_{\alpha} \int\limits_0^{\infty} \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

В случае, когда $p = 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(t)$ *является локально абсолютно непрерывной функцией,*

$$\Omega\left(\delta, UH_1^{\omega}(G)\right) = A_{\alpha} \int\limits_0^{\infty} \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt.$$

В частности, если $0 < \alpha < \beta \le 1$, *то*

$$\Omega\left(\delta, UH_1^{\beta}(G)\right) = \frac{A_{\alpha} 2^{1-\alpha/\beta}}{\alpha(1-\alpha/\beta)} \delta^{1-\alpha/\beta}.$$

Продолжим решение задачи о наилучшем приближении оператора дробного дифференцирования. При найденном h_N для функций с единичной нормой $\|x\|_{H_p^{\omega}(G)} = 1$ полученное аддитивное неравенство можно дополнить промежуточным звеном:

$$\left\|D_{-}^{\alpha} x\right\|_{L_p(G)} \le \left\|D_{-}^{\alpha} x - D_{-,h_N}^{\alpha} x\right\|_{L_p(G)} + \left\|D_{-,h_N}^{\alpha} x\right\|_{L_p(G)} \le$$

$$\le U\left(D_{-,h_N}^{\alpha}\right) + N\|x\|_{L_p(G)} \le A_{\alpha} \int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{2A_{\alpha}}{\alpha h_N^{\alpha}} \|x\|_{L_p(G)}.$$

Поскольку неравенство (6) точное при $G = \mathbb{R}$ и $p = 1$, для экстремальной функции x_{h_N} имеет место равенство

$$\left\|D_{-}^{\alpha} x_{h_N}\right\|_{L_1(\mathbb{R})} = U\left(D_{-,h_N}^{\alpha}\right) + \left\|D_{-,h_N}^{\alpha}\right\| \|x_{h_N}\|_{L_1(\mathbb{R})}.$$

Тогда по теореме 1

$$E(N) = E\left(\left\|D_{-,h_N}^{\alpha}\right\|\right) = U\left(D_{-,h_N}^{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{\left(\frac{2}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt,$$

и оператор D_{-,h_N}^{α} является оператором наилучшего приближения при найденном h_N.

В случае полуоси $G = \mathbb{R}_+$ и $p = 1$ мы не можем указать экстремальную функцию типа (7) и для вычисления величины наилучшего приближения поступим иначе.

Из оценки уклонения оператора D_{-,h_N}^{α} от D_{-}^{α}, полученной при выводе неравенства (6), следует, что

$$E\left(N\right) \leq U\left(D^{\alpha}_{-,h_N}\right) \leq A_\alpha \int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Оценим величину $E\left(N\right)$ снизу. Из теорем 1 и 3 при условии строгого неограниченного возрастания модуля непрерывности $\omega(t)$ получаем

$$E(N) \geq \sup_{\delta>0}\{\Omega(\delta) - N\delta\} = \sup_{\delta>0}\left\{A_\alpha \int\limits_0^{\infty} \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}}dt - N\delta\right\} =$$

$$= \sup_{\delta>0}\left\{A_\alpha \int\limits_0^{\omega^{-1}(2\delta)} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt + A_\alpha \int\limits_{\omega^{-1}(2\delta)}^{\infty} \frac{2\delta}{t^{1+\alpha}}dt - N\delta\right\}.$$

Отсюда, выбирая $\delta = \delta_N = \dfrac{1}{2}\omega(h_N)$ и учитывая соотношение $N = \dfrac{2A_\alpha}{\alpha h_N^\alpha}$, имеем

$$E(N) \geq A_\alpha \int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt + A_\alpha \cdot 2\delta_N \int\limits_{h_N}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} - N\delta_N =$$

$$= A_\alpha \int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt + \frac{2A_\alpha}{\alpha h_N^\alpha}\delta_N - N\delta_N = A_\alpha \int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Следовательно,

$$E(N) \geq A_\alpha \int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $G = \mathbb{R}$ или $G = \mathbb{R}_+$, $\omega(t)$ — некоторый неограниченно строго возрастающий модуль непрерывности, $\alpha \in (0;1)$ такое, что выполняется условие* (5). *Тогда для наилучшего приближения $E\left(N\right)$ операторов $D^\alpha_\pm$ (при $G = \mathbb{R}_+$ только D^α_-) на классе $UH^\omega_1\left(G\right)$ справедливо равенство*

$$E\left(N\right) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{\left(\frac{2}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

причем операторами наилучшего приближения являются операторы $D^\alpha_{\pm,h_N}$ при

$$h_N = \left(\frac{2}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{2A_\alpha}{\alpha N}\right)^{1/\alpha}.$$

