УДК 512.542

В. А. Васильев, А. Н. Скиба (Гомель. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МОДУЛЯРНЫХ ПОДГРУПП

We study the influence of generalized modular subgroups on the structure of finite groups.

Досліджується вплив узагальнених модулярних підгруп на будову кінцевих груп.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:

1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$;

2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша [1, с. 43], гл. 2) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1] (гл. 5) модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций различных классов групп. Подгруппа, порожденная двумя модулярными подгруппами, является модулярной (см. раздел 5.1 в [1]). Таким образом, каждая подгруппа H группы G имеет наибольшую содержащуюся в ней модулярную подгруппу H_{mG} группы G. Мы называем подгруппу H_{mG} модулярным ядром подгруппы H. Базируясь на понятии модулярного ядра, введем следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение 1.1. *Подгруппу H группы G назовем m-добавляемой в G, если в G существует такая подгруппа K, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$.*

Легко видеть, что любая модулярная подгруппа является m-добавляемой и, в то же время, существуют группы, в которых класс m-добавляемых подгрупп шире, чем класс всех ее модулярных подгрупп (см. пример в конце п. 4).

Подгруппа A группы G называется квазинормальной (Оре [3]) или перестановочной (Стоунхьюер [4]) в G, если $AB = BA$ для всех $B \leq G$. Квазинормальные подгруппы обладают многими интересными свойствами, в частности, если A — квазинормальная подгруппа группы G, то $A^G/A_G \leq Z_\infty(G/A_G)$ [5], т. е. каждый главный фактор группы G/A_G ниже A^G/A_G является центральным.

Согласно теореме 5.1.1 [1] (гл. 5), подгруппа A является квазинормальной в группе G тогда и только тогда, когда A субнормальна в G и является модулярной подгруппой в G. Оказалось, что если подгруппа A модулярна в G, то каждый главный фактор группы G/A_G ниже A^G/A_G является циклическим [1] (гл. 5, теорема 5.2.5).

Дополняя эти результаты, в данной работе мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G, p — простой делитель порядка подгруппы E и $(p-1, |E|) = 1$. Если каждая циклическая подгруппа из E порядка p или порядка 4 является m-добавляемой в G, то каждый главный фактор группы G между E и $O_{p'}(E)$ является циклическим.*

Теорема 1.2. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Если каждая циклическая подгруппа из E нечетного простого порядка является m-добавляемой в G, то каждый главный фактор группы G между E и $O_2(E)$ является циклическим.*

Теорема 1.3. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Если каждая циклическая подгруппа из E простого порядка или порядка 4 является m-добавляемой в G, то каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим.*

Мы докажем эти теоремы в п. 3. В п. 4 рассмотрены приложения этих теорем. Используемая в статье терминология стандартна, при необходимости мы отсылаем читателя к монографиям [6 – 8].

2. Некоторые предварительные результаты. Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 2.1 ([1], гл. 5, раздел 5.1). *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) *если M_1 и M_2 являются модулярными в G подгруппами, то $\langle M_1, M_2\rangle$ — модулярная в G подгруппа*;

(b) *если N — нормальная в G подгруппа, то N является модулярной в G подгруппой*;

(c) *если N — нормальная в G подгруппа и M — модулярная в G подгруппа, то MN/N — модулярная в G/N подгруппа*;

(d) *если $N \leq M \leq G$, N нормальна в G и M/N модулярна в G/N, то M модулярна в G*;

(e) *если $M \leq M_1 \leq G$ и M модулярна в G, то M модулярна в M_1*;

(f) *если φ — изоморфизм группы G на группу $\bar{G}$ и M модулярна в G, то M^{φ} модулярна в $\bar{G}$*;

(g) *если M является модулярной в G подгруппой, то $H \cap M$ — модулярная в H подгруппа для всех $H \leq G$*;

(h) *если $G = G_1 \times G_2$, $(|G_1|, |G_2|) = 1$ и подгруппы M_1, M_2 являются модулярными в G_1, G_2 соответственно, то $M_1 \times M_2$ является модулярной подгруппой в G.*

Следующая лемма показывает, что модулярное ядро имеет свойства, аналогичные свойствам нормального ядра подгруппы.

Лемма 2.2. *Пусть G — группа и $H \leq K \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *H_{mG} — модулярная в G подгруппа и $H_G \leq H_{mG}$*;

(2) *$H_{mG} \leq H_{mK}$*;

(3) *если H нормальна в G, то $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$*;

(4) *H_{mG} — нормальная в H подгруппа.*

Доказательство. (1) Это утверждение следует из леммы 2.1(a).

(2) Применяя лемму 2.1(e), видим, что множество всех модулярных в G подгрупп из H содержится во множестве всех модулярных в K подгрупп из H. Значит, $H_{mG} \leq H_{mK}$.

(3) Пусть $M_1/H,\ M_2/H, \ldots, M_n/H$ — набор всех тех модулярных в G/H подгрупп, которые содержатся в K/H. Тогда $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1/H, M_2/H, \ldots$ $\ldots, M_n/H\rangle = \langle M_1, M_2, \ldots, M_n\rangle/H$. По лемме 2.1(d) $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — модулярные в G подгруппы, которые содержатся в K. Значит, $(K/H)_{m(G/H)} = \langle M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_n\rangle/H \subseteq K_{mG}/H$.

