УДК 512.544

**О. Ю. Дашкова** (Днепропетр. нац. ун-т)

# О МОДУЛЯХ НАД ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С РАНГОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДГРУППЫ

We study the $\mathbb{Z}G$-module $A$ such that $\mathbb{Z}$ is the ring of integers, the group $G$ has infinite section $p$-rank (or infinite 0-rank), $C_G(A) = 1$, $A$ is not a minimax $\mathbb{Z}$-module, and, for every proper subgroup $H$ of infinite section $p$-rank (or infinite 0-rank, respectively), the quotient module $A/C_A(H)$ is a minimax $\mathbb{Z}$-module. It is proved that if the group $G$ under consideration is locally solvable, then $G$ is a solvable group. Some properties of a solvable group of this type are obtained.

Досліджується $\mathbb{Z}G$-модуль $A$ такий, що $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел, група $G$ має нескінченний секційний $p$-ранг (або нескінченний 0-ранг), $C_G(A) = 1$, $A$ не є мінімаксним $\mathbb{Z}$-модулем та для кожної власної підгрупи $H$ нескінченного секційного $p$-рангу (або нескінченного 0-рангу відповідно) фактор-модуль $A/C_A(H)$ є мінімаксним $\mathbb{Z}$-модулем. Доведено, що якщо група $G$ локально розв'язна, то група $G$ розв'язна. Отримано деякі властивості розв'язної групи цього типу.

**1. Введение.** Пусть $A$ — векторное пространство над полем $F$. Подгруппы группы $GL(F, A)$ всех автоморфизмов пространства $A$ называются линейными группами. Если $A$ имеет конечную размерность над полем $F$, $GL(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n \times n)$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки и изучены достаточно полно. В случае, когда пространство $A$ имеет бесконечную размерность над полем $F$, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. Одним из таких ограничений является финитарность линейной группы. Группа $G$ называется финитарной, если для каждого ее элемента $g$ подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в $A$ (см., например [1, 2]). В [3] было введено понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть $H$ — подгруппа группы $GL(F, A)$. $H$ действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $\operatorname{centdim}_F H$ как $\dim_F(A/C_A(H))$. Говорят, что подгруппа $H$ имеет конечную центральную размерность, если $\operatorname{centdim}_F H$ конечна, и $H$ имеет бесконечную центральную размерность, если $\operatorname{centdim}_F H$ бесконечна.

В [4] изучались линейные группы бесконечной центральной размерности и бесконечного ранга, у которых каждая собственная подгруппа бесконечного ранга имеет конечную центральную размерность, для различных рангов группы.

Напомним, что группа $G$ имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если $G$ обладает конечным субнормальным рядом с $r$ бесконечными циклическими факторами, все остальные факторы которого периодические. 0-ранг группы не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом.

Пусть теперь $p$ — простое число. Говорят, что группа $G$ имеет конечный секционный $p$-ранг $r_p(G) = r$, если каждая элементарная абелева $p$-секция группы $G$ имеет порядок, не превышающий $p^r$, и существует элементарная абелева $p$-секция $U/V$ такая, что $|U/V| = p^r$. Мы будем говорить о секционном p-ранге, подразумевая, что $p = 0$, или $p$ — простое число, делая необходимые оговорки, если это необходимо. В дальнейшем для удобства изложения секционный $p$-ранг группы будем называть $p$-рангом группы.

В работе также используются понятия абелева секционного ранга группы и специального ранга группы. Группа $G$ имеет конечный абелев секционный ранг, если каждая абелева секция группы $G$ имеет конечный $p$-ранг для всех $p \geq 0$. Бэр и Хайнекен доказали, что для разрешимых (и даже гиперабелевых) групп конечность абелева секционного ранга эквивалентна конечности абелева подгруппового ранга (группа $G$ имеет конечный абелев подгрупповой ранг, если все абелевы подгруппы группы $G$ имеют конечный $p$-ранг для всех $p \geq 0$) [5]. Группа $G$ имеет конечный специальный ранг $r(G) = r$, если $r$ является наименьшим числом с тем свойством, что каждая конечнопорожденная подгруппа группы $G$ может быть порождена не более чем $r$ элементами. Это определение было введено А. И. Мальцевым [6]. Специальный ранг группы иногда называют рангом Прюфера – Мальцева.

Если $G \leq GL(F, A)$, то $A$ можно рассматривать как $FG$-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $RG$-модуля $A$, где $R$ — кольцо, структура которого близка к структуре поля. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введенное в [7]. Пусть $A$ — $RG$-модуль, где $R$ — кольцо, $G$ — группа. Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $R$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы $H$ в модуле $A$.

Отметим, что до настоящего времени исследование алгебраических систем, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности, остается актуальным. Примерами таких систем являются классы нетеровых и артиновых модулей. Напомним, что модуль называется артиновым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию минимальности. Модуль называется нетеровым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Естественным обобщением классов артиновых и нетеровых модулей является класс минимаксных модулей (см. гл. 7 [8]). $R$-модуль $A$ называется минимаксным, если он имеет конечный ряд подмодулей, каждый фактор которого является либо нетеровым $R$-модулем, либо артиновым $R$-модулем.

