УДК 517.5

Т. В. Ломако (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

К ТЕОРИИ СХОДИМОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ТИПА

We prove theorems on convergence and compactness for classes of regular solutions of degenerate Beltrami equations with set-theoretic constraints imposed on the complex coefficient and construct variations for these classes.

Доведено теореми збіжності та компактності класів регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями теоретико-множинного типу на комплексний коефіцієнт. Для даних класів побудовано варіації.

1. Введение. Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида
$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$
где $\mu(z)\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ почти всюду, $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а
$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$
— *дилатационным отношением* или просто *дилатацией* уравнения (1).

Уравнение Бельтрами (1) называется вырожденным, если $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал $\Delta f = f_z \Delta z + f_{\overline{z}} \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$ и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., например, I.1.6 в [1]). В дальнейшем гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ почти всюду. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D будем называть регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1) почти всюду в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [2].

Функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях* (пишут $f \in ACL$), если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|_R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R (см., например, [3, с. 27]).

Пусть $Q(z)\colon D \to [1, \infty]$ — произвольная функция. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется $Q(z)$-*квазиконформным* ($Q(z)$-к.к.) отображением, если почти всюду
$$K_{\mu_f}(z) := \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|} \leq Q(z), \tag{3}$$
где $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$, и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$. Функцию μ_f принято называть комплексной характеристикой, а K_{μ_f} — дилатацией отображения f. Понятие $Q(z)$-к.к. отображения впервые было введено в статье [4] для случая, когда $Q(z) \in L^\infty$, т. е. фактически для Q-к.к. отображений, где $Q = \|Q(z)\|_\infty$.

В работах К. Андриян-Казаку, Л. И. Волковыского, М. С. Иоффе, С. Л. Крушкаля, Р. Кюнау, М. Летинена, Г. Ренельта, О. Тейхмюллера, М. Шиффера, Г. Шобера и других авторов исследовались классы $Q(z)$-к.к. отображений, для которых почти всюду $\mu(z) \in \Delta_{q(z)}$, где $\Delta_{q(z)} = \{\nu \in \mathbb{C} \colon |\nu| \leq q(z)\}$, $q(z) = (Q(z) - 1) / \big(Q(z) + +1\big)$, а также классы с дополнительными ограничениями вида $\mathcal{F}(\mu(z), z) \leq 0$ почти всюду, где $\mathcal{F}(\mu, z) \colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Наконец, последняя из постановок Шиффера – Шобера привела к рассмотрению классов с ограничениями общего теоретико-множественного вида

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \tag{4}$$

почти всюду. Однако это развитие происходило, фактически, в рамках Q-к.к. отображений, поскольку предполагалось, что

$$\operatorname{ess\,sup} Q(z) = Q < \infty. \tag{5}$$

Теорема существования и единственности Ги Давида [5] позволила продвинуться дальше в указанном направлении. Именно, обозначим через $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих условию (4), но где, вообще говоря, не выполнено (5). Через H_M (соответственно H_M^*) обозначим совокупность всех ACL (соответственно регулярных) гомеоморфизмов $f \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, сохраняющих ориентацию с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$.

Говорят, что измеримая функция $Q(z) \colon \mathbb{C} \to [1, \infty]$ *экспоненциально ограничена по мере*, если существуют постоянные $T \geq 1$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что для всех $t \geq T$ $\operatorname{mes}\{z \in \mathbb{C} \colon Q(z) > t\} \leq ce^{-\gamma t}$. В работе [6] доказана компактность класса H_M с указанным ограничением на $Q(z)$. Заметим, что при этом ограничении классы H_M и H_M^* совпадают. В настоящей статье ставится задача: доказать компактность класса гомеоморфизмов H_M^* с более общими условиями на $Q(z)$, что имеет важные приложения в теории вариационного метода.

2. Предварительные замечания. Всюду далее $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, $B(z_0, r) = = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < r\}$, $\operatorname{dist}(E, F)$ — евклидово расстояние между множествами E и F в $\mathbb{C}$. Обозначим через h *сферическое* (*хордальное*) *расстояние* между точками z_1 и z_2 в $\overline{\mathbb{C}}$: $h(z_1, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}$, $h(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}}$, $z_1, z_2 \neq \neq \infty$. *Сферическим диаметром множества* E в $\overline{\mathbb{C}}$ называется величина $h(E) = = \sup_{z_1, z_2 \in E} h(z_1, z_2)$. В дальнейшем $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = \left(1 + |z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$, через L_S^1 — класс всех функций $Q \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, интегрируемых в $\mathbb{C}$ относительно сферической площади. Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ — произвольные множества. Через $\Delta(E, F, D)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma \colon [a, b] \to \overline{\mathbb{C}}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Далее нам потребуется понятие кольцевого Q-гомеоморфизма, которое мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и тесно связано с исследованием вырожденных уравнений Бельтрами на плоскости (см., например, [7]).

Напомним, что борелева функция $\rho\colon \overline{\mathbb{C}} \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\overline{\mathbb{C}}$ (пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$), если $\displaystyle\int_\gamma \rho(z)|dz| \geq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством $M(\Gamma) = \inf_{\rho\in \operatorname{adm}\Gamma} \displaystyle\int_D \rho^2(z)dm(z)$.

Пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $z_0 \in D$, если соотношение

$$M(f(\Delta(S_1,S_2,D))) \leq \int_A Q(z)\eta^2(|z-z_0|)dm(z)$$

выполнено для любого кольца $A = \{z \in \mathbb{C}\colon r_1 < |z-z_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \operatorname{dist}(z_0,\partial D)$, окружностей $S_i = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| = r_i\}$, $i = 1,2$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,r_2) \to [0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq 1$.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма может быть распространено в бесконечность стандартным образом. Именно, пусть $\infty \in D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$. Гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в* ∞, если отображение $\widetilde{f}(z) = f\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)$ является кольцевым Q'-гомеоморфизмом в нуле с $Q'(z) = Q\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)$. Иначе говоря, отображение $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в ∞, если

$$M\left(f\left(\Delta\left(S(R_1),S(R_2),R\right)\right)\right) \leq \int_R Q(w)\eta^2\left(|w|\right)dm(w)$$

для любого кольца $R = \{w \in \mathbb{C}\colon R_1 < |w| < R_2\}$ в D с $0 < R_1 < R_2 < \infty$, $S(R_i) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = R_i\}$, $i = 1,2$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (R_1,R_2) \to [0,\infty]$ такой, что $\displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \eta(r)\,dr \geq 1$.

Следующее утверждение можно найти как следствие 3.1 в работе [8].

Предложение 1. *Любой регулярный гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{C}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(z) = K_{\mu_f}(z)$ во всех точках области D.*

Пусть $Q\colon D \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Обозначим через $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов f в области $D \subseteq \mathbb{C}$ таких, что $h\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus f(D)\right) \geq \Delta > 0$. Напомним лемму 3.2 из статьи [9] (см. также лемму 7.6 в монографии [10]).

Предложение 2. *Если для некоторых $z_0 \in D$, $0 < \varepsilon_0 < \operatorname{dist}(z_0,\partial D)$ и $p < 2$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\psi^2(|z-z_0|)dm(z) \leq cI^p(\varepsilon) \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \tag{6}$$

где $\psi(t)\colon (0,\infty) \to [0,\infty]$ — неотрицательная измеримая функция, $0 < I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \quad \forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, то

$$h(f(z),f(z_0)) \leq \frac{32}{\Delta}\exp\left\{-\left(\frac{2\pi}{c}\right)I^{2-p}(|z-z_0|)\right\}$$

для любых $f \in \mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ и $z \in B(z_0,\varepsilon_0)$.

Если $\infty \in D$, то условие (6) в точке ∞ заменяем условием

$$\int\limits_{R_0<|z|<R} Q(z)\psi_\infty^2(|z|)\frac{dm(z)}{|z|^4} \le cI_\infty^p(R) \quad \text{при} \quad R \to \infty, \tag{7}$$

где $\psi_\infty(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что $0 < I_\infty(R) = \int_{R_0}^{R}\psi_\infty(t)dt < \infty$, $R \in (R_0,\infty)$.

Кроме того, нам понадобится следующий важный факт (см. теорему 1.3 в [11]).

Предложение 3. *Если f — регулярный гомеоморфизм с $K_\mu \in L^1_{\rm loc}$, то $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}$ и $f^{-1}_w = 0$ почти всюду, где $J_{f^{-1}}(w) = 0$.*

Наконец, нам будет полезна следующая теорема (см. теорему 3.1 и замечание 3.1 в [12], а также следствие 5 в [13]).

Предложение 4. *Пусть $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ — последовательность сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ с комплексными коэффициентами μ_n такими, что $K_{\mu_n}(z) \le Q(z) \in L^1_{\rm loc}$, $n = 1,2,\ldots$. Если $f_n \to f$ локально равномерно в D, где $f\colon D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм, то $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1_{\rm loc}$ и почти всюду $K_\mu(z) \le \limsup\limits_{n\to\infty} K_{\mu_n}(z)$.*

3. Теоремы сходимости. Данный пункт посвящен теоремам сходимости для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа на дилатацию.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые элементы теории инвариантно-выпуклых множеств (см., например, [14]). Пусть $\mathcal{G}$ — группа всех дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя. Множество M из $\mathbb{D}$ называется *инвариантно-выпуклым*, если все множества $g(M)$, $g \in \mathcal{G}$, являются выпуклыми. В частности, такие множества являются выпуклыми. *Инвариантно-выпуклой оболочкой* $\operatorname{inv}\operatorname{co} M$ множества M из $\mathbb{D}$, $\overline{M} \subseteq \mathbb{D}$, будем называть минимальное по включению замкнутое инвариантно-выпуклое множество, содержащее M.

В работе [15] показано, что если $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, $n = 1,2,\ldots,$ — последовательность $Q(z)$-к.к. отображений с $Q(z) \equiv Q < \infty$ и $f_n \to f$ локально равномерно, где $f\colon D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм, то $|\mu(z)| \le \limsup\limits_{n\to\infty}|\mu_n(z)|$ почти всюду. Следующая лемма уточняет область комплексного коэффициента предельного отображения и распространяет его на случай локально суммируемой $Q(z)$.