Если же $K_1, K_2, \ldots K_t$ — набор всех модулярных в G подгрупп, содержащихся в K, то $K_{mG} = \langle K_1, K_2, \ldots, K_t\rangle$. Согласно лемме 2.1(c) K_iH/H — модулярная в G/H подгруппа, и, очевидно, $K_iH/H \subseteq K/H$, $i = 1, \ldots, t$. Значит, $K_{mG}/H \subseteq$ $\subseteq (K/H)_{m(G/H)}$. Таким образом, $(K/H)_{m(G/H)} = K_{mG}/H$.

(4) Из $H_{mG} \subseteq H$ следует, что $(H_{mG})^h \subseteq H$ для любого $h \in H$. Так как, согласно первому утверждению леммы, H_{mG} — модулярная в G подгруппа, то $(H_{mG})^h$ — модулярная в G подгруппа по лемме 2.1(f). Значит, $(H_{mG})^h \subseteq H_{mG}$, а это влечет $(H_{mG})^h = H_{mG}$. Таким образом, H_{mG} нормальна в H.

Лемма доказана.

Символом $Z_{\mathcal{U}}(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G, у которой все G-главные факторы цикличны ($Z_{\mathcal{U}}(G) = 1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

Лемма 2.3 ([1], гл. 5, теорема 5.2.5)**.** *Если подгруппа H модулярна в G, то*

$$H^G/H_G \leq Z_{\mathcal{U}}(G/H_G).$$

Общие свойства m-добавляемых подгрупп описывает следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть G — группа. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если H является m-добавляемой в G подгруппой и $H \leq M \leq G$, то H является m-добавляемой в M подгруппой*;

(2) *если N — нормальная подгруппа в G и $N \leq H$, то H является m-добавляемой в G в подгруппой тогда и только тогда, когда H/N — m-добавляемая в G/N подгруппа*;

(3) *если N — нормальная подгруппа группы G, H — m-добавляемая подгруппа в G и $(|H|, |N|) = 1$, то HN — m-добавляемая подгруппа в G*;

(4) *пусть π — некоторое множество простых чисел, N — нормальная π'-подгруппа в G, H — π-подгруппа в G; если H — m-добавляемая в G подгруппа, то HN/N является m-добавляемой в G/N подгруппой.*

Доказательство. (1) Пусть T — подгруппа группы G такая, что $HT = G$ и $H \cap T \leq H_{mG}$. Тогда $M = H(T \cap M)$ и $(T \cap M) \cap H = T \cap H \leq H_{mG} \leq H_{mM}$ по лемме 2.2(2).

(2) Предположим, что H/N является m-добавляемой в G/N подгруппой. Тогда существует подгруппа K/N в G/N такая, что $G/N = (H/N)(K/N)$ и $(H/N) \cap \cap (K/N) \leq (H/N)_{m(G/N)}$. Тогда $G = HK$ и по лемме 2.2(3) $(H/N)_{m(G/N)} = = H_{mG}/N$, что влечет $(H/N) \cap (K/N) = (H \cap K)/N \leq H_{mG}/N$. Значит, $H \cap K \leq \leq H_{mG}$ и поэтому H является m-добавляемой в G.

Обратно, если H является m-добавляемой в G подгруппой, то существует такая подгруппа K в G, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{mG}$. Покажем, что H/N является m-добавляемой в G/N подгруппой. Понятно, что $(H/N)(KN/N) = G/N$. Из $H \cap K \leq H_{mG}$ получаем $(H/N) \cap (KN/N) = (H \cap KN)/N = N(H \cap K)/N \leq \leq H_{mG}/N = (H/N)_{m(G/N)}$. Значит, H/N является m-добавляемой в G/N.

(3) Поскольку H m-добавляема в G, существует такая подгруппа T в G, что $G = HT$ и $H \cap T \leq H_{mG}$. Понятно, что $N \leq T$ и $HNT = HT = G$. Так как $T \cap HN = N(T \cap H) \leq NH_{mG}$, по лемме 2.1(a), (b) получаем, что $NH_{mG} \leq \leq (NH)_{mG}$. Значит, $T \cap HN \leq (NH)_{mG}$, а это означает, что HN — m-добавляемая подгруппа в G.

(4) Следует из второго и третьего утверждений леммы.

Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{F}$ — любой класс групп, содержащий все единичные группы. Тогда $G^{\mathcal{F}}$ используется для обозначения пересечения всех нормальных подгрупп N группы G таких, что $G/N \in \mathcal{F}$. Класс групп $\mathcal{F}$ называется формацией, если либо $\mathcal{F} = \varnothing$, либо $\mathcal{F} \neq \varnothing$ и для каждой группы G любой гомоморфный образ ее фактор-группы $G/G^{\mathcal{F}}$ принадлежит $\mathcal{F}$. Напомним, что формация $\mathcal{F}$ называется насыщенной, если $\mathcal{F}$ содержит каждую группу G такую, что $G^{\mathcal{F}} \leq \Phi(G)$.

Лемма 2.5 ([6], гл. VI, теорема 24.2)**.** *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация и G — минимальная не-$\mathcal{F}$-группа с разрешимым $\mathcal{F}$-корадикалом $G^{\mathcal{F}}$. Тогда*:

(a) $P = G^{\mathcal{F}}$ *является p-группой для некоторого простого p и P — группа экспоненты p или экспоненты* 4 (*если P является неабелевой* 2*-группой*);

(b) $P/\Phi(P)$ *— главный фактор группы G и* $(P/\Phi(P)) \rtimes (G/C_G(P/\Phi(P))) \notin \mathcal{F}$.