В [9] исследовался $RG$-модуль $A$ такой, что $R$ — дедекиндова область, коцентрализатор группы $G$ в модуле $A$ не является артиновым $R$-модулем, $C_G(A) = 1$, $G$ — локально разрешимая группа бесконечного ранга и коцентрализатор каждой собственной подгруппы $H$ в модуле $A$, имеющей бесконечный ранг, является артиновым $R$-модулем. Было установлено, что локально разрешимая группа $G$, удовлетворяющая заданным условиям, разрешима, и описана структура группы $G$. В [10] рассматривалась аналогичная проблема для условия нетеровости. Изучался $RG$-модуль $A$ такой, что $R$ — коммутативное нетерово кольцо, коцентрализатор группы $G$ в модуле $A$ не является нетеровым $R$-модулем, $C_G(A) = 1$, $G$ — локально разрешимая группа бесконечного ранга, и коцентрализатор каждой собственной подгруппы $H$ в модуле $A$, имеющей бесконечный ранг, является нетеровым $R$-модулем. В этом случае также было установлено, что локально разрешимая группа $G$, удовлетворяющая заданным условиям, разрешима, и описана ее структура. Рассматривались случаи различных рангов группы – $p$-ранга группы, 0-ранга группы, абелева секционного и специального рангов группы.

В настоящей работе рассматривается обобщение двух данных проблем. Изучается $RG$-модуль $A$ такой, что $R = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, коцентрализатор группы $G$ в модуле $A$ не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, $C_G(A) = 1$, $G$ — локально разрешимая группа бесконечного ранга и коцентрализатор каждой собственной подгруппы $H$ в модуле $A$, имеющей бесконечный ранг, является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Доказана разрешимость рассматриваемой группы $G$ (теоремы 4.2 – 4.4) и описана ее структура для различных рангов группы (теоремы 3.1 – 3.3). Как и в работах [9, 10], обобщаются результаты о бесконечномерных линейных группах [4] на случай модулей с коммутативным кольцом скаляров.

**2. Предварительные результаты.** Сформулируем элементарные результаты, которые будут использоваться при доказательстве основных теорем.

В леммах 2.1, 2.2, 2.6, 2.7, 4.2, 4.3, 4.4 и теоремах 3.1 – 3.3, 4.2 – 4.4 рассматривается $\mathbb{Z}G$-модуль $A$ такой, что $C_G(A) = 1$ и коцентрализатор группы $G$ в модуле $A$ не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.

**Лемма 2.1**. *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы $M$ в $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) *Если $U$, $V$ — собственные подгруппы группы $G$ и $G = \langle U, V\rangle$, то по крайней мере одна из подгрупп $U$ или $V$ имеет конечный $p$-ранг.*

(ii) *Если $H$ — собственная подгруппа $G$, такая, что ранг $r_p(H)$ бесконечен, то коцентрализатор любой подгруппы $H$ и коцентрализатор любой собственной подгруппы группы $G$, содержащей $H$, являются минимаксными $\mathbb{Z}$-модулями.*

(iii) *Пусть $K$, $L$ — собственные подгруппы группы $G$, содержащие подгруппу $H$ такую, что ранг $r_p(H)$ бесконечен. Тогда $\langle K, L\rangle$ — собственная подгруппа группы $G$.*

**Лемма 2.2**. *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что ранг $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор $M$ в модуле $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Если $K$ — собственная нормальная подгруппа группы $G$ такая, что ранг $r_p(K)$ бесконечен и фактор-группа $G/K$ конечно порождена, то $G/K$ — циклическая $q$-группа для некоторого простого числа $q$.*

***Доказательство.*** Предположим, что $G = \langle K, S\rangle$ для некоторого конечного множества $S$ с тем свойством, что если $T$ — собственное подмножество множества $S$, то $G \neq \langle K, T\rangle$. Пусть $S$ состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если $n > 1$, то $\langle K, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle$ и $\langle K, x_n\rangle$ являются собственными подгруппами группы $G$, что противоречит лемме 2.1. Отсюда следует, что фактор-группа $G/K$ циклическая. В случаях, когда фактор-группа $G/K$ бесконечна либо $G/K$ конечна, но $|\pi(G/K)| > 1$, группа $G$ является произведением двух собственных подгрупп $G_1$ и $G_2$ таких, что ранги $r_p(G_1)$ и $r_p(G_2)$ бесконечны. Пришли к противоречию с леммой 2.1. Следовательно, фактор-группа $G/K$ — циклическая $q$-группа для некоторого простого числа $q$.

Лемма доказана.