Лемма 1. *Пусть $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, $n = 1,2,\ldots,$ — последовательность $Q(z)$-к.к. отображений с $Q \in L^1_{\rm loc}$ и $f_n \to f$ локально равномерно при $n \to \infty$, где $f\colon D \to \mathbb{C}$ — гомеоморфизм. Тогда f является $Q(z)$-к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$, $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1_{\rm loc}$. Кроме того, для почти всех $z \in R_f$*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv}\operatorname{co} M(z), \tag{8}$$

где R_f — множество всех регулярных точек отображения f и

$$M(z) = \operatorname{Ls}_{n\to\infty}\{\mu_n(z)\}, \tag{9}$$

$\operatorname{Ls}_{n\to\infty}\{\mu_n(z)\}$ обозначает верхний топологический предел множеств $\{\mu_n(z)\}$, т. е. множество всех точек накопления последовательности $\mu_n(z)$ (см. [16, с. 344]).

Доказательство. По предложению 4 f является $Q(z)$-к.к. отображением и $(f_n)_z \to f_z$ и $(f_n)_{\overline{z}} \to f_{\overline{z}}$ слабо в $L^1_{\rm loc}$. Остается доказать (8).

В силу предложения 2 из [14] $\operatorname{inv}\operatorname{co} M(z) = \bigcap_{m\in N(z)} K_m$ почти всюду, где $K_m,\ m = 1,2,\ldots,$ — некоторая перенумерация всех замкнутых кругов из $\mathbb{D}$, координаты центров и радиусы которых являются рациональными числами, а $N(z)$ — множество всех натуральных чисел $m = 1,2,\ldots,$ для которых $M(z) \subseteq K_m$. Поэтому достаточно показать, что $\mu(z) \in K_m$ при всех $m \in N(z)$ для почти всех $z \in R_f$.

Пусть c_m и k_m — центр и радиус круга K_m в гиперболической метрике в $\mathbb{D}$ (см., например, [17, с. 128, 129]). Тогда с помощью дробно-линейного отображения $\mathbb{D}$ на себя $\gamma_m(\nu) = (\nu - c_m)/(1-\nu\overline{c_m})$ круг K_m преобразуется в некоторый круг с центром в нуле. Евклидов радиус этого круга обозначим через r_m. Рассмотрим аффинные преобразования плоскости $z_m(\zeta) = \zeta - c_m\overline{\zeta}$, $m = 1,2,\ldots,$ которые одновременно являются Q_m-к.к. отображениями $\mathbb{C}$ на себя, где $Q_m = (1+|c_m|)/(1-|c_m|)$.

Пусть $\mu^{(m)}$ и $\mu_n^{(m)}$ — комплексные характеристики отображений $f^{(m)} = f \circ z_m$ и $f_n^{(m)} = f_n \circ z_m,\ m,n = 1,2,\ldots,$ соответственно. Заметим, что $f_n^{(m)}(\zeta)$ являются $Q^*_m(\zeta)$-к.к. отображениями с $Q^*_m(\zeta) := Q_m \cdot Q(z_m(\zeta)) \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Поскольку для каждого фиксированного $m = 1,2,\ldots$ очевидно, что $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ локально равномерно при $n\to\infty$, по предложению 4 $|\mu^{(m)}(\zeta)| \le \overline{\lim}_{n\to\infty} |\mu_n^{(m)}(\zeta)| \le r_m$ для всех $\zeta \in E^{(m)} \setminus e^{(m)}$, где $e^{(m)}$ — некоторое подмножество нулевой меры $E^{(m)} = z_m^{-1}(E_m)$, а E_m — множество всех точек $z \in D$, для которых $M(z) \subseteq K_m$. Таким образом, при каждом $m = 1,2,\ldots$

$$|\gamma_m(\mu(z))| \le r_m \tag{10}$$

для всех $z \in R_f \cap E_m \setminus e_m$, где $e_m = z_m(e^{(m)})$ — множество нулевой меры (см. [3, с. 36]). Пусть $E = \cup e_m$. Тогда E — множество нулевой меры и для любого $z \in R_f \setminus E$ неравенство (10) имеет место при всех $m \in N(z)$. Однако (10) эквивалентно при $z \in R_f$ включению $\mu(z) \in K_m$, и тем самым включение (8) доказано для почти всех $z \in R_f$.

Теорема 1. *Пусть $f_n\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — последовательность регулярных гомеоморфизмов с нормировками $f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 1,\ f_n(\infty) = \infty$, сходящаяся локально равномерно в $\overline{\mathbb{C}}$ относительно сферической метрики к некоторому отображению f, причем $K_{\mu_{f_n}}(z) \le Q(z) \in L^1_S$. Тогда f – регулярный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$.*

При доказательстве теоремы 1 используем следующее равенство, которое легко проверить непосредственным вычислением для $f = u + iv$:

$$|\partial f|^2 + |\overline{\partial} f|^2 = \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right). \tag{11}$$