Лемма 2.6. *Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G и $L \leq$ $\leq O_p(G)$. Если некоторая минимальная подгруппа из L является m-добавляемой в G, то $|L| = p$.*

Доказательство. Предположим, что $|L| > p$. Пусть R — минимальная подгруппа в L. Поскольку R является m-добавляемой в G, существует такая подгруппа T в G, что $RT = G$ и $R \cap T \leq R_{mG}$. Предположим, что $T < G$. Тогда $G = L \rtimes T$, что влечет $RT \neq G$. Это противоречие показывает, что $T = G$. Тогда $R = R_{mG}$ — модулярная подгруппа в G. Значит, по лемме 2.3 $R^G/R_G \leq Z_{\mathcal{U}}(G/R_G)$. Но $R_G = 1$ и $R^G \neq 1$. Следовательно, $R^G \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$ и $L \cap Z_{\mathcal{U}}(G) \neq 1$, что влечет $L \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. Значит, $|L| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 2.7. *Пусть P — нормальная подгруппа группы G и L — некоторая ее циклическая подгруппа простого порядка или порядка* 4*. Предположим, что в G имеется такая подгруппа T, что $LT = G$ и $T \cap L < L$. Тогда для некоторой нормальной в G подгруппы D имеет место $D < P$ и P/D — циклическая группа.*

Доказательство. Если $|L| = p$, то $|P \colon P \cap T| = p$. Следовательно, $D = P \cap T$ — максимальная подгруппа из P и поэтому D нормальна в P. Но D нормальна в T. Значит, D является нормальной подгруппой в G и $|P/D| = p$. Предположим теперь, что $|L| = 4$ и $T \cap L = 1$. Возможны два случая:

a) $D = P \cap T$ является нормальной подгруппой в G и $P/D \simeq L$ — циклическая подгруппа;

b) $P \cap T$ не является нормальной подгруппой в G.

Поскольку $P \cap T \neq P$, существует такая подгруппа P_1 в P, что $P \cap T$ максимальна в P_1 и, значит, $P_1 \nleq T$. Следовательно, $T < \langle P_1, T\rangle \leq N_G(P \cap T)$ и $N_G(P \cap T)$ максимальна в G. Поэтому $|G \colon N_G(P \cap T)| = 2$ и $N_G(P \cap T)$ нормальна в G. Значит, $N_G(P \cap T) \cap P$ нормальна в G. Так как $N_G(P \cap T)P/N_G(P \cap T) \simeq P/N_G(P \cap T) \cap P$, то $P/N_G(P \cap T) \cap P$ — группа порядка p.

Случай, когда $|L| = 4$ и $|L : T \cap L| = 2$, рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Пусть P — некоторая p-подгруппа. Если P не является неабелевой 2-группой, то мы используем символ $\Omega(P)$ для обозначения подгруппы $\Omega_1(P)$. В противном случае $\Omega(P) = \Omega_2(P)$.

Лемма 2.8. *Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G и $\Omega(P) = P$. Если каждая циклическая подгруппа из P простого порядка и порядка* 4 (*если P — неабелева* 2*-группа*) *является m-добавляемой в G, то $P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$.*

Доказательство. Предположим, что данная лемма не верна и группа G — контрпример с наименьшим $|G||P|$. По лемме 2.6 P не является минимальной нормальной подгруппой в G. Покажем, что группа G содержит нормальную подгруппу $R \leq P$ такую, что P/R является нециклическим главным фактором группы

G, $R \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$ и $V \leq R$ для любой нормальной подгруппы $V \neq P$ из G, содержащейся в P. Действительно, пусть P/R — главный фактор группы G. Тогда условие леммы верно для (G, R). Значит, $R \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$ и поэтому P/R — нециклический фактор по выбору (G, P). Пусть теперь $V \neq P$ — любая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в P. Тогда $V \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. Если $V \nleq R$, то из G-изоморфизма $P/R = VR/R \simeq V/V \cap R$ получаем, что $P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$, а это противоречит выбору (G, P). Значит, $V \leq R$.

Пусть V_1, $V_2, \ldots, V_t$ — множество всех циклических подгрупп из P порядка p и порядка 4 (если P — неабелева 2-группа). По условию все они являются m-добавляемыми подгруппами в G. Ясно, что $P/R = (V_1R/R)(V_2R/R)\ldots(V_tR/R)$. Не нарушая общности, можно предположить, что $V_1R/R \neq 1$. Заметим, что $|V_1R/R| \simeq |V_1/V_1 \cap R| = p$. Если V_1 модулярна в G, то по лемме 2.1(a)–(c) V_1R/R модулярна в G/R и по лемме 2.6 получаем, что P/R — циклическая группа. Это противоречит вышеизложенному. Значит, V_1 не модулярна в G. Заметим, что V_1 имеет добавление T в G такое, что $T \cap V_1 < V_1$. Действительно, так как V_1 является m-добавляемой подгруппой в G, то $G = TV_1$ и $T \cap V_1 \leq (V_1)_{mG}$. Если $V_1 = T \cap V_1 \leq (V_1)_{mG}$, то $V_1 = (V_1)_{mG}$ — модулярная подгруппа. Это противоречит предположению о подгруппе V_1. Значит, $T \cap V_1 < V_1$. По лемме 2.7 для некоторой нормальной в G подгруппы D имеет место $D < P$ и P/D — циклическая группа. Но, как показано выше, $D \leq R$. Получили противоречие с тем, что P/R — нециклический фактор.

Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Пусть P — нормальная p-подгруппа группы G. Если $\Omega(P) \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$, то $P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$.*

Доказательство. Пусть $C = C_G(P)$ и H/K — произвольный главный фактор-группы G ниже P. Тогда $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$ согласно лемме 3.9 в [6] (гл. I). Поскольку $\Omega(P) \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$, то $(G/C_G(\Omega(P)))^{\mathcal{A}(p-1)}$ является p-подгруппой согласно лемме 2.2 [11]. Значит, $(G/C)^{\mathcal{A}(p-1)}$ — p-группа по теореме 2.4 [10]. Таким образом, $G/C_G(H/K) \in \mathcal{A}(p-1)$ и поэтому $|H/K| = p$ согласно теореме 4.1 в [6] (гл. I). Следовательно, $P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$.

Лемма доказана.

Лемма 2.10 ([13], лемма 2.8)**.** *Если группа G p-сверхразрешима и $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима и p — наибольший простой делитель $|G|$.*

Следуя Дерку и Хоуксу [7], используем $C^p(G)$ для обозначения пересечения централизаторов всех абелевых p-главных факторов группы G ($C^p(G) = G$, если G не имеет таких главных факторов).

Для каждой функции f вида

$$f\colon \mathbb{P} \cup \{0\} \to \{\text{формации групп}\} \tag{2.1}$$

положим, следуя [9], $CLF(f) = \{G - \text{группа} \mid G/G_{\mathcal{S}} \in f(0) \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для любого простого числа } p \in \pi(\mathrm{Com}(G))\}$. Здесь $G_{\mathcal{S}}$ обозначает $\mathcal{S}$-радикал группы G (т. е. наибольшую нормальную разрешимую подгруппу группы G); $\mathrm{Com(G)}$ — класс всех абелевых групп A таких, что $A \simeq H/K$ для некоторого композиционного фактора H/K группы G. Формация $\mathcal{F}$ называется композиционной, если для некоторой функции вида (2.1) имеет место $\mathcal{F} = CLF(f)$.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathcal{F}$ — композиционная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если E — циклическая подгруппа, то $G \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что E — минимальная нормальная подгруппа группы G, и поэтому $|E| = p$ для некоторого простого числа p. Согласно теореме 1 [9], $\mathcal{F} = CLF(f)$ для некоторой функции вида (2.1). Ясно, что группа $H = E \leftthreetimes (G/C_G(E))$ является сверхразрешимой, поэтому $H \in \mathcal{F}$. Значит, $G/C_G(E) \in f(p)$. Пусть $C^p/E = C^p(G/E)$. Тогда $C^p(G) = C^p \cap C_G(E)$ согласно теореме 3.2 [7] (гл. A). Но так как $G/E \in \mathcal{F}$, то $G/C^p \simeq (G/E)/C^p(G/E) \in f(p)$ и поэтому $G \in \mathcal{F}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.12 ([1], гл. 5, раздел 5.2)**.** *Если M является циклической квазинормальной подгруппой группы G, то каждая подгруппа из M квазинормальна в G.*

Лемма 2.13 ([12], гл. 1, лемма 1.37)**.** *Пусть $G = AB$, где A и B — подгруппы группы G. Тогда для любого простого числа p существуют такие силовские p-подгруппы P, P_1 и P_2 соответственно в G, A и B, что $P = P_1P_2$.*

3. Доказательства теорем 1.1 – 1.3. ***Доказательство теоремы* 1.1.** Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ является минимальным. Пусть $Z = Z_{\mathcal{U}}(G)$ и $C = C_G(P)$, где P — силовская p-подгруппа в E.

(1) *Если V — нормальная p'-холлова подгруппа в E, то условие теоремы выполняется для $(G/V, E/V)$.*

Понятно, что E/V нормальна в G/V и p — простой делитель $|E/V|$ и $(p - 1, |E/V|) = 1$. Заметим также, что $P \simeq PV/V \in \mathrm{Syl}_p(E/V)$. Пусть теперь $L/V \leq PV/V$, где L/V — циклическая подгруппа порядка p или порядка 4. Так как $L/V = V(L \cap P)/V \simeq (L \cap P)/V \cap (L \cap P) = (L \cap P)/1 \simeq L \cap P$, то $L \cap P$ — циклическая подгруппа из P порядка p или порядка 4. Поэтому по условию теоремы $L \cap P$ является m-добавляемой подгруппой в G. Но $L = L \cap PV = V(L \cap P)$ и $(|V|, |L \cap P|) = 1$, и, значит, по лемме 2.4(4) $V(L \cap P)/V$ является m-добавляемой подгруппой в G. Таким образом, условие теоремы верно для $(G/V,\ E/V)$.