**Лемма 2.3** [4]. *Пусть $G$ — группа и $q$ — простое число. Предположим, что $A$ — бесконечная нормальная элементарная абелева $q$-подгруппа группы $G$ такая, что фактор-группа $G/A$ конечна. Тогда $G$ порождается двумя подгруппами, имеющими бесконечный $q$-ранг.*

**Лемма 2.4** [4]. *Пусть $G$ — группа, $q$ — простое число и $A$ — нормальная делимая абелева $q$-подгруппа группы $G$ такая, что фактор-группа $G/A$ конечна. Если $A$*

*имеет бесконечный $q$-ранг, то $G$ порождается двумя собственными подгруппами, имеющими бесконечный $q$-ранг.*

**Лемма 2.5** [4]. *Пусть $G$ — группа, $A$ — нормальная абелева подгруппа группы $G$ такая, что $G/A$ — бесконечная периодическая почти абелева фактор-группа. Если $|\pi(G/A)| > 1$, то группа $G$ является произведением двух собственных подгрупп, содержащих $A$.*

**Лемма 2.6**. *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что ранг $r_p(M)$ бесконечен, централизатор подгруппы $M$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Если $K$ — нормальная подгруппа $H$, $H \leq G$, фактор-группа $H/K$ почти абелева и ранг $r_p(H/K)$ бесконечен, то коцентрализатор подгруппы $H$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.*

***Доказательство.*** Предположим сначала, что $p = 0$. Пусть $L$ — нормальная подгруппа группы $H$ такая, что фактор-группа $H/L$ конечна, а $L/K$ абелева. Если $r_0(L/K)$ бесконечен, то фактор-группа $L/K$ содержит свободную абелеву подгруппу $B/K$ такую, что ранг $r_0(B/K)$ бесконечен и фактор-группа $L/B$ периодическая. Поскольку фактор-группа $H/L$ конечна, подгруппа $B$ имеет конечное число сопряженных подгрупп в $H$. Обозначим эти подгруппы как $B_1, \ldots, B_m$. Если $C = \mathrm{core}_H B$, то существует вложение фактор-группы $L/C$ в прямое произведение $L/B_1 \times L/B_2 \times \ldots \times L/B_m$. Отсюда следует, что фактор-группа $L/C$ периодическая, и, поскольку $r_0(C/K)$ бесконечен, $r_0(C)$ также бесконечен. Отметим также, что фактор-группа $C/K$ является свободной абелевой. Если фактор-группа $H/C$ конечна либо $\pi(H/C) = 1$, то выберем простое число $q \notin \pi(H/C)$ и положим $D/K = (C/K)^q$. Если фактор-группа $H/C$ бесконечна и $|\pi(H/C)| > 1$, положим $D = C$. Тогда в каждом из этих случаев $H/D$ бесконечна и $|\pi(H/D)| > 1$, причем $r_0(D)$ бесконечен. Применяя леммы 2.5 и 2.1 к подгруппе $H$, видим, что коцентрализатор подгруппы $H$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.

Предположим теперь, что $p > 0$ и $L$ — подгруппа, определенная выше. Выберем свободную абелеву подгруппу $B/K$ фактор-группы $L/K$ такую, что фактор-группа $L/B$ является периодической. Если ранг $r_0(B/K)$ бесконечен, проводим те же рассуждения, что и в случае при $p = 0$. Поэтому полагаем, что $r_0(B/K)$ конечен. Как и ранее, если $C = \mathrm{core}_H B$, то фактор-группа $L/C$ периодическая, и $r_p(L/C)$ бесконечен. Рассматривая, если это необходимо, фактор-группу группы $L/C$ по ее силовской $p'$-подгруппе, получаем, что $L/C$ является $p$-группой. Если фактор-группа $L/L^pC$ бесконечна, то $H/L^pC$ удовлетворяет условиям леммы 2.3, и поэтому $H$ является произведением двух своих собственных подгрупп, имеющих бесконечный $p$-ранг. Таким образом, в этом случае коцентрализатор подгруппы $H$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Если фактор-группа $L/L^pC$ конечна, то для нее имеет место равенство $L/C = E/C \times D/C$ для некоторой конечной подгруппы $E/C$ и делимой подгруппы $D/C$. Поскольку фактор-группа $H/L$ конечна, а $L/C$ абелева, то фактор-группа $F/C = (E/C)^{H/C}$ также конечна. Более того, $L/F$ является делимой абелевой $p$-группой бесконечного $p$-ранга, и, применяя лемму 2.4 к фактор-группе $H/F$, получаем, что $H$ является произведением двух своих собственных подгрупп, каждая из которых имеет бесконечный $p$-ранг, и, следовательно, коцентрализатор подгруппы $H$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.

Лемма доказана.

**Лемма 2.7**. *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы $M$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Если $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ и фактор-группа $G/H$ почти абелева, то $G/H$ изоморфна подгруппе $C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$.*

***Доказательство.*** Достаточно рассмотреть случай, когда $G \neq H$. Если $r_p(G/H)$ бесконечен, то коцентрализатор группы $G$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем по лемме 2.6. Таким образом, $r_p(G/H)$ конечен, и поэтому ранг $r_p(H)$ бесконечен. Более того, если фактор-группа $G/H$ конечна, справедливость данного утверждения следует из леммы 2.2. Таким образом, полагаем, что фактор-группа $G/H$ бесконечна.

