УДК 517.98

А. В. Чайковський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ВИЗНАЧЕНІ НА ОСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗСУВАМИ АРГУМЕНТУ

We consider linear first-order differential equations with shifts of arguments with respect to functions with values in a Banach space. Sufficient conditions for the existence of nontrivial solutions of homogeneous equations are obtained. Ordinary differential equations are constructed for which all solutions defined on an axis are solutions of a given equation with shifts of the argument.

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения первого порядка со сдвигами аргумента относительно функций со значениями в банаховом пространстве. Установлены достаточные условия существования нетривиальных решений однородных уравнений. Построены обыкновенные дифференциальыне ураавнения, для которых все определенные на всей оси решения являются решениями заданного уравнения со сдвигами аргумента.

1. Вступ. Диференціальні рівняння з відхиленнями аргументу привертають значну увагу математиків з середини минулого сторіччя (див. монографії [1 – 4]). Однією з важливих задач, що ставиться для таких рівнянь, є задача відшукання розв'язків, що визначені на всій осі. Питанню існування та єдиності обмежених та періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з відхиленнями аргументу присвячено роботи [5 – 12]. Нестандартний підхід до дослідження розв'язків, визначених на всій осі, запропоновано в роботі [13]. У ній розглядається рівняння

$$x'(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t+\lambda) + f(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

де $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, A_1, $A_2\colon \mathbf{R} \to M_n$ — відомі вимірні (за Лебегом) функції, $x\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ — шукана функція, $\lambda \in \mathbf{R}$ — стала, M_n — множина всіх матриць розмірності $n \times n$. Доведено, що за умов

$$\|A_1(t)\| \leqslant \alpha, \qquad \|A_2(t)\| \leqslant \beta, \qquad \|f(t)\| \leqslant 1, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad |\lambda|\beta e^{|\lambda|\alpha+1} < 1 \tag{2}$$

існують обмежені вимірні функції $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $C\colon \mathbf{R} \to M_n$ такі, що всі розв'язки рівняння

$$x'(t) = C(t)x(t) + g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

є розв'язками рівняння (1).

Наприклад, в частинному випадку рівняння зі сталим коефіцієнтом

$$x'(t) = A_2 x(t-1) + f(t), \quad t \in \mathbf{R},$$

умова (2) набирає вигляду

$$\|A_2\| < e^{-1}, \qquad \|f(t)\| \leqslant 1, \quad t \in \mathbf{R}.$$

У цій роботі ідею зведення рівняння з відхиленнями аргументу до звичайного диференціального рівняння застосовано до дослідження диференціальних рівнянь зі сталими операторними коефіцієнтами відносно функцій зі значеннями в комплексному банаховому просторі.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(B)$ — простір усіх лінійних неперервних операторів в B, N — натуральне, $\{A_k\colon 1 \leqslant k \leqslant N\} \subset L(B)$ — набір попарно комутуючих операторів, $\{\tau_k \colon 1 \leqslant k \leqslant N\} \subset \mathbf{R}$. Покладемо

$$Q(z) := z - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\tau_k z}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння з відхиленнями аргументу

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k x(t - \tau_k) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

де $y \in C(\mathbf{R}, B)$ — відома функція, $x \in C^1(\mathbf{R}, B)$ — шукана функція.

У роботі [7] показано, що необхідною і достатньою умовою того, що для кожної обмеженої функції y існує єдиний обмежений розв'язок x, є умова на спектр

$$0 \notin \sigma(Q(it)) \quad \text{для всіх} \quad t \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

У роботі [14] розглянуто однорідне рівняння

$$x'(t) = A_1 x(t-1), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Для нього умову (5) можна записати у вигляді

$$\sigma(A_1) \cap \Gamma = \varnothing,$$

де $\Gamma := \{ite^{it} \mid t \in \mathbf{R}\}$ — подвійна спіраль з самоперетинами. У випадку порушення умови (5) описано деякі достатні умови на розташування спектра, за яких існують ненульові розв'язки. Зокрема, доведене таке твердження.