(2) *E является p-нильпотентной группой.*

Предположим, что $E \neq G$. По лемме 2.4(1) условие теоремы верно для (E, E). Значит, E является p-нильпотентной группой по выбору (G, E). Теперь предположим, что $E = G$. Тогда G не является p-нильпотентной группой, и поэтому G имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта $H = H_p \leftthreetimes H_q$ согласно теореме 5.4 [7] (гл. IV). Не нарушая общности, можем полагать, что $H_p \leq P$. По лемме 2.5 $H_p/\Phi(H_p)$ является нецентральным главным фактором группы H и H_p — группа экспоненты p или экспоненты 4 (если $p = 2$ и P неабелева). Значит, $|H_p/\Phi(H_p)| > p$, так как по условию теоремы p является простым делителем порядка группы $G = E$ и $(p - 1, |E|) = 1$. Пусть $\Phi = \Phi(H_p)$, X/Φ — минимальная подгруппа в H_p/Φ, $x \in X \setminus \Phi$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$. Следовательно, L является m-добавляемой подгруппой в G. Предположим, что $L_{mG} \neq L$. Тогда для некоторой собственной подгруппы T из G имеем $LT = G$ и $H = L(T \cap H)$. Понятно, что $T \cap H < H$. Поскольку $\Phi \leq \Phi(H)$, получаем $\Phi(T \cap H) < H$. Пусть L_1 — максимальная в L подгруппа. Заметим, что $L_1 \leq \Phi$. Значит, $|H : \Phi T| = p$. Следовательно, $|H_p/\Phi| = |H/\Phi : \Phi T/\Phi| = |H : \Phi T| = p$. Это противоречие показывает, что $L_{mG} = L$ и L является модулярной подгруппой в G. Значит, $L\Phi/\Phi = X/\Phi$ является модулярной подгруппой в H/Φ по лемме 2.1(a) – (c). Следовательно, каждая минимальная подгруппа из H_p/Φ является m-добавляемой в H/Φ. Таким образом, $|H_p/\Phi| = p$ по лемме 2.6. Полученное противоречие показывает, что E является p-нильпотентной.

(3) *$E = P \nleq Z$ и P не является минимальной нормальной подгруппой в G.*

Пусть V — p'-холлова подгруппа в E. Тогда, согласно утверждению (2), V является нормальной подгруппой в E, а значит, и характеристической в E подгруппой. Следовательно, V является нормальной подгруппой в G. Согласно утверждению (1), условие теоремы верно для $(G/V, E/V)$. Предположим, что $V \neq 1$. Тогда $E/V \leq Z_{\mathcal{U}}(G/V)$ по выбору (G, E). Это противоречит выбору этой пары. Значит, $V = 1$ и $E = P \nleq Z$. По лемме 2.6 P не является минимальной нормальной подгруппой в G.

(4) *Группа G содержит неединичную нормальную подгруппу $R \leq P$ такую, что P/R является нециклическим главным фактором группы G, $R \leq Z$ и $V \leq R$ для любой нормальной подгруппы $V \neq P$ из G, содержащейся в P.*

См. доказательство леммы 2.8.

(5) $\Omega(E) = \Omega \nleq Z$.

Это утверждение следует из леммы 2.9 и утверждения (3).

(6) $\Omega(E) = E$.

Предположим, что $\Omega < P = E$. Тогда в силу (4) $\Omega \leq Z$, что противоречит (5).

Заключительное противоречие. Применяя лемму 2.8, получаем, что $P \leq Z$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

***Доказательство теоремы* 1.2.** Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ минимально. Сначала покажем, что E является $2'$-сверхразрешимой группой. Действительно, предположим, что $E \neq G$. По лемме 2.4 условие теоремы выполняется для (E, E), и поэтому E является $2'$-сверхразрешимой группой по выбору (G, E). Пусть теперь $E = G$.

В силу леммы 2.4(1) условие теоремы выполняется для любой подгруппы из G. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из G является $2'$-сверхразрешимой по выбору G. Поэтому каждая максимальная подгруппа из G является разрешимой.

Сначала покажем, что группа G разрешима. Предположим, что это не так. Тогда $G = G'$ и если $F = F(G)$, то $F = \Phi(G)$ G/F — простая неабелева группа и каждая собственная нормальная подгруппа из G содержится в F. Ясно, что каждая максимальная подгруппа из G/F является разрешимой и, значит, в силу [15] G/F изоморфна одной из следующих групп: $PSL_2(p)$ (где $p > 3$ — такое простое число, что $p^2 + 1 \equiv 0(5)$), $PSL_2(3^p)$ (где p — нечетное простое число), $PSL_2(2^p)$ (где p — простое число), $PSL_3(3)$, группа Сузуки $Sz(2^p)$ (где p — нечетное простое число).