Доказательство. Покажем, что f — гомеоморфизм в $\mathbb{C}$. Полагая $g_n = f_n^{-1}$ и $u_n = \operatorname{Re} g_n,\ v_n = \operatorname{Im} g_n$, согласно равенству (11) и предложению 3 имеем

$$I_n := \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|\nabla u_n|^2 + |\nabla v_n|^2}{(1+|u_n|^2+|v_n|^2)^2} dm(\zeta) = 2\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|\partial g_n|^2 + |\overline{\partial} g_n|^2}{(1+|g_n|^2)^2} dm(\zeta) \le$$

$$\le 4\int\limits_{\mathbb{C}} |\partial g_n|^2 \frac{dm(\zeta)}{(1+|g_n|^2)^2} = 4\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{1}{1-|\nu_n(\zeta)|^2} J_n(\zeta) \frac{dm(\zeta)}{(1+|g_n|^2)^2}, \tag{12}$$

где J_n обозначает якобиан отображения g_n, а ν_n — его комплексную дилатацию. По предложению 3 $g_n \in W^{1,2}_{\rm loc}$. Следовательно, g_n локально абсолютно непрерывны, и после замены переменных получаем

$$I_n \leq 4 \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{1}{1-|\mu_n(z)|^2} \frac{dm(z)}{(1+|z|^2)^2} \leq 4 \int\limits_{\mathbb{C}} Q(z) dS(z) < \infty \tag{13}$$

(см. леммы III.2.1 и III.3.2, а также теоремы III.3.1 и III.6.1 в [1] и I.C(3) в [3]). Оценка (13) позволяет установить, что предельное отображение f является локально гомеоморфным, а потому и просто гомеоморфизмом $\mathbb{C}$ на себя. Действительно, по теореме I.13.3 в [16] f — непрерывное отображение как равномерный предел непрерывных отображений, и, таким образом, последовательность f_n образует равностепенно непрерывное семейство отображений (см., например, предложение 7.1 в [10]). Пусть

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin t\right).$$

Тогда согласно теореме 9 в [18, с. 62] найдется $\delta > 0$ такое, что

$$h\left(f_n(z_1), f_n(z_2)\right) > \varphi^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{4\pi I_n}{h^2(z_1,z_2)}\right\}\right),$$

как только $h(z_1,z_2) < \delta$. Таким образом, при $n \to \infty$ получаем

$$h\left(f(z_1), f(z_2)\right) > \varphi^{-1}\left(\exp\left\{-\frac{4\pi I_n}{h^2(z_1,z_2)}\right\}\right) > 0 \quad \text{при} \quad h(z_1,z_2) < \delta. \tag{14}$$

Из неравенств (13) и (14) следует, что f является локальным гомеоморфизмом и, значит, гомеоморфизмом в $\mathbb{C}$ (см., например, следствие из теоремы 17.2 в [19]). Применяя инверсию относительно единичной окружности, убеждаемся, что f — гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

Покажем, что гомеоморфизм f является регулярным в $\mathbb{C}$. Заметим, что из локально равномерной сходимости $f_n \to f$ последовательности f_n следует, что $f_n^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно (см., например, лемму 3.1 в [20]). Таким образом, в силу (13) по теореме 1 в [18] получаем, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{C})$. Условие $f^{-1} \in W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{C})$ влечет N^{-1}-свойство f (см., например, теорему III.6.1 в [1]) и, следовательно, $J_f(z) \neq 0$ почти всюду по теореме 1 в [21]. Наконец, $f \in W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{C})$ по предложению 4.

Комбинируя лемму 1 и теорему 1, получаем следующее заключение.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 f *является* $Q(z)$*-к.к. отображением и*

$$\mu(z) \in \operatorname{inv} \operatorname{co} M(z) \tag{15}$$

почти всюду, где $M(z)$ *определено в* (9).

4. Теоремы компактности. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений из области $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ называется *нормальным*, если каждая последовательность отображений f_m из $\mathfrak{F}$ имеет подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится к непрерывному отображению $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ равномерно на каждом компактном множестве $K \subset D$ относительно сферической метрики. Семейство $\mathfrak{F}$ называется *замкнутым*, если все предельные отображения f относительно указанной сходимости принадлежат

$\mathfrak{F}$. Наконец, класс отображений $\mathfrak{F}$ называется *компактным*, если $\mathfrak{F}$ нормален и замкнут.

Говорят, что семейство компактных множеств в $M(z) \subseteq \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{C}$, *измеримо по параметру* z, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество точек $E_0 = \{z \in \mathbb{C} \colon M(z) \subseteq M_0\}$ измеримо по Лебегу (ср. с [22, с. 27]). В дальнейшем

$$Q_M(z) := \frac{1 + q_M(z)}{1 - q_M(z)}, \quad q_M(z) := \max_{\nu \in M(z)} |\nu|. \tag{16}$$

Из результатов п. 3 получаем следующее заключение.

Следствие 2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, и $Q_M \in L^1_S$. Тогда класс H^*_M замкнут.*

Лемма 2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, такое, что $Q_M \in L^1_S$ и удовлетворяет условиям вида* (6) *и* (7). *Тогда класс H^*_M компактен.*

Доказательство. Нормальность класса H^*_M следует из предложений 1, 2, а также теоремы Арцела – Асколи (см., например, [23, с. 68]), а замкнутость — из следствия 2.