Теорема [14]. *Нехай умова* (5) *не виконується і спектр* $\sigma(A_1)$ *складається з кількох замкнених частин, що не перетинаються між собою, і кожна з них або не перетинається зі спіраллю* Γ, *або є частиною* Γ *і не містить точок самоперетину спіралі, або є одноточковою множиною. Тоді існують нетривіальні розв'язки рівняння* (4), *що зростають повільніше довільної експоненти. При цьому вони мають загальний вигляд*

$$\sum_{k=1}^{m} e^{C_k t} b_k,$$

де $b_k \colon 1 \leqslant k \leqslant m$ *— довільні елементи простору* B, $\{C_k \colon 1 \leqslant k \leqslant m\} \subset L(B)$ *— фіксований набір операторів.*

У цій роботі за більш слабких умов на спектр операторного коефіцієнта побудовано розв'язки однорідного рівняння (6), а також більш загального однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (4). Також отримано умови побудови звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, всі розв'язки яких є розв'язками неоднорідного рівняння (4).

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \times \ldots \times \sigma(A_N) \subset U$, *де* U *— однозв'язна обмежена область в* $\mathbf{C}^N$, V *— обмежена область в* $\mathbf{C}$,

$$F(z, \overline{w})\colon = z - \sum_{k=1}^{N} w_k e^{-\tau_k z}, \quad z \in V, \qquad \overline{w} = (w_1, \ldots, w_N) \in U.$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) *для кожного* $\overline{w} \in U$ *існує* $z \in V$ *таке, що* $F(z, \overline{w}) = 0$;

2) *існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що для всіх* $z \in V$ *і* $\overline{w} \in U$ *справджується нерівність*

$$|F(z, \overline{w})| + |F'_z(z, \overline{w})| \geqslant \varepsilon.$$

Тоді існує оператор $C \in L(B)$ *такий, що для довільного елемента* $b \in B$ *функція*

$$x(t) = e^{Ct}b, \quad t \in \mathbf{R},$$

є розв'язком рівняння

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k x(t - \tau_k), \quad t \in \mathbf{R}.$$

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \subset U$, *де* U — *обмежена однозв'язна область, замикання якої не містить точок вигляду* $(-e^{z-1}, z)$ *при* $z \in \mathbf{C}$. *Тоді існує оператор* $C \in L(B)$ *такий, що для довільного елемента* $b \in B$ *функція*

$$x(t) = e^{Ct}b, \quad t \in \mathbf{R},$$

є розв'язком рівняння

$$x'(t) = A_1 x(t-1) + A_2 x(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\sigma(A_1) \subset U$, *де* U — *обмежена однозв'язна область, що не містить точки* $(-e^{-1})$. *Тоді існує оператор* $C \in L(B)$ *такий, що для довільного елемента* $b \in B$ *функція*

$$x(t) = e^{Ct}b, \quad t \in \mathbf{R},$$

є розв'язком рівняння (6).

Теорема 2. *Нехай* $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \times \ldots \times \sigma(A_N) \subset U$, *де* U — *однозв'язна обмежена область в* $\mathbf{C}^N$, V — *обмежена область в* $\mathbf{C}$ *та виконуються умови* 1, 2 *теореми* 1 *і для довільного* $t \in \mathbf{R}$

$$0 \notin \sigma(Q(it)),$$

u — *обмежена функція. Тоді існує оператор* $C \in L(B)$ *та для кожної обмеженої функції* y *існує обмежена функція* u *така, що кожен розв'язок рівняння*

$$x'(t) = Cx(t) + u(t), \quad t \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

є розв'язком рівняння (4).

При цьому у випадку $\tau_k \in \mathbf{Q}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, *якщо функція* u *є майже періодичною, або періодичною з періодом* $T > 0$, *таку ж властивість має функція* y.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \subset U$, *де* U — *обмежена однозв'язна область, замикання якої не містить точок вигляду* $(-e^{z-1}, z)$ *при* $z \in \mathbf{C}$. *Тоді існує оператор* $C \in L(B)$ *та для кожної обмеженої функції* y *існує обмежена функція* u *така, що кожен розв'язок рівняння* (7) *є розв'язком рівняння*

$$x'(t) = A_1 x(t-1) + A_2 x(t) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

***Наслідок* 4.** *Нехай $\sigma(A_1) \subset U$, де U — обмежена однозв'язна область, що не містить точки $(-e^{-1})$. Тоді існує оператор $C \in L(B)$ такий, що кожен розв'язок рівняння* (7) *є розв'язком рівняння*

$$x'(t) = A_1 x(t-1) + y(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

3. Доведення теорем.

Лема 1. *Нехай U — однозв'язна обмежена область в $\mathbf{C}^N$, V — обмежена область в $\mathbf{C}$. Припустимо, що виконуються умови* 1, 2 *теореми* 1.