***Следствие* 1.** *Пусть $G = \mathbb{R}$ или $G = \mathbb{R}_+$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Для наилучшего приближения $E\left(N\right)$ операторов дробного дифференцирования $D^\alpha_\pm$ в форме Маршо (при $G = \mathbb{R}_+$ только D^α_-) на классе $UH^\beta_1\left(G\right)$ справедливо равенство*

$$E(N) = \left(\frac{2}{N}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \frac{\alpha}{(\beta-\alpha)\,\Gamma^{\frac{\beta}{\alpha}}(1-\alpha)},$$

причем операторами наилучшего приближения являются определенные в теореме 4 *операторы* $D^{\alpha}_{\pm,h_N}$.

Кроме того, с помощью теорем 2 и 3 получаем решение задачи оптимального восстановления операторов дробного дифференцирования $D^{\alpha}_{\pm}$ в форме Маршо на классах $UH^{\omega}_1(G)$ и $UH^{\beta}_1(G)$ функций, заданных с погрешностью δ, т. е. имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *В условиях теоремы* 4 *при любом* $\delta > 0$ *справедливы следующие равенства*:

на классе $UH^{\omega}_1(G)$

$$\mathcal{E}_{\delta}(\mathcal{L}) = A_{\alpha} \int\limits_0^{\infty} \frac{\min\{2\delta, \omega(t)\}}{t^{1+\alpha}} dt,$$

на классе $UH^{\beta}_1(G)$

$$\mathcal{E}_{\delta}(\mathcal{L}) = \frac{A_{\alpha} 2^{1-\alpha/\beta}}{\alpha(1-\alpha/\beta)} \delta^{1-\alpha/\beta}.$$

4. Неравенства с нормой усеченной производной. Рассмотрим теперь неравенства типа (6), в которых вместо интегральной нормы функции x используются более индивидуальные, чем норма, характеристики функции. На целесообразность получения неравенств типа Колмогорова с такими характеристиками обращал внимание С. Б. Стечкин (см. [15]). В качестве таких характеристик мы используем L_p-нормы усеченных производных.

Теорема 6. *Пусть* $G = \mathbb{R}$ *или* $G = \mathbb{R}_+$, *модуль непрерывности* $\omega(t)$ *и число* $\alpha \in (0,1)$ *таковы, что выполнено условие* (5). *Тогда для любой функции* $x \in H^{\omega}_p(G)$, $1 \le p < \infty$, *и любого* $h > 0$ *имеют место неравенства*

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm}x\right\|_{L_p(G)} \le \left\|D^{\alpha}_{\pm,h}x\right\|_{L_p(G)} + A_{\alpha}\left\|x\right\|_{H^{\omega}_p(G)} \int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}} du$$

(*при* $G = \mathbb{R}_+$ *только для* D^{α}_{-}). *В случае, когда* $p = 1$ *и модуль непрерывности* $\omega(t)$ *является локально абсолютно непрерывной функцией, неравенства являются точными.*

Доказательство. Для любого $h > 0$ имеем (при $G = \mathbb{R}_+$ рассматривается только правосторонняя производная D^{α}_{-})

$$\left\|D^{\alpha}_{\pm}x\right\|_{L_p(G)} = A_{\alpha}\left\| \int\limits_0^h \frac{x(\cdot)-x(\cdot\mp t)}{t^{1+\alpha}} dt + \int\limits_h^{\infty} \frac{x(\cdot)-x(\cdot\mp t)}{t^{1+\alpha}} dt \right\|_{L_p(G)} \le$$

$$\le A_{\alpha}\left\| \int\limits_0^h \frac{x(\cdot)-x(\cdot\mp t)}{t^{1+\alpha}} dt \right\|_{L_p(G)} + A_{\alpha}\left\| \int\limits_h^{\infty} \frac{x(\cdot)-x(\cdot\mp t)}{t^{1+\alpha}} dt \right\|_{L_p(G)}.$$

Второе слагаемое представляет собой L_p-норму усеченной производной. Применяя к первому слагаемому обобщенное неравенство Минковского и учитывая принадлежность функции x множеству $H_p^{\omega}(G)$, последовательно получаем

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}x\right\|_{L_p(G)} \le A_{\alpha}\int\limits_h^{\infty}\frac{\|x(\cdot)-x(\cdot\mp t)\|_{L_p(G)}}{t^{1+\alpha}}dt+\left\|D_{\pm,h}^{\alpha}x\right\|_{L_p(G)} \le$$

$$\le A_{\alpha}\,\|x\|_{H_p^{\omega}(G)}\int\limits_0^h\frac{\omega\,(u)}{u^{1+\alpha}}du+\left\|D_{\pm,h}^{\alpha}x\right\|_{L_p(G)},$$

и неравенство доказано.