Предположим сначала, что фактор-группа $G/H$ абелева. Согласно лемме 2.1 (iii) $G/H$ не является свободной абелевой группой. Обозначим через $B/H$ свободную абелеву подгруппу группы $G/H$ такую, что фактор-группа $G/B$ периодическая. Поскольку ранг $r_p(H)$ бесконечен, ранг $r_p(B)$ также бесконечен. Если $|\pi(G/B)| > 1$, то группа $G$ является произведением двух своих собственных подгрупп, имеющих бесконечный $p$-ранг, что противоречит лемме 2.1 (iii). Таким образом, фактор-группа $G/B$ является $q$-группой для некоторого простого числа $q$. Пусть фактор-группа $B/H$ нетривиальна и $r$ — простое число, отличное от $q$. Положим $C/H = (B/H)^r \neq B/H$. Отсюда следует, что фактор-группа $G/C$ является периодической и $\pi(G/C)$ состоит из двух различных простых чисел $q$ и $r$. Как и ранее, приходим к противоречию. Следовательно, фактор-группа $G/H$ является периодической $q$-группой. Если $G/H$ делимая, то она разлагается в прямое произведение квазициклических $q$-групп, и, согласно лемме 2.1 (iii), $G/H \simeq C_{q^\infty}$. В противном случае фактор-группа $(G/H)/(G/H)^q$ является нетривиальной элементарной абелевой $q$-группой, и по лемме 2.1 (iii) получаем $|(G/H)/(G/H)^q| = q$. Отсюда следует, что $G/H = (E/H) \times (D/H)$, где $D/H$ — делимая подгруппа, $|E/H| = q$, и по лемме 2.1 (iii) вновь получаем противоречие.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Пусть $L/H$ — нормальная абелева подгруппа фактор-группы $G/H$ такая, что фактор-группа $G/L$ конечна. Пусть $U/H$ — произвольная подгруппа конечного индекса в группе $G/H$. Если $V/H = \mathrm{core}_{G/H} U/H$, то $G/V$ конечна, причем ранг $r_p(V)$ бесконечен. Согласно лемме 2.2 фактор-группа $G/V$ является циклической $q$-группой для некоторого простого числа $q$, и поэтому $G' \leq V \leq U$. Таким образом, если $W/H$ — пересечение всех подгрупп конечного индекса фактор-группы $L/H$, то $G/W$ абелева, $W$ имеет бесконечный $p$-ранг, а фактор-группа $G/W$ финитно аппроксимируема и поэтому конечна. Таким образом, $G = WK$ для некоторой подгруппы $K$, содержащей $H$, причем фактор-группа $K/H$ конечно порождена. Поскольку $G/H$ бесконечна, из леммы 2.2 следует, что $G \neq K$. Отсюда по лемме 2.1 (iii) получаем $G = W$, и тогда фактор-группа $G/H$ абелева, и справедливость результата следует из первой части доказательства.

Лемма доказана.

**3. Модули над целочисленными групповыми кольцами разрешимых групп.** Опишем структуру разрешимой группы, удовлетворяющей рассматриваемым условиям.

**Теорема 3.1.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ — разрешимая группа и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы $M$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Тогда $G$ содержит нормальную нильпотентную подгруппу $H$ такую, что ранг $r_p(H)$ бесконечен, и $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$.*

***Доказательство.*** Если $G = D_0 \geq D_1 \geq \ldots \geq D_{n-1} \geq D_n = E$ — производный ряд группы $G$, то существует натуральное число $m$ такое, что фактор-группа $G/D_m$ конечна, а фактор-группа $D_m/D_{m+1}$ бесконечна. Пусть $K = D_m$. По лемме 2.7 $G/K' \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$. Поскольку ранг $r_p(K')$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы $K'$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Пусть $C = C_A(K')$. Тогда $A/C$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Поскольку $K' \leq C_G(C)$ и коцентрализатор $G$ в $A$ не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, $G/C_G(C) \simeq C_{q^\infty}$. Так как $K'$ — нормальная подгруппа группы $G$, $C$ — $\mathbb{Z}G$-подмодуль модуля $A$. Поскольку фактор-модуль $A/C$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль, $A$ имеет конечный ряд $\mathbb{Z}G$-подмодулей

$$0 = C_0 \leq C = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_t = A$$

такой, что каждый фактор $C_j/C_{j-1}$, $j = 2, \ldots, t$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого – абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Отсюда следует, что можно построить ряд подмодулей $0 = C_0 \leq C = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_l = A$ такой, что $l \geq t$ и каждый фактор $C_j/C_{j-1}$, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $G$-рационально неприводимым $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого – абелева группа без кручения конечного 0-ранга. В случаях, когда фактор $C_j/C_{j-1}$, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, по лемме 16.19 [11] фактор-группа $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева. В случае, когда фактор $C_j/C_{j-1}$ $G$-рационально неприводим и его аддитивная группа является абелевой группой без кручения конечного 0-ранга, фактор-группу $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ можно рассматривать как неприводимую подгруппу $GL_r(\mathbb{Q})$. По теореме А. И. Мальцева (лемма 3.5 [12]) $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева.