Тоді існує аналітична функція $g\colon U \to V$ така, що для всіх $\overline{w} \in U$ справджується рівність

$$F(g(\overline{w}), \overline{w}) = 0.$$

Доведення. Розглянемо довільну точку $\overline{w^0} \in U$. За умовою 1 можна вибрати $z^0 \in V$ так, що $F(z^0, \overline{w^0}) = 0$. За умовою 2 $F'_z(z^0, \overline{w^0}) \neq 0$. Тому в околі точки $(z^0, \overline{w^0})$ застосовна теорема про локальне існування неявної функції g. Завдяки обмеженості областей U, V радіус околу точки в цій теоремі можна вибрати один для всіх точок $\overline{w^0} \in U$. Тому функцію g можна, починаючи з довільної точки $(z^0, \overline{w^0}) \in V \times U$ такої, що $F(z^0, \overline{w^0}) = 0$, аналітично продовжити вздовж довільного шляху.

Враховуючи однозв'язність області U, за теоремою про монодромію [15] функція g, починаючи з довільної точки $(z^0, \overline{w^0})$, однозначно продовжується аналітично на область U.

Лема 2. *Нехай $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \times \ldots \times \sigma(A_N) \subset U$, де U — однозв'язна обмежена область в $\mathbf{C}^N$, V — обмежена область в $\mathbf{C}$ та виконуються умови* 1, 2 *теореми* 1. *Тоді існує оператор $C \in L(B)$ такий, що*

$$C = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\tau_k C}.$$

Доведення. Враховуючи лему 1 та теорію аналітичних функцій від операторів [16], можна покласти $C := g(A_1, \ldots, A_N)$. Тоді отримаємо $F(C, A_1, \ldots, A_N) = 0$, що і дає потрібну рівність.

Лема 3. *Для довільного $R_1 > 0$ існує $R_2 > 0$ таке, що для кожного комплексного числа w такого, що $|w| \leqslant R_1$, існує комплексне число z таке, що $|z| \leqslant R_2$ і $ze^z = w$.*

Доведення. Нехай $w = Re^{i\psi}$, $R > 0$, $\psi \in [0, 2\pi)$. При достатньо малих R потрібне z існує за теоремою про обернену функцію. Розглянемо випадок, коли $R \geqslant \varepsilon$ при деякому $\varepsilon > 0$.

Шукатимемо z у вигляді $z = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbf{R}$. Тоді рівняння $ze^z = w$ еквівалентне системі

$$R = re^{r \cos\varphi},$$

$$\psi = \varphi + r \sin\varphi.$$

Виражаючи r з другого рівняння і підставляючи в перше, отримуємо

$$R = \frac{\psi - \varphi}{\sin\varphi} e^{(\psi - \varphi)\operatorname{ctg}\varphi},$$

$$r = \frac{\psi - \varphi}{\sin\varphi}.$$

Аналізуючи функцію $f(\varphi) = \dfrac{\psi - \varphi}{\sin\varphi} e^{(\psi-\varphi)\operatorname{ctg}\varphi}$ у правій частині першого рівняння системи, бачимо, що це рівняння за теоремою Коші про проміжне значення при кожному $\psi \in [0, 2\pi)$ має розв'язок $\varphi \in (3\pi, 4\pi)$. Якщо при цьому $R \in [\varepsilon, R_1]$, то φ не наближається до кінців інтервала, отже, r є обмеженим.

Лема 4. *Нехай $\sigma(A_1) \times \sigma(A_2) \subset U$, де U — обмежена однозв'язна область, замикання якої не містить точок вигляду $(-e^{z-1}, z)$ при $z \in \mathbf{C}$. Тоді існує оператор $C \in L(B)$ такий, що*

$$C = A_1 e^{-C} + A_2.$$

Доведення. Нехай $R_1 := \sup_{(w_1,w_2)\in U} \|w_1\| e^{\|w_2\|}$, $R_3 := \sup_{(w_1,w_2)\in U} \|w_2\|$. Вибравши R_2 за лемою 3, покладемо

$$V := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant R_2 + R_3,\ \exists w \in \mathbf{C}\colon (ze^z - we^z, w) \in U\}.$$

Перевіримо умови леми 2 при $N = 2$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0$.