Пусть r — наибольший простой делитель $|G/F|$ и G_r — силовская r-подгруппа из G. Тогда $r > 3$ по теореме Бернсайда о разрешимости бипримарных групп. Пусть p — любой нечетный простой делитель $|G/F|$, C_p — циклическая подгруппа из G порядка p. Покажем, что $C_p \leq F$. Предположим, что это не так и C_p не является модулярной подгруппой в G. Поскольку по условию C_p является m-добавляемой в G, существует такая подгруппа T в G, что $C_pT = G$ и $C_p \cap T \leq (C_p)_{mG} = 1$. Следовательно, T является дополнением к C_p в G и поэтому $|G : T| = p$. Рассматривая представление группы G/T_G подстановками на множестве правых смежных классов по T/T_G, видим, что G/T_G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_p степени p. Поскольку T — максимальная подгруппа в G, то $F = \Phi(G) \leq T$. Значит, $T_G = F$. Следовательно, $p = r$ и силовская p-подгруппа из G/T_G имеет простой порядок. Поэтому для любого нечетного простого числа $p < r$, делящего $|G/F|$, C_p является модулярной подгруппой в G. Значит, по лемме 2.1(a)–(c), $D/F = C_pF/F$ — модулярная подгруппа в G/F. По лемме 2.3 $(D/F)^{G/F}/(D/F)_{G/F} \leq Z_{\mathcal{U}}(G/F) = 1$. Следовательно, $(D/F)^{G/F} = (D/F)_{G/F}$, что влечет $D/F = (D/F)^{G/F}$, т. е. D/F нормальна в G/F. Поскольку G/F — простая неабелева группа, то $D/F = G/F$. Но $|D/F| = p$. Полученное противоречие показывает, что $C_p \leq F$.

Пусть P — силовская p-подгруппа из F. Так как P нормальна в F, $P \operatorname{char} F$ и F нормальна в G, то P нормальна в G. Пусть $R = (G_r)^x$ для некоторого $x \in G$. Покажем, что $V = P \rtimes R$ нильпотентна. В силу леммы 2.4(1) каждая минимальная подгруппа из P является m-добавляемой в V. Следовательно, $Q \leq Z_{\mathcal{U}}(V)$ по теореме 1.1. Значит, V сверхразрешима и из $p < r$ следует, что R нормальна в V по теореме 9.1(c) из [14] (гл. VI). Следовательно, V нильпотентна, что влечет $R \leq C_G(P)$. Так как $(G_r)^G$ нормальна в G и $(G_r)^G \nleq F$, то $(G_r)^G = G \leq C_G(P)$. Отсюда $P \leq Z(G)$ и $P \leq \Phi(G)$ в силу того, что $F = \Phi(G)$.

Пусть W — p'-холловская подгруппа из F. Тогда $PW/W \leq Z(G/W)$ и $PW/W \leq \Phi(G/W)$. Значит, p делит $|M(G/F)|$, где $M(G/F)$ — мультипликатор Шура для G/F. Поскольку $p > 2$, то $p = 3$, $\pi(|M(G/F)|) \subseteq 2, 3$ и 5 делит $|G/F|$ (см. [16], гл. 4). Кроме того, видим, что 5 — не наибольший простой делитель $|G/F|$ или порядок силовской 5-подгруппы G/F является непростым. Следовательно, $5 < r$ и 5 делит $|F|$.

Пусть G_3 — силовская 3-подгруппа группы G и L — силовская 5-подгруппа из F. Так как $V = G_3L$ разрешима, то $V \neq G$ и поэтому V сверхразрешима. Следовательно, для любого главного фактора H/K из V ниже L получаем, что $|V/C_V(H/K)|$ делит 4. Поэтому $C_V(H/K) = V$ и $L \leq Z_\infty(V)$. Значит, V нильпотентна. Таким образом, $L \leq Z(G)$ и 5 делит $|M(G/F)|$. Это противоречие означает, что G разрешима.

Пусть теперь p — любое нечетное простое число. Покажем, что G является p-сверхразрешимой. Предположим, что это не так. Тогда p делит $|G|$ и G — разрешимая минимальная не p-сверхразрешимая группа. Известно, что класс всех p-сверхразрешимых групп $\mathcal{F}$ является насыщенной формацией (см. [6, с. 35], гл. 1). Значит, по лемме 2.5(a) $G^{\mathcal{F}}$ является p-группой. Поэтому, согласно теореме 1.1, $G^{\mathcal{F}} \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$ и G является p-сверхразрешимой группой по лемме 2.11. Это противоречие завершает доказательство того, что E — $2'$-сверхразрешимая группа.

Из этого следует, что $E/O_2(E)$ сверхразрешима по лемме 2.10. Допустим, что $O_2(E) \neq 1$. Но по выбору (G, E) теорема верна для $(G/O_2(E), E/O_2(E))$. Таким образом, каждый главный фактор $(H/O_2(E))/(K/O_2(E))$ группы $G/O_2(E)$ между $E/O_2(E)$ и 1 является циклическим. В силу G-изоморфизма $(H/O_2(E))/(K/O_2(E)) \simeq H/K$ любой главный фактор группы G между E и $O_2(E)$ является циклическим, что противоречит выбору группы G. Значит, $O_2(E) = 1$. Снова применяя лемму 2.10, убеждаемся, что E сверхразрешима. Рассмотрим

E_q — силовскую q-подгруппу группы E, где q — наибольший простой делитель $|E|$. Поскольку E_q характеристична в E, а E является нормальной подгруппой в G, E_q нормальна в G. Допустим теперь, что $E_q < E$. Тогда по лемме 2.4(1), (2) условие выполняется для (G, E_q) и $(G/E_q, E/E_q)$, что влечет $E \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. Полученное противоречие показывает, что $E_q = E$. Значит, в силу теоремы 1.1 каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

***Доказательство теоремы* 1.3.** Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого $|G||E|$ минимально. Пусть p — наименьший простой делитель $|E|$, P — силовская p-подгруппа группы E. Заметим, что условие теоремы выполняется для (E, E) по лемме 2.4(1). Значит, E является p-нильпотентной группой по теореме 1.1. Заметим также, что если X — неединичная нормальная холлова подгруппа из E, то $X = E$. Действительно, согласно лемме 2.4(4), условие теоремы выполняется для $(G/X, E/X)$ и (G, X). Если $X \neq E$, то минимальный выбор (G, E) влечет $E/X \leq Z_{\mathcal{U}}(G/X)$ и $X \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. Значит, $E \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. Полученное противоречие показывает, что $E = P$. Следовательно, каждый главный фактор группы G ниже $E = P$ является циклическим по теореме 1.1.