Положим $H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap C_G(C_3/C_2) \cap \ldots \cap C_G(C_l/C_{l-1})$. Подгруппа $H$ действует тривиально в каждом факторе ряда $0 = C_0 \leq C = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \ldots \leq C_l = A$. Следовательно, $H$ нильпотентна. По теореме Ремака $G/H$ вкладывается в прямое произведение фактор-групп $G/C_G(C_j/C_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, l$, поэтому фактор-группа $G/H$ почти абелева. По лемме 2.7 фактор-группа $G/H$ изоморфна подгруппе $C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$. Так как $H \leq C_G(C_1)$, и $G/C_G(C) \simeq C_{q^\infty}$, отсюда следует, что $G/H \simeq C_{q^\infty}$, и ранг $r_p(H)$ бесконечен.

Теорема доказана.

**Теорема 3.2**. *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ — разрешимая группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного абелева секционного ранга в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Тогда $G$ содержит нормальную нильпотентную подгруппу $H$ такую, что ранг $r_p(H)$ бесконечен, и $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$.*

***Доказательство.*** Поскольку группа $G$ разрешима и имеет бесконечный абелев секционный ранг, существует простое число $p$ такое, что ранг $r_p(G)$ бесконечен.

Для этого простого числа в случае, когда $H$ — собственная подгруппа и ранг $r_p(H)$ бесконечен, подгруппа $H$ имеет бесконечный абелев секционный ранг. Поэтому коцентрализатор подгруппы $H$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Теперь можно применить теорему 3.1.

Теорема доказана.

**Теорема 3.3**. *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ — разрешимая группа бесконечного специального ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного специального ранга в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Тогда $G$ содержит нормальную нильпотентную подгруппу $H$ такую, что ранг $r_p(H)$ бесконечен, и $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$.*

***Доказательство.*** Если $G$ имеет бесконечный абелев секционный ранг и $X$ — собственная подгруппа бесконечного абелева секционного ранга, то коцентрализатор подгруппы $X$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Справедливость доказываемой теоремы следует из теоремы 3.2. Следовательно, можно считать, что группа $G$ имеет конечный абелев секционный ранг.

Пусть $U$ — нормальная подгруппа группы $G$ такая, что $G/U$ — бесконечная почти абелева фактор-группа, и предположим, что $V/U$ — нормальная абелева подгруппа $G/U$, для которой фактор-группа $G/V$ конечна. Поскольку ранг $r_0(G)$ конечен, фактор-группа $V/U$ содержит конечнопорожденную подгруппу $B/U$ такую, что $V/B$ периодическая. Если $C/U = (B/U)^{G/U}$, то $C/U$ также конечно порождена. Предположим, что $G/U$ имеет бесконечный специальный ранг. Поскольку группа $G$ имеет конечный абелев секционный ранг, отсюда следует, что $p$-подгруппы фактор-группы $V/C$ черниковские для каждого простого числа $p$. Таким образом, $\pi(V/C)$ бесконечно. Если $D/C$ — силовская $\pi(G/V)$-подгруппа $V/C$, то фактор-группа $V/D$ имеет бесконечный специальный ранг. С учетом леммы 1.D.4 [13] получаем $G/D = (V/D)(W/D)$, где $V/D$ — нормальная подгруппа $G/D$, $(V/D) \cap (W/D) = E$, $W/D$ — конечная подгруппа и $\pi(V/D) \cap \pi(W/D)$ пусто. Тогда $V/D$ является произведением двух $G$-инвариантных подгрупп бесконечного специального ранга. Следовательно, $G/D$ представима в виде произведения двух собственных подгрупп бесконечного специального ранга. Поэтому коцентрализатор группы $G$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Пришли к противоречию. Следовательно, специальный ранг фактор-группы $G/U$ конечен, и поэтому $U$ имеет бесконечный специальный ранг. Как и при доказательстве леммы 2.7, показываем, что $G/U \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$. Как и в теореме 3.1, $G$ удовлетворяет требованиям доказываемой теоремы.

Теорема доказана.

**4. Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп**. Докажем разрешимость локально разрешимой группы, удовлетворяющей рассматриваемым условиям.

**Лемма 4.1.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ — локально разрешимая группа. Предположим, что коцентрализатор группы $G$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и $C_G(A) = 1$. Тогда группа $G$ разрешима.*

***Доказательство.*** Пусть $C = C_A(G)$. Как и при доказательстве теоремы 3.1, устанавливаем, что $A$ имеет конечный ряд $\mathbb{Z}G$-подмодулей

$$0 = C_0 \leq C = C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_l = A$$

такой, что каждый фактор $C_j/C_{j-1}$, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $G$-рационально неприводимым $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. В случаях, когда фактор $C_j/C_{j-1}$, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, по лемме 16.19 [11] фактор-группа $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева. В случае, когда фактор $C_j/C_{j-1}$ $G$-рационально неприводим и его аддитивная группа является абелевой группой без кручения конечного 0-ранга, фактор-группу $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ можно рассматривать как неприводимую подгруппу $GL_r(\mathbb{Q})$. По теореме А. И. Мальцева (лемма 3.5 [12]) $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева. Из выбора подгруппы $C_1$ следует, что фактор-группа $G/C_G(C_1)$ тривиальна.