Докажем сначала его точность в случае $G=\mathbb{R}$ для D_{-}^{α} (для D_{+}^{α} рассуждения аналогичны). Это неравенство обращается в равенство для функций (7). Действительно, найдем $\|x_h\|_{H_1^{\omega}(\mathbb{R})}$. При $t\in(0,h)$ имеем

$$\|x_h(\cdot)-x_h(\cdot-t)\|_{L_1(\mathbb{R})}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\omega(t)+\omega(h-t)-\omega(h)+\omega(t)+\omega(h)-\omega(h-t)\right)=\omega(t),$$

при $t>h$

$$\|x_h(\cdot)-x_h(\cdot-t)\|_{L_1(\mathbb{R})}=\omega(h).$$

Значит,

$$\|x_h\|_{H_1^{\omega}(\mathbb{R})}=1.$$

Теперь найдем $\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})}$. Имеем

$$\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})}=A_{\alpha}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_0^h\right)\left|\int\limits_0^{\infty}\frac{x_h(u)-x_h(u+t)}{t^{1+\alpha}}dt\right|du.$$

Для $u<0$

$$x_h(u)-x_h(u+t)=\begin{cases}0, & 0\le t<-u,\\ -\dfrac{1}{2}\omega'(t+u), & -u<t<h-u,\\ 0, & t>h-u.\end{cases}$$

Если $0<u<h$, то

$$x_h(u)-x_h(u+t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\omega'(u)-\dfrac{1}{2}\omega'(u+t), & 0\le t<h-u,\\ \dfrac{1}{2}\omega'(u), & t>h-u.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})}=\frac{1}{2}\left(A_{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-u}^{h-u}\frac{\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}}dt\,du+\right.$$

$$+A_\alpha \int\limits_0^h \int\limits_0^{h-u} \frac{\omega'(u)-\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dtdu + A_\alpha \int\limits_0^h \omega'(u) \int\limits_{h-u}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt\, du \right) =$$

$$= \frac{1}{2} A_\alpha (I_1 + I_2 + I_3).$$

Вычислим I_1:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-u}^{h-u} \frac{\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dtdu = \int\limits_0^\infty \int\limits_u^{h+u} \frac{\omega'(t-u)}{t^{1+\alpha}} dtdu =$$

$$= \int\limits_0^h \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int\limits_0^t \omega'(t-u)du + \int\limits_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int\limits_{t-h}^t \omega'(t-u)du =$$

$$= \int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \omega(h) \int\limits_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Теперь вычислим I_2:

$$I_2 = \int\limits_0^h \int\limits_0^{h-u} \frac{\omega'(u)-\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dtdu = \int\limits_0^h \int\limits_0^{h-t} \frac{\omega'(u)-\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dudt =$$

$$= \int\limits_0^h \frac{\omega(h-t)-\omega(h)+\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Наконец, найдем I_3:

$$I_3 = \int\limits_0^h \omega'(u) \int\limits_{h-u}^\infty \frac{1}{t^{1+\alpha}} dtdu = \int\limits_0^h \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int\limits_{h-t}^h \omega'(u)du + \int\limits_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int\limits_0^h \omega'(u)du =$$

$$= \int\limits_0^h \frac{\omega(h)-\omega(h-t)}{t^{1+\alpha}} dt + \omega(h) \int\limits_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \int\limits_0^h \frac{\omega(h)-\omega(h-t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Таким образом,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 2 \left(\int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha} \right).$$

Следовательно,

$$\left\| D_-^\alpha x_h \right\|_{L_1(\mathbb{R})} = A_\alpha \left(\int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha} \right).$$

Теперь найдем $\left\|D^{\alpha}_{-,h}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})}$. Имеем

$$\left\|D^{\alpha}_{-,h}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})} = A_\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{h}^{\infty} \frac{x_h(u) - x_h(u+t)}{t^{1+\alpha}} dt \right| du.$$

Поскольку $t > h$, то

$$x_h(u) - x_h(u+t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\omega'(t+u), & -t < u < h-t, \\ \dfrac{1}{2}\omega'(u), & 0 < u < h, \\ 0, & u \notin (-t, h-t) \cup (0,h), \end{cases}$$

т. е. при $u < -h$

$$x_h(u) - x_h(u+t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\omega'(t+u), & -u < t < h-u, \\ 0, & t \notin (-u, h-u), \end{cases}$$

при $-h < u < 0$

$$x_h(u) - x_h(u+t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\omega'(t+u), & h < t < h-u, \\ 0, & t \notin (h, h-u), \end{cases}$$