Следуя работе [24], говорим, что функция $\varphi \colon D \to \mathbb{R}$ класса L^1_{loc} имеет *конечное среднее колебание в точке* $z_0 \in D$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon(z_0)| \, dm(z) \ < \ \infty, \tag{17}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(z_0) = \fint_{B(z_0,\varepsilon)} \varphi(z) \, dm(z) \ < \ \infty \tag{18}$$

— среднее значение функции $\varphi(z)$ по кругу $B(z_0, \varepsilon)$. Также говорят, что функция $\varphi \colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в* D (сокращенно $\varphi \in$ FMO(D)), если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $z_0 \in D$.

Концепция конечного среднего колебания может быть распространена в бесконечность стандартным образом. Именно, пусть даны область $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D$, и функция $\varphi \colon D \to \mathbb{R}$. Говорят, что φ имеет *конечное среднее колебание в* ∞, если функция $\varphi^*(z) = \varphi\left(1/\overline{z}\right)$ имеет конечное среднее колебание в 0. Применяя обратную инверсию $z \to 1/\overline{z}$, после замен переменных получаем следующее эквивалентное условие:

$$\int_{|z| \geq R} |\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_R| \frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при} \quad R \to \infty,$$

где

$$\widetilde{\varphi}_R = \frac{R^2}{\pi} \int_{|z| \geq R} \varphi(z) \frac{dm(z)}{|z|^4}.$$

Выбирая в лемме 2 $\psi(t) = 1/\left(t \log 1/t\right)$, $p = 1$, по лемме 11.1 в [10] получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $M(z), z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если $Q_M \in FMO(\overline{\mathbb{C}})$, то H_M^* компактен.*

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *точкой Лебега* функции $Q\colon \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |Q(z) - Q(z_0)| \ dm(z) \ = 0. \tag{19}$$

Аналогично, $z_0 = \infty$ будем называть точкой Лебега функции Q, если 0 является точкой Лебега функции $Q^*(z) = Q\left(1/\overline{z}\right)$, $Q^*(0) = Q(\infty)$, $Q^*(\infty) = Q(0)$, т. е.

$$\int\limits_{|z|\ge R} |Q(z) - Q(\infty)| \frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{при} \quad R \to \infty. \tag{20}$$

Как следствия из теоремы 2, предложения 11.1 и следствия 11.1 в [10], получаем следующие два утверждения.

***Следствие* 3.** *Пусть $M(z), z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если каждая точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ является точкой Лебега для функции Q_M, то класс H_M^* компактен.*

***Следствие* 4.** *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} Q_M(z) \ dm(z) < \infty \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$$

и

$$\int\limits_{|z|\ge R} Q_M(z) \frac{dm(z)}{|z|^4} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \textit{при} \quad R \to \infty,$$

то класс H_M^* компактен.

Теорема 3. *Пусть $M(z), z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)} = \infty \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}, \tag{21}$$

где $k_{z_0}(r)$ — среднее значение функции $Q_M(z)$ на окружности $|z - z_0| = r$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(z_0)$ и

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{dR}{Rk_\infty(R)} = \infty \tag{22}$$

для некоторого $\delta > 0$, где $k_\infty(R)$ — среднее значение функции $Q_M(z)$ на окружности $|z| = R$. Тогда класс H_M^* компактен.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ (при $z_0 = \infty$ используем инверсию). Для функции

$$\psi(t) = \begin{cases} (1/[tk_{z_0}(t)])\,, & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in (\varepsilon_0, \infty), \end{cases}$$

имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\psi^2(|z-z_0|)dm(z) = 2\pi \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rk_{z_0}(r)}.$$

Таким образом, заключение теоремы следует из леммы 2 при условиях (21) и (22).

***Следствие* 5.** *Пусть $M(z), z \in \mathbb{C},$ — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру. Если $k_{z_0}(r) = O\left(\log \dfrac{1}{r}\right)$ при $r \to 0$ в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и $k_\infty(R) = O(\log R)$ при $R \to \infty$, то класс H_M^* компактен.*

Далее, для каждой неубывающей функции $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ обратную функцию $\Phi^{-1}\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ можно корректно определить следующим образом: $\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t)\geq\tau} t$. Здесь $\inf$ равен ∞, если множество $t \in [0,\infty]$, где $\Phi(t) \geq \tau$, является пустым.

Как следствие теоремы 3, согласно теореме 3.1 в [25] получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $M(z), z \in \mathbb{C},$ — семейство компактных инвариантно-выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру, и*

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\left(Q_M(z)\right) dS(z) < \infty, \tag{23}$$

где $\Phi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ — неубывающая выпуклая функция, такая, что

$$\int\limits_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\left[\Phi^{-1}(\tau)\right]} = \infty \tag{24}$$

для некоторого $\delta_0 > \Phi(0)$. Тогда класс H_M^* компактен.

Отметим, что условие (24) является не только достаточным, но и необходимым для компактности классов H_M^* с ограничениями интегрального типа (23), как это следует из теоремы 5.1 в [26].