Пусть

$$H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap C_G(C_3/C_2) \cap \ldots \cap C_G(C_l/C_{l-1}).$$

Подгруппа $H$ действует тривиально в каждом факторе ряда $0 = C_0 \leq C = C_1 \leq \leq C_2 \leq \ldots \leq C_l = A$. Следовательно, подгруппа $H$ нильпотентна. По теореме Ремака

$$G/H \leq G/C_G(C_1) \times G/C_G(C_2/C_1) \times G/C_G(C_3/C_2) \times \ldots \times G/C_G(C_l/C_{l-1}).$$

Отсюда следует, что фактор-группа $G/H$ почти абелева, и поэтому группа $G$ разрешима.

Лемма доказана.

**Лемма 4.2.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, группа $G$ локально разрешима и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы $M$ в $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Если группа $G$ не является разрешимой, то она совершенна.*

***Доказательство.*** Отметим, что если $H$ — собственная подгруппа группы $G$ конечного индекса, то ранг $r_p(H)$ бесконечен, и поэтому коцентрализатор подгруппы $H$ в модуле $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Согласно лемме 4.1, подгруппа $H$ разрешима. По лемме 2.2 фактор-группа $G/H$ абелева. Следовательно, группа $G$ разрешима. Пришли к противоречию. Пусть $G \neq G'$. Тогда фактор-группа $G/G'$ является делимой. Отсюда следует, что $G$ содержит нормальную подгруппу $H$ такую, что $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа $q$. Тогда ранг $r_p(H)$ бесконечен. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $H$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. По лемме 4.1 подгруппа $H$ разрешима. Тогда и группа $G$ разрешима. Противоречие.

Лемма доказана.

Обозначим через $d(G)$ ступень разрешимости группы $G$. При рассмотрении случая, когда $p$ является простым числом, нам понадобится следующий результат.

**Теорема 4.1** [4]. *Пусть $p$ — простое число, $G$ — локально разрешимая группа конечного $p$-ранга, причем $r_p(G) = r$. Тогда фактор-группа $G/T(G)$ разрешима, $d(G/T(G)) \leq s_p(r)$, и $G/T(G)$ имеет конечный специальный ранг, не превышающий $f_p(r)$.*

**Лемма 4.3.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, группа $G$ локально разрешима и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной* *подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор $M$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Если группа $G$ не является разрешимой, $H$ — нормальная подгруппа группы $G$ и ранг $r_p(H)$ конечен, то фактор $H/T(H)$ $G$-централен.*

***Доказательство.*** Пусть $r_p(H) = r$. В случае, когда $p = 0$, применим к подгруппе $H$ лемму 2.12 [14], а при $p > 0$ — теорему 4.1. В обоих случаях получаем, что фактор-группа $H/T(H)$ разрешима и имеет конечный специальный ранг, являющийся функцией числа $r$. Положим $n = r_0(H/T(H))$, причем число $n$ зависит только от $r$. Подгруппа $H$ имеет ряд $G$-инвариантных подгрупп $T(H) = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_d = H$, каждый фактор которого абелев.

Отметим, что фактор-группа $H_1/T(H)$ — группа без кручения конечного специального ранга, не превышающего числа $n$, и поэтому $\mathrm{Aut}(H_1/T(H))$ изоморфна подгруппе группы $GL(n, \mathbb{Q})$. Следовательно, фактор-группа $G/C_G(H_1/T(H))$ локально разрешима и изоморфна некоторой подгруппе группы $GL(n, \mathbb{Q})$. Из следствия 3.8 [12] следует, что фактор-группа $G/C_G(H_1/T(H))$ разрешима, и тогда по лемме 4.2 она тривиальна. Таким образом, $[G, H_1] \le T(H)$.

Применим метод математической индукции. Согласно индуктивному предположению, $[G, H_{d-1}] \le T(H)$. Тогда $H_{d-1}/T(H) \le Z(G/T(H))$, где $Z(G/T(H))$ — центр фактор-группы $G/T(H)$. Поэтому фактор-группа $H/T(H)$ нильпотентна и ее класс нильпотентности не превышает 2. Пусть $K/T(H) = Z(H/T(H))$. Как и ранее, устанавливаем, что, поскольку $K/T(H)$ и $H/K$ — абелевы группы без кручения конечного специального ранга, не превышающего числа $n$, то $[G, K] \le T(H)$ и $[G, H] \le K$. По лемме о трех подгруппах и лемме 4.2 получаем $[G, H] = [G, G, H] \le T(H)$, и лемма доказывается индукцией по числу $d$.