Теорема доказана.

4. Приложения теорем 1.1 – 1.3. Многие результаты теории формаций связаны с изучением условий, при которых та или иная группа принадлежит насыщенной формации. В этом направлении было найдено большое количество критериев разрешимости, сверхразрешимости, p-нильпотентности, нильпотентности и т. д., а также общих критериев принадлежности группы насыщенной формации. Тем не менее в этом направлении почти нет результатов, связанных с композиционными формациями. Одним из первых приложений теоремы 1.3 является следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — композиционная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальные подгруппы $X \leq E$ такие, что $G/E \in \mathcal{F}$. Предположим, что все циклические подгруппы из X простого порядка или порядка 4 являются m-добавляемыми в G. Если $X = E$ или $X = F^*(E)$, то $G \in \mathcal{F}$.*

Еще одним ключевым фактом, лежащим в основе доказательства теоремы 4.1, является следующее предложение.

Предложение 4.1 ([18], предложение C)**.** *Пусть E — нормальная подгруппа группы G. Если каждый главный фактор группы G ниже $F^*(E)$ является циклическим, то каждый главный фактор группы G ниже E также является циклическим.*

В этом предложении $F^*(E)$ обозначает обобщенную подгруппу Фиттинга группы E, т. е. произведение всех нормальных квазинильпотентных подгрупп группы E.

***Доказательство теоремы* 4.1.** Прежде всего предположим, что $X = F^*(E)$. Тогда по теореме 1.3 каждый главный фактор группы G ниже $F^*(E)$ является циклическим. Значит, согласно предложению 4.1, каждый главный фактор ниже E является циклическим. Теперь применяя лемму 2.10, заключаем, что $G \in \mathcal{F}$.

Теорема доказана.

В литературе можно встретить следующие частные случаи теоремы 4.1.

***Следствие* 4.1** [19]. *Пусть G — группа нечетного порядка. Если все подгруппы из G простого порядка являются нормальными в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 4.2** ([14], теорема 5.7). *Если каждая минимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то коммутатор G' группы G является 2-замкнутым.*

***Следствие* 4.3** [20]. *Предположим, что группа G разрешима и содержит такую нормальную подгруппу H, что G/H сверхразрешима. Если все минимальные подгруппы из $F(H)$ являются дополняемыми в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 4.4** [21]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathcal{U}$, и G — группа с абелевыми силовскими 2-подгруппами. Если H — нормальная подгруппа из G такая, что $G/H \in \mathcal{F}$ и каждая минимальная подгруппа из H является перестановочной в G, то $G \in \mathcal{F}$.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-нормальной [22] в G, если существует такая нормальная подгруппа T из G, что $TH = G$ и $H \cap K \subseteq H_G$.

***Следствие* 4.5** [22]. *Если все подгруппы группы G простого порядка или порядка 4 являются c-нормальными в G, то G сверхразрешима.*

***Следствие* 4.6** [23]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathcal{U}$. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 группы $G^{\mathcal{F}}$ являются c-нормальными в G, то $G \in \mathcal{F}$.*

***Следствие* 4.7** [24]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если циклические подгруппы из $F^*(E)$ простого порядка или порядка 4 являются c-нормальными, то $G \in \mathcal{F}$.*

***Следствие* 4.8** [25]. *Пусть p — простое число и H — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathcal{U}_p$. Если подгруппы из H порядка p или порядка 4 если $p = 2$, являются c-нормальными в G, то $G \in \mathcal{U}_p$.*

***Следствие* 4.9** [26]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая $\mathcal{U}$, и G — группа с разрешимой нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если все минимальные подгруппы и все циклические подгруппы порядка 4 из $F(E)$ являются c-нормальными в G, то $G \in \mathcal{F}$.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется c-добавляемой [27] в G, если существует такая подгруппа K из G, что $G = HK$ и $H \cap K \subseteq H_G$.

***Следствие* 4.10** [27, 28]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если циклические подгруппы из E простого порядка или порядка 4 являются c-добавляемыми в G, то $G \in \mathcal{F}$.*

***Следствие* 4.11** [29, 30]. *Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и G — группа, содержащая нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если циклические подгруппы из $F^*(E)$ простого порядка или порядка 4 являются c-добавляемыми в G, то $G \in \mathcal{F}$.*

В заключение приведем пример, показывающий, что в общем случае класс всех m-добавляемых подгрупп группы является более широким, чем класс всех ее c-добавляемых подгрупп и класс всех ее модулярных подгрупп.

***Пример* 4.1.** В работе [31] показано, что существует группа E порядка 2^{17} с такой циклической квазинормальной подгруппой X порядка 2^7, что $[X, E]' =$

$= X^{64} = \Omega(X)$. Пусть M — максимальная в X подгруппа. Понятно, что подгруппа M не является нормальной в E. Пусть $2 < q < t < p < r$ — простые числа, где $t|(r-1)$ и $q|(p-1)$ (например, $q = 3$, $t = 5$, $p = 7$ и $r = 11$).