5. К теории вариационного метода. Одним из важных приложений теорем компактности является теория вариационного метода. Дело в том, что в компактных классах всегда гарантируется существование экстремальных отображений для любых непрерывных, в том числе нелинейных функционалов. Кроме того, как правило в компактных классах удается показать выпуклость множества комплексных характеристик, что значительно упрощает построение вариаций. Вариационный метод исследования экстремальных задач для квазиконформных отображений был впервые применен П. П. Белинским. Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах В. Я. Гутлянского, С. Л. Крушкаля, Р. Кюнау, В. И. Рязанова, М. Шиффера, Г. Шобера и многих других. Данный пункт посвящен построению вариаций в классах H_M^* методом, идея которого была впервые предложена в работе [27] для аналитических функций с квазиконформным продолжением. Впоследствии этот подход использовался в [6] для классов H_M^* при ограничениях на Q_M по мере экспоненциального типа.

Приведем необходимые сведения из теории композиционных операторов в пространствах Соболева. Пусть D — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Напомним, что пространство Соболева $L^1_p(D), p \geq 1$, есть пространство локально интегрируемых функций $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ с обобщенными производными и с полунормой

$$\|\varphi\|_{L^1_p(D)} = \|\bigtriangledown\varphi\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_D |\bigtriangledown\varphi|^p dm\right)^{1/p}, \tag{25}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\bigtriangledown\varphi$ — *обобщенный градиент* функции φ, $\bigtriangledown\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$, определяемый условиями

$$\int\limits_D \varphi\frac{\partial\eta}{\partial x_i}dm = -\int\limits_D \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\eta dm \quad \forall\eta \in C_0^\infty(D), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Здесь $C_0^\infty(D)$ обозначает пространство всех бесконечно гладких функций с компактным носителем в D. Аналогично говорят, что вектор-функция принадлежит $L^1_p(D)$, если ее координатные функции принадлежат $L^1_p(D)$. Известен следующий факт (см. [28, 29]).

Лемма 3. *Пусть f — гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *композиционное правило $f^*\varphi = \varphi \circ f$ порождает ограниченный оператор*

$$f^*\colon L^1_p(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \leq q \leq p < \infty, \tag{27}$$

2) *отображение f принадлежит классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$, а функция*

$$K_p(x, f) := \inf\left\{k(x)\colon |Df|(x) \leq k(x)|J_f(x)|^{1/p}\right\} \tag{28}$$

— *классу $L_r(D)$, где число r определяется из соотношения $1/r = 1/q - 1/p$.*

Отсюда, в частности, при $n = 2$, $p = 2$ и $q = 1$ имеем следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_{\mu_f} \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда $g \circ f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ для любого отображения $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ из $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$.*

Как известно, любое квазиконформное отображение $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ (см., например, теорему IV.1.2 в [1]). Таким образом, приходим к следующему заключению.

***Следствие* 6.** *Для любого квазиконформного отображения $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $K_{\mu_f} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ композиция $g \circ f$ принадлежит классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.*

Аналогично теореме 5.4.6 в [30, с. 244] доказывается следующее утверждение о дифференцировании суперпозиции.

Лемма 4. *Пусть f — гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, композиционный оператор $f^*\colon L^1_p(D') \to L^1_q(D), 1 \leq q \leq p < \infty$, ограничен и f имеет N^{-1}-свойство. Тогда, для любой функции $\varphi \in L^1_p(D')$ почти всюду*

$$\frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\left(f(x)\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Комбинируя леммы 3 и 4, аналогично IC(1) в [3] получаем следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — сохраняющий ориентацию регулярный гомеоморфизм с $K_{\mu_f}\in L^1_{\rm loc}$. Тогда для любого $g\in W^{1,2}_{\rm loc}$ почти всюду*

$$(g\circ f)_z=(g_w\circ f)f_z+(g_{\overline{w}}\circ f)\overline{f_{\overline{z}}},\quad (g\circ f)_{\overline{z}}=(g_w\circ f)f_{\overline{z}}+(g_{\overline{w}}\circ f)\overline{f_z}. \qquad (30)$$

Следствие 7. *В частности, формулы* (30) *имеют место для квазиконформных отображений $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.*

Напомним, что отображение $f\colon X\to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым*, если $\operatorname{dist}(f(x_1),f(x_2))\le M\operatorname{dist}(x_1,x_2)$ для некоторого $M<\infty$ и всех $x_1,x_2\in X$ (см., например, [31, с. 75]). Отображение f называется *билипшицевым*, если в дополнение $M^*\operatorname{dist}(x_1,x_2)\le\operatorname{dist}(f(x_1),f(x_2))$ для некоторого $M^*>0$ и всех $x_1,x_2\in X$. Следующая теорема впервые была доказана в [32].

Теорема 5. *Пусть $M(z), z\in\mathbb{C}$, — произвольное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{D}$. Далее, пусть $\mu\in\mathfrak{M}_M$ — комплексная характеристика отображения $f\in H^*_M$ такая, что $K_\mu\in L^1_{\rm loc}$, а $\nu\in\mathfrak{M}_M$ такова, что*

$$\varkappa=(\nu-\mu)/(1-|\mu|^2) \qquad (31)$$

принадлежит открытому единичному шару в $L^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует вариация $f_\varepsilon,\varepsilon\in[0,1/2]$, отображения f в классе H^*_M с комплексной характеристикой

$$\mu_\varepsilon=\mu+\varepsilon(\nu-\mu)=(1-\varepsilon)\mu+\varepsilon\nu,\quad \varepsilon\in[0,1/2], \qquad (32)$$