Лемма доказана.

**Лемма 4.4.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ – неразрешимая локально разрешимая группа и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \ge 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор $M$ в модуле $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Тогда группа $G$ содержит собственную нормальную подгруппу $V$ такую, что если $U$ – нормальная подгруппа группы $G$ и $V \le U \le G$, $U \ne G$, то $U$ разрешима, и коцентрализатор подгруппы $U$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.*

***Доказательство.*** Пусть $T = T(G)$, $T \ne G$, и ранг $r_p(T)$ конечен (если $p = 0$, это условие автоматически выполняется). По лемме 4.2 фактор-группа $G/T$ неразрешима и, согласно следствию 1 к теореме 5.27 [15], не является простой. Следовательно, группа $G$ содержит собственную нормальную подгруппу $L \ge T$, $L \ne T$. Если ранг $r_p(L)$ конечен, то по лемме 4.3 фактор $L/T$ $G$-централен, и поэтому $G/T$ содержит нетривиальную максимальную нормальную абелеву подгруппу $V/T$. Из выбора подгруппы $V$ следует, что $V \ne G$. Если $U$ — нормальная подгруппа группы $G$ и

$$V \le U \le G, \qquad V \ne U, \qquad U \ne G,$$

то по лемме 4.3 ранг $r_p(U)$ бесконечен, следовательно, коцентрализатор подгруппы $U$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. По лемме 4.1 подгруппа $U$ разрешима. Если подгруппы $L$ с заданными свойствами не существует, то полагаем $V = T$, и, как и ранее, подгруппа $V$ имеет указанные свойства.

Теперь предположим, что $p > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда ранг $r_p(T)$ бесконечен. Если $T \ne G$, то коцентрализатор подгруппы $T$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, и тогда по лемме 4.1 подгруппа $T$ разрешима. Следовательно, фактор-группа $G/T$ неразрешима и, согласно следствию 1 к теореме 5.27 [15], она не является простой. Если $U$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $T \leq U \leq G$, $U \neq G$, то ранг $r_p(U)$ бесконечен, поэтому коцентрализатор подгруппы $U$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Лемма 4.1 влечет разрешимость подгруппы $U$. Таким образом, и в этом случае можно положить $T = V$.

Рассмотрим теперь случай, когда $T = G$. Предположим сначала, что все силовские $p$-подгруппы группы $G$ имеют конечный $p$-ранг. Тогда по лемме 3.1 [13] группа $G$ удовлетворяет условию минимальности для $p$-подгрупп. Пришли к противоречию, поскольку в этом случае $p$-подгруппы являются черниковскими и имеют конечные специальные ранги, ограниченные некоторой величиной. Таким образом, группа $G$ содержит некоторую $p$-подгруппу $P$ бесконечного специального ранга. Тогда по следствию 2 к теореме 6.36 [15] группа $G$ содержит также бесконечную элементарную абелеву $p$-подгруппу $A$. Поскольку $A$ — собственная подгруппа группы $G$, для любой собственной нормальной подгруппы $U$ группы $G$ получаем $UA \neq G$. В противном случае фактор-группа $G/U$ абелева, что противоречит лемме 4.2. Таким образом, $UA$ является собственной подгруппой группы $G$, причем $p$-ранг подгруппы $UA$ бесконечен. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $UA$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, и поэтому коцентрализатор подгруппы $U$ в модуле $A$ также является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. В этом случае полагаем $V = 1$.

Лемма доказана.

**Теорема 4.2.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ — локально разрешимая группа и ранг $r_p(G)$ бесконечен для некоторого $p \geq 0$. Предположим, что для каждой собственной подгруппы $M$ такой, что $r_p(M)$ бесконечен, коцентрализатор подгруппы $M$ в $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Тогда группа $G$ разрешима.*

***Доказательство.*** Предположим противное, т. е. группа $G$ не является разрешимой. По лемме 4.4 группа $G$ содержит нормальную подгруппу $V$ с тем свойством, что если $U$ — нормальная подгруппа группы $G$, для которой $V \leq U \leq G, U \neq G$, то подгруппа $U$ разрешима, и коцентрализатор подгруппы $U$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Положим $V = U_0$ и $d(U_0) = d_0$. Предположим, что мы построили нормальные разрешимые подгруппы

$$U_0 \leq U_1 \leq \ldots \leq U_n$$

такие, что $d(U_i) = d_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$ и $d_i < d_{i+1}$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Поскольку группа $G$ не является разрешимой, существует нормальная подгруппа $U_{n+1}$, включающая в себя $U_n$, такая, что $d(U_{n+1}) = d_{n+1} > d(U_n)$. Поэтому мы получаем возрастающий ряд разрешимых нормальных подгрупп, ступени разрешимости которых возрастают. Положим $W = \bigcup_{n \geq 1} U_n$. По построению подгруппа $W$ не является разрешимой и $V \leq W$. Отсюда следует, что $W = G$.