Пусть $A = (P \rtimes Q) \times P_1$, где $P \rtimes Q$ — неабелева группа порядка pq, $|Q| = q$ и $|P| = |P_1| = p$. Легко показать, что подгруппа Q не является модулярной в A (см. упражнение 3 на с. 216 в книге [1]). Пусть $B = R \rtimes T$ — неабелева группа порядка rt, где $|R| = r$ и $|T| = t$. Пусть $G = A \times B \times E$ и $H = QTM$. Покажем, что $H_{mG} = TM$. По лемме 2.12 M — квазинормальная в E подгруппа. Следовательно, M модулярна в G по лемме 2.1(h). Понятно также, что T модулярна в G. Следовательно, $MT \subseteq H_{mG}$ по лемме 2.1(h). Предположим, что $H_{mG} = H$. Тогда $H \cap A = Q$ модулярна в A по лемме 2.1(g), что противоречит изложенному выше о подгруппе Q. Значит, $H_{mG} \neq H$, и поэтому H не является модулярной подгруппой в G. Поэтому $H_{mG} = MT$. Легко также видеть, что $H_G = 1$.

Предположим, что подгруппа H имеет в G дополнение Y. По лемме 2.13 найдется такая силовская 2-подгруппа Y_2 в Y, что $E = MY_2$. Тогда $X = M(X \cap Y_2)$, что противоречит цикличности подгруппы X. Значит, H не имеет дополнения в G, и поэтому H не является c-добавляемой в G. Пусть теперь $V = PP_1RE$. Тогда $G = VH$ и $V \cap H \leq M \leq H_{mG}$. Таким образом, подгруппа H является m-добавляемой в G.

1. *Schmidt R.* Subgroup Lattices of Groups. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. *Schmidt R.* Modulare Untergruppen endlicher Gruppen // J. Ill. Math. – 1969. – **13**. – P. 358 – 377.
3. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. – 1939. – **5**. – P. 431 – 460.
4. *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups in infinite groups // Math. Z. – 1972. – **125**. – S. 1 – 16.
5. *Maier R., Schmid P.* The embedding of permutable subgroups in finite groups // Math. Z. — 1973. – **131**. – S. 269 – 272.
6. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. – Dordrecht etc: Springer, 2006. – 385 p.
9. *Skiba A. N., Shemetkov L. A.* Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groupsv // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 783 – 797.
10. *Gagen T. M.* Topics in finite groups. – Cambridge Univ. Press, 1976. – 85 p.
11. *Skiba A. N.* On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups // J. Group Theory. – 2010. – **13**, № 6. – P. 841 – 850.
12. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 208 с.
13. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – **68**, № 3 – 4. – P. 433 – 449.
14. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. — Berlin etc: Springer, 1967. — 793 S.
15. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, № 3. – P. 383 – 437.
16. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. – М.: Мир, 1985. – 350 с.
17. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
18. *Skiba A. N.* A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups // J. Pure and Appl. Algebra. – 2010. (available at:doi:10.1016/j.jpaa.2010.04.017).
19. *Buckley J.* Finite groups whose minimal subgroups are normal // Math. Z. – 1970. – **15**. – S. 15 – 17.
20. *Li D., Guo X.* On Complemented subgroups of finite groups // Chinese Ann. Math. Ser. B. – 2001. – **22**. – P. 249 – 254.
21. *Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.* On minimal subgroups of finite groups // Acta math. hungar. – 1996. – **73**, № 4. – P. 335 – 342.
22. *Wang Y.* c-Normality of groups and its properties // J. Algebra. – 1996. – **180**. – P. 954 – 965.
23. *Ballester-Bolinches A., Wang Y.* Finite groups with some C-normal minimal subgroups // J. Pure and Appl. Algebra. – 2000. – **153**. – P. 121 – 127.
24. *Wei H., Wang Y., Li Y.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups, II // Communs Algebra. – 2003. – **31**. – P. 4807 – 4816.

25. *Ramadan M., Ezzat Mohamed M., Heliel A. A.* On c-normality of certain subgroups of prime power order of finite groups // Arch. Math. – 2005. – **85**. – P. 203 – 210.
26. *Wei H.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Communs Algebra. – 2001. – **29**. – P. 2193 – 2200.
27. *Ballester-Bolinches A., Wang Y., Guo X. Y.* c-Supplemented subgroups of finite groups // Glasgow Math. J. – 2000. – **42**. – P. 383 – 389.
28. *Wang Y., Li Y., Wang J.* Finite groups with c-supplemented minimal subgroups // Algebra Colloq. – 2003. – **10**, № 3. – P. 413 – 425.
29. *Wang Y., Wei H., Li Y.* A generalization of Kramer's theorem and its applications // Bull. Austral. Math. Soc. – 2002. – **65**. – P. 467 – 475.
30. *Wei H., Wang Y., Li Y.* On c-supplemented maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – **132**, № 8. – P. 2197 – 2204.
31. *Stonehewer S. E.* Old, recent and new results on quasinormal subgroups // Irish Math. Soc. Bull. – 2005. – **56**. – P. 125 – 133.

Получено 03.03.11