такая, что

$$f_\varepsilon(\zeta)=f(\zeta)-\frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}}(\nu(z)-\mu(z))\varphi(f(z),f(\zeta))f_z^2dm(z)+o(\varepsilon,\zeta), \qquad (33)$$

где

$$\varphi(w,w')=\frac{1}{w-w'}\,\frac{w'}{w}\,\frac{w'-1}{w-1} \qquad (34)$$

и $o(\varepsilon,\zeta)/\varepsilon\to0$ локально равномерно относительно $\zeta\in\mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех тех точек z плоскости $\mathbb{C}$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(z)\ne0$. Тогда по определению класса H^*_M и по теореме Меньшова $|\mathbb{C}\setminus B|=0$ (см. [33], а также теорему 42.3 в [34], ср. с теоремой III.3.1 в [1]). Кроме того, по лемме 3.2.2 в [31] множество B можно разбить на счетное число (борелевских) множеств B_l, на каждом из которых отображение f является билипшицевым. По теореме Кирсбрауна – МакШейна (см., например, теорему 2.10.43 в [31], а также [35, 36]) сужения $f|_{B_l}$ допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$. Таким образом, f имеет (N)-свойство на множестве B и можно выполнить замену переменных под интегралом (см., например, теорему 3.2.5 в [31]).

Пусть

$$\varkappa_\varepsilon=\frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu}}=\varepsilon\varkappa\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varepsilon\varkappa\overline{\mu}\right)^n,\quad \varepsilon\in[0,1]. \qquad (35)$$

Поскольку по условию $\|\varkappa\|_\infty=k<1$, при $\varepsilon\in[0,1/2]$

$$\|\varkappa_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon k} \leq \frac{k}{2-k} = q < 1. \tag{36}$$

Далее, пусть

$$\gamma_\varepsilon(w) := \begin{cases} \left(\varkappa_\varepsilon \cdot \dfrac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1}(w), & w \in f(B), \\ 0, & w \in f(\mathbb{C} \setminus B). \end{cases} \tag{37}$$

Переопределяя, в случае необходимости, $\varkappa$ на множестве нулевой меры, без ограничения общности можем считать, что $|\varkappa(z)| \leq k$ и $|\varkappa_\varepsilon(z)| \leq q$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и, таким образом, $\gamma_\varepsilon(z) \leq q$ также для всех $z \in \mathbb{C}$. Кроме того, поскольку $|\mathbb{C} \setminus B| = 0$, получаем

$$\gamma_\varepsilon \circ f = \varkappa_\varepsilon \cdot \frac{f_z}{\overline{f_z}} \tag{38}$$

почти всюду.

Рассмотрим семейство Q-квазиконформных $(Q = (1+q)/(1-q))$ отображений $g_\varepsilon \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\varepsilon \in [0, 1/2]$, с комплексными характеристиками γ_ε, $\varepsilon \in [0, 1/2]$, и нормировками $g_\varepsilon(0) = 0$, $g_\varepsilon(1) = 1$ и $g_\varepsilon(\infty) = \infty$ (см. теорему существования, например, в [3, с. 90]). По теореме о дифференцировании Q-к.к. отображений по параметру

$$g_\varepsilon(w') = w' - \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{f(B)} \gamma(w) \varphi(w, w') dm(w) + o(\varepsilon, w'), \tag{39}$$

где

$$\gamma(w) = \begin{cases} \left(\varkappa \cdot \dfrac{f_z}{\overline{f_z}}\right) \circ f^{-1}(w), & w \in f(B), \\ 0, & w \in f(\mathbb{C} \setminus B), \end{cases} \tag{40}$$

и $o(\varepsilon, w')/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно относительно $w' \in \mathbb{C}$ (см. [3, с. 94 – 96]).

Теперь рассмотрим семейство отображений $f_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f$, $\varepsilon \in [0, 1/2]$. Покажем, что $f_\varepsilon \in H_M^*$. Во-первых, по следствию 6, $f_\varepsilon \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$. Далее, заметим, что регулярный гомеоморфизм f имеет N^{-1}-свойство по теореме Пономарева (см. [21]). Поэтому аналогично IC(6) в [3], поскольку $J_f(z) \neq 0$ почти всюду и $f_z \neq 0$ почти всюду, получаем

$$\mu_{g_\varepsilon} \circ f = \frac{f_z}{\overline{f_z}} \frac{\mu_{f_\varepsilon} - \mu_f}{1 - \overline{\mu_f} \mu_{f_\varepsilon}} \tag{41}$$

почти всюду. Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования суперпозиции (30) (см. следствие 7). Разрешая (41) относительно μ_{f_ε}, заключаем, что почти всюду

$$\mu_{f_\varepsilon} = \frac{\mu_{g_\varepsilon} \circ f + \dfrac{f_z}{\overline{f_z}} \cdot \mu_f}{\dfrac{f_z}{\overline{f_z}} + \overline{\mu_f} \cdot \mu_{g_\varepsilon} \circ f} = \frac{\mu + \dfrac{\overline{f_z}}{f_z} \cdot \gamma_\varepsilon \circ f}{1 + \overline{\mu} \cdot \dfrac{\overline{f_z}}{f_z} \cdot \gamma_\varepsilon \circ f}. \tag{42}$$