Положим теперь $C_n = C_A(U_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $U_n$ — нормальная подгруппа группы $G$, $C_n$ является $\mathbb{Z}G$-подмодулем для каждого $n$, и поскольку коцентрализатор подгруппы $U_n$ в $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, фактор-модуль $A/C_n$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. $A/C_n$ можно рассматривать как $\mathbb{Z}(G/C_G(A/C_n))$-модуль. Согласно лемме 4.1 фактор-группа $G/C_G(A/C_n)$ разрешима. Из леммы 4.2 следует, что $G = C_G(A/C_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $G = \bigcup_{n\geq 1} U_n$, отсюда следует, что

$$C_A(G) = \bigcap_{n\geq 1} C_A(U_n) = \bigcap_{n\geq 1} C_n,$$

и тогда $G$ тривиально действует в каждом факторе ряда $0 \leq C_A(G) \leq A$. Следовательно, группа $G$ абелева. Противоречие. Теорема доказана.

Используя метод доказательства теоремы 3.1, а также применяя теорему 4.2, получаем следующий результат.

**Теорема 4.3.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ – локально разрешимая группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного абелева секционного ранга в $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Тогда группа $G$ разрешима.*

**Теорема 4.4.** *Пусть $A$ — $\mathbb{Z}G$-модуль, $G$ — локально разрешимая группа бесконечного специального ранга. Предположим, что коцентрализатор каждой собственной подгруппы бесконечного специального ранга в $A$ — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Тогда группа $G$ разрешима.*

***Доказательство.*** Пусть $G$ — контрпример для данной теоремы. Если $N$ — собственная нормальная подгруппа бесконечного специального ранга, то коцентрализатор подгруппы $N$ в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Согласно лемме 4.1, подгруппа $N$ разрешима. Если $N$ имеет конечный специальный ранг, то по лемме 10.39 [15] подгруппа $N$ гиперабелева. Обозначим через $\{N_\alpha\}$ семейство всех собственных нормальных продгрупп группы $G$. Тогда подгруппа $J = \prod N_\alpha$ также гиперабелева. Поскольку простая локально разрешимая группа циклическая, группа $G$ также гиперабелева. Согласно теореме 7 [5], $G$ содержит подгруппу $K$, которая либо является элементарной абелевой $q$-группой для некоторого простого числа $q$, имеющей бесконечный специальный ранг, либо абелевой группой без кручения бесконечного специального ранга. Пусть $N$ — собственная нормальная подгруппа группы $G$, имеющая конечный специальный ранг. Согласно лемме 10.39 [15], существует натуральное число $d$ такое, что подгруппа $N^{(d)}$ является прямым произведением черниковских $p$-групп для различных простых $p$. Если $N^{(d)}K \neq G$, то отсюда следует, что подгруппа $N$ разрешима. Пусть $N^{(d)}K = G$, $r$ — некоторое простое число, отличное от $q$, $X$ — силовская $\{q, r\}'$-подгруппа $N^{(d)}$. Поскольку $XK \neq G$, проводя аналогичные рассуждения, получаем, что подгруппа $X$, а следовательно и $N$, разрешима. Таким образом, каждая собственная нормальная подгруппа группы $G$ разрешима, и ее коцентрализатор в модуле $A$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, примененным при доказательстве теоремы 4.2, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема доказана.

1. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. – 1988. – **119**, № 2. – P. 400 – 448.
2. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey. "Finite and locally finite groups"// NATO ASI. Ser. C. Math. Phys. Sci. – 1995.– **471**. – P. 111 – 146.
3. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, № 1. – P. 172 – 186.
4. *Dashkova O. Yu., Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure and Appl. Algebra. – 2007. – **208**, № 3. – P. 785 – 795.

5. *Baer R., Heineken H.* Radical groups of finite abelian subgroup rank // Ill. J. Math. – 1972. – **16**, № 4. – P. 533 – 580.
6. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 2. – С. 351 – 352.
7. *Курдаченко Л. А.* О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 160 – 177.
8. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N.* Insight into modules over Dedekind Domains. – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2008. – 119 p.
9. *Dashkova O. Yu.* On modules over group rings of locally soluble groups with rank restrictions on some systems of subgroups // Asian-Eur. J. Math. – 2010. – **3**, № 1. – P. 45 – 55.
10. *Дашкова О. Ю.* Об одном классе модулей, близких к нетеровым // Фундам. и прикл. математика. – 2009. – **15**, № 7. – С. 113 – 125.
11. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel etc.: Birkhäuser, 2007. – 248 p.
12. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups // Ergeb. Math. und ihrer Grenzgebiete. – 1973. – 229 p.
13. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – North-Holland; Amsterdam; London: North-Holland Math. Library, 1973. – 210 p.
14. *Franciosi S., De Giovanni F.* The Shur property and groups with uniform conjugacy classes // J. Algebra. – 1995. – **174**, № 3. – P. 823 – 847.
15. *Robinson D. J. R.* Finiteness conditions and generalized soluble groups // Ergeb. Math. und ihrer Grenzgebiete. – 1972. – Vols. 1, 2. – 464 p.

Получено 11.05.11