при $0 < u < h$

$$x_h(u) - x_h(u+t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega'(u), & h < t < \infty, \\ 0, & t < h. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\left\|D^{\alpha}_{-,h}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\left(A_\alpha \int\limits_{-\infty}^{-h} \int\limits_{-u}^{h-u} \frac{\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dt\, du + \right.$$

$$\left. + A_\alpha \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{h}^{h-u} \frac{\omega'(t+u)}{t^{1+\alpha}} dt du + A_\alpha \int\limits_{0}^{h} \omega'(u) \int\limits_{h}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}} dt\, du \right).$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\left\|D^{\alpha}_{-,h}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})} = \frac{1}{2}\left(A_\alpha \int\limits_{h}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int\limits_{-t}^{h-t} \omega'(t+u) du + \int\limits_{h}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int\limits_{0}^{h} \omega'(u) du \right) =$$

$$= A_\alpha \omega(h) \int\limits_{h}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = A_\alpha \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Используя значения $\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})}$ и $\|x_h\|_{H_1^{\omega}(\mathbb{R})}$, имеем

$$\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})} = A_\alpha\left(\int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}\right) =$$

$$= \left\|D_{\pm,h}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R})} + A_\alpha\|x_h\|_{H_1^{\omega}(\mathbb{R})}\int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du.$$

Точность неравенства при $p=1$ для $G=\mathbb{R}$ доказана.

Докажем теперь точность неравенства для $G=\mathbb{R}_+$.

Для сужения x_h на полуось $\mathbb{R}_+$, за которым сохраним обозначение x_h, имеем

$$\|x_h\|_{H_1^{\omega}(\mathbb{R}_+)} = \frac{1}{2}$$

и

$$\left\|D_{-,h}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} = A_\alpha\int\limits_0^h\int\limits_h^\infty \frac{x_h(u)-x_h(u+t)}{t^{1+\alpha}}dt\,du =$$

$$= \frac{A_\alpha}{2}\int\limits_0^h \omega'(u)du\int\limits_h^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} = \frac{A_\alpha}{2}\frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}.$$

Вычисляя $\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$, получаем

$$\left\|D_{-}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} = \frac{A_\alpha}{2}\left(\int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du + \frac{\omega(h)}{\alpha h^\alpha}\right) =$$

$$= \left\|D_{-,h}^{\alpha}x_h\right\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} + A_\alpha\|x_h\|_{H_1^{\omega}(\mathbb{R}_+)}\int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u^{1+\alpha}}du.$$

Точность неравенства при $p=1$ доказана.

Отметим, что

$$\left\|D_{\pm,h}^{\alpha}x\right\|_{L_p(G)} \le A_\alpha\int\limits_h^\infty \frac{\|x(u)-x(u\mp t)\|_{L_p(G)}}{t^{1+\alpha}}dt \le$$

$$\le A_\alpha\int\limits_h^\infty \frac{2\|x\|_{L_p(G)}}{t^{1+\alpha}}dt = A_\alpha\frac{2\|x\|_{L_p(G)}}{\alpha h^\alpha}.$$

Поэтому из доказанной теоремы вытекает неравенство (6), из которого, как уже отмечалось, следует неравенство (9).

1. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.

2. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42 – 63.
3. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 9 – 29.
4. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
5. *Arestov V. V.* Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approxim. Theory. – 1979. – **4**. – P. 19 – 34.
6. *Бабенко В. Ф., Чурілова М. Г.* Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 16 – 20.
7. *Babenko V. F., Churilova M. G.* On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives // East J. Approxim. – 2002. – **8**, № 4. – P. 437 – 446.
8. *Бабенко В. Ф., Чурилова М. С.* О неравенствах для L_p-норм дробных производных на оси // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 12. – С. 26 – 30.
9. *Бабенко В. Ф., Чурілова М. С.* Про нерівності типу Колмогорова для дробових похідних функцій, заданих на дійсній осі // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 13. – С. 28 – 34.
10. *Гейсберг С. П.* Обобщение неравенства Адамара. Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций // Сб. научн. трудов ЛОМИ. – 1965. – **50**. – С. 42 – 54.
11. *Magarill-Il'jaev G. G., Tikhomirov V. M.* On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal. Math. – 1981. – **7**. – P. 37 – 47.
12. *Чурилова М. С.* О неравенствах типа Ландау – Колмогорова для дробных производных на отрезке // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005. – № 6, вип. 10. – С. 127 – 134.
13. *Чурилова М. С.* О неравенствах для дробных производных банаховозначных функций из гельдеровых пространств // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2006. – № 11, вип. 10. – С. 120 – 127.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
15. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 137 – 148.

Получено 05.07.11