Подставляя в (42) выражения из (35) и (38), имеем

$$\mu_{f_\varepsilon} = \frac{\mu + \varkappa_\varepsilon}{1 + \overline{\mu}\varkappa_\varepsilon} = \frac{\mu + \dfrac{\varepsilon\varkappa}{1 - \varepsilon\varkappa\overline{\mu}}}{1 + \overline{\mu}\dfrac{\varepsilon\varkappa}{1 - \varepsilon\varkappa\overline{\mu}}} = \mu + \varepsilon\varkappa\left(1 - |\mu|^2\right) \tag{43}$$

почти всюду. Из (43) и (31) получаем $\mu_{f_\varepsilon} = \mu_\varepsilon$, где μ_ε задано в (32). Таким образом, $\mu_{f_\varepsilon} \in \mathfrak{M}_M$, $\varepsilon \in [0, 1/2]$, вследствие выпуклости $\mathfrak{M}_M$.

Заметим, что гомеоморфизм f_ε является регулярным при любом $\varepsilon \in [0, 1/2]$. Действительно, допустим, что f_ε не регулярен при некотором $\varepsilon \in [0, 1/2]$. Поскольку $|\mu_{f_\varepsilon}| < 1$ почти всюду, это бы означало, что $(f_\varepsilon)_z = 0 = (f_\varepsilon)_{\overline{z}}$ на некотором множестве $E \subseteq \mathbb{C}$ положительной меры, где отображение f_ε дифференцируемо, а f регулярно. Тогда аналогично IC(2) в [3] получаем, что всюду на E $(g_\varepsilon)_w \circ f = \left[(f_\varepsilon)_z \overline{f_z} - (f_\varepsilon)_{\overline{z}} \overline{f_{\overline{z}}}\right] / J_f = 0$ (см. предложение 6). Однако множество $\mathcal{E} := f(E)$ имеет нулевую меру, так как g_ε — квазиконформное отображение. Таким образом, приходим к противоречию с N^{-1}-свойством отображения f (см. [21]). Следовательно, $f_\varepsilon \in H^*_M$, $\varepsilon \in [0, 1/2]$.

Наконец, после замен переменных в (39) приходим к (33), поскольку $|\mathbb{C} \setminus B| = 0$.

1. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal mappings in the plane. – New York etc.: Springer, 1973. – 258 p.
2. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* On the Beltrami equations with two characteristics // Complex Variables and Elliptic Equat. – 2009. – **54**, № 10. – P. 935 – 950.
3. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 132 с.
4. *Schiffer M., Schober G.* Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy – Riemann equations by quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1976. – **2**. – P. 501 – 531.
5. *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1988. – **13**. – P. 25 – 70.
6. *Рязанов В. И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: Дис.. . . д-ра физ.-мат. наук. – Донецк, 1993. – 281 с.
7. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 1. – С. 79 – 115.
8. *Salimov R.* On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 285 – 289.
9. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361 – 1376.
10. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monogr. Math. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
11. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 2006. – **180**, № 1. – P. 75 – 95.
12. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Укр. мат. вестн. – 2008. – **5,** № 4. – С. 524 – 535.
13. *Рязанов В. И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 7. – С. 1009 – 1019.
14. *Рязанов В. И.* Об усилении теоремы сходимости Штребеля К. // Изв. РАН. Сер. мат. – 1992. – **56**, № 3. – С. 636 – 653.
15. *Strebel K.* Ein Konvergensatz für Folgen quasikonformer Abbildungen // Comment. math. helv. – **44**, № 4. – 1969. – P. 469 – 475.
16. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
17. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.
18. *Суворов Г. Д.* Семейство плоских топологических отображений. – Новосибирск: Наука, 1965. – 264 с.
19. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1976. – Т. 2. – 264 с.
20. *Kolomoitsev Iu. S., Ryazanov V. I.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations// Proc. Inst. Appl. Math. and Mech. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2009. – **19**. – P. 116 – 124.
21. *Пономарев С. П.* N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**, № 3. – С. 411 – 418.
22. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Из-во иностр. лит., 1949. – 494 с.
23. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings // Lect. Notes Math. – 1971. – **299**. – 144 p.

24. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
25. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестн. – 2010. – **7**, № 1. – С. 73 – 87.
26. *Ryazanov V., Sevostyanov E.* Equicontinuity of mappings quasiconformal in the mean // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2011. – **36**. – P. 231 – 244.
27. *Гутлянский В. Я.* О методе вариаций для однолистных аналитических функций с квазиконформным продолжением // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 2. – С. 61 – 78.
28. *Ухлов А.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 1. – С. 165 – 171.
29. *Водопьянов С. К., Ухлов А.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. – 1998. – **39**, № 4. – С. 665 – 682.
30. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983. – 284 с.
31. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
32. *Ломако Т. В., Рязанов В. И.* Теория вариационного метода для уравнений Бельтрами // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 1 – 10.
33. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75 – 85.
34. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 223 с.
35. *Kirszbraun M. D.* Uber die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen // Fund. Math. J. – 1934. – **22**. – P. 77 – 108.
36. *McShane E. J.* Extension of range of functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – **40**. – P. 837 – 842.

Получено 08.04.11