1. Рівняння $z = w_1 e^{-z} + w_2$ можна записати у вигляді $(z - w_2)e^{z-w_2} = w_1 e^{-w_2}$. Потрібне твердження випливає з леми 3.

2. Якщо припустити, що ця умова не виконується, то в замиканні області U знайдеться точка $(z, \overline{w})$ така, що $|z - w_1 e^{-z} - w_2| + |1 + w_1 e^{-z}| = 0$, тобто $z = -1 + w_2$, $w_1 = -e^{w_2-1}$, що неможливо за умовою.

Застосовуючи лему 2, отримаємо потрібне твердження.

Наслідок 5. *Нехай $\sigma(A_1) \subset U$, де U — обмежена однозв'язна область, що не містить точки $(-e^{-1})$. Тоді існує оператор $C \in L(B)$ такий, що*

$$Ce^C = A_1.$$

Доведення теореми 1 випливає з леми 2 та властивостей операторної експоненти [16].

Зауваження. З доведення лем 1, 2 випливає, що вибираючи різні початкові точки $(z^0, \overline{w^0})$, можна визначати різні оператори C.

Доведення наслідків з теореми 1 випливає з леми 4 та властивостей операторної експоненти [16].

Доведення теореми 2. Нехай C — оператор, визначений у лемі 2. Якщо x — розв'язок рівняння (7), то

$$\exists x_0 \in B\colon\ x(t) = e^{Ct}x_0 + \int_0^t e^{C(t-s)}u(s)ds, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Підставляючи його в рівняння (4), отримуємо

$$\left(C - \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\tau_k C}\right) x_0 + C\int_0^t e^{C(t-s)}u(s)ds + u(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} A_k \int_0^{t-\tau_k} e^{C(t-\tau_k-s)}u(s)ds = y(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Враховуючи лему 2, маємо

$$C\int\limits_0^t e^{C(t-s)}u(s)ds-\sum_{k=1}^N\int\limits_0^{t-\tau_k}A_ke^{C(t-\tau_k-s)}u(s)ds=y(t)-u(t),\quad t\in\mathbf{R}.$$

Здиференціюємо цю рівність по t :

$$Cu(t)+C^2\int\limits_0^t e^{C(t-s)}u(s)ds-\sum_{k=1}^N(A_ku(t-\tau_k)+$$

$$+C\int\limits_0^{t-\tau_k}A_ke^{C(t-\tau_k-s)}u(s)ds)=(y-u)'(t),\quad t\in\mathbf{R},$$

або, враховуючи попередню рівність,

$$Cy(t)-\sum_{k=1}^N A_ku(t-\tau_k)=(y-u)'(t),\quad t\in\mathbf{R}.$$

З урахуванням умови на спектр з [7] випливає, що це рівняння має єдиний обмежений неперервний розв'язок u.

Враховуючи результати роботи [17], отримуємо останнє твердження теореми.

Теорему 2 доведено.

4. Висновки. У роботі знайдено достатні умови існування нетривіальних розв'язків однорідних диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу в банаховому просторі. Також побудовано звичайні диференціальні рівняння, для яких всі визначені на всій осі розв'язки є розв'язками заданого рівняння зі зсувами аргументу.

1. *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 248 с.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
3. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
5. *Мухамадиев Э.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций // Докл. АН СССР. Сер. мат., физ. – 1971. – **196**, № 1. – С. 47 – 49.
6. *Курбатов В. Г.* О спектре оператора с соизмеримыми отклонениями аргумента и постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 10. – С. 1770 – 1775.
7. *Слюсарчук В. Е.* Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве бесконечно дифференцируемых на оси функций // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 10. – С. 1796 – 1803.
8. *Слюсарчук В. Е.* О разрешимости функциональных и функционально-дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных на оси функций // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев, 1983. – С. 83 – 88.
9. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130(172)**, № 1(5). – С. 86 – 104.
10. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
11. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
12. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103 – 126.
13. *Самойленко А. М.* Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 5. – С. 631 – 640.

14. *Чайковський А. В.* Дослідження одного лінійного диференціального рівняння за допомогою узагальнених функцій зі значеннями у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 688 – 693.
15. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964. – 411 с.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
17. *Чайковський А. В.* Про існування та єдиність періодичних розв'язків лінійного диференціального рівняння зі зсувами аргументу в банаховому просторі // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 2001. – Вип. 6. – С. 62 – 65.

Одержано 07.06.10,
після доопрацювання — 06.07.11