УДК 517.9

А. Л. Гречко (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ПРО ДЕЯКІ ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ МОНОТОННИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

We study monotone linear extensions of dynamical systems. The problem of existence of invariant manifolds and exponential separation is investigated for linear extensions on vector bundles that preserve the order structure. We also study the relationship between the monotonicity of linear extensions and the existence of bounded solutions of inhomogeneous linear extensions (weak regularity, quasiregularity).

Рассматривается монотонное линейное расширение динамической системы. Исследуются вопрос существования инвариантных многообразий, экспоненциальной разделенности для линейных расширений, которые сохраняют структуру порядка, а также связь между монотонностью линейных расширений и вопросами существования ограниченных решений неоднородных линейных расширений (слабая регулярность, квазирегулярность).

Багато біологічних і хімічних моделей природознавства — кількість популяції, концентрації хімічних речовин та інші — є додатними, більш того, вони часто зберігають додатність розв'язків еволюційних процесів та додатково характеризуються властивістю зберігати структуру порядку. Піонерські роботи М. Мюлера (1926) та Е. Камке (1932) [1] є фундаментом теорії монотонних диференціальних рівнянь. Нехай X — упорядкований метричний простір із заданою структурою порядку $\leqslant$, тобто виконуються такі умови:

1) рефлексивність: $x \leqslant x \quad \forall x \in X$,

2) транзитивність: $x \leqslant y$ та $y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z$,

3) антисиметрія: $x \leqslant y$ та $y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y$.

Нехай $\varphi^t(x)$ — гладкий (гладко залежить від (t,x)) потік на відкритій опуклій підмножині $D \subset \mathbb{R}^n$ та

$$f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^t(x), \quad x \in D,$$

— гладке векторне поле на D. Диференціальним рівнянням, що відповідає векторному полю f, є рівняння

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

Умову Камке неважко послабити до наступної, яка називається властивістю кооперативності динамічної системи:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \geqslant 0, \quad i \neq j, \quad x \in D. \tag{2}$$

Співвідношення (2) у зворотному напрямку (тобто для потоку $\varphi^{-t}(x)$) називається конкурентною динамічною системою. Таким чином, кооперативна система генерує монотонну динамічну систему в додатному напрямку часу. В 50-х роках Г. Біркгоф в серії робіт отримав важливі результати з монотонних операторів та монотонних диференціальних рівнянь [2]. Важливою особливістю підходу Г. Біркгофа є використання гільбертової псевдометрики, що в подальші роки стало загальновживаним методом. В 60-х роках ґрунтовний аналіз монотонних диференціальних рівнянь та операторів у банаховому просторі провів М. Красносельський [3]. Значний прогрес у теорії монотонних диференціальних рівнянь пов'язаний з серією результатів, які в 80-х роках отримав М. Хірш [4, 1]. Прогрес в теорії лінійних розширень, пов'язаний з работами А. М. Самойленка [5, 6], та нескінченновимірних лінійних розширень [9] надав поштовх для розвитку монотонних еволюційних систем та монотонних рівнянь з частинними похідними. Це роботи Д. Рюеля, П. Полачіка, І. Терещака, А. Ю. Оболенського, В. Шень та інших (див. [1, 7, 8]).

1. Основні означення. Нехай B — компактний, зв'язний метричний простір, $\varphi^t(b)$ — потік на B, X — дійсний скінченновимірний нормований простір зі скалярним добутком $\langle x, x\rangle = |x|^2$, (E, p, B) — векторне розшарування з тотальним простором E, базою B та відповідним шаром розшарування $E_b^s = p^{-1}(b)$ — n-вимірним векторним простором.

Означення 1. *Лінійним розширенням π^t на тривіальному векторному розшаруванні* (*див.* [7, 9]) (E, p, B) *з тотальним простором $E = B \times X$ називається потік*

$$\pi^t(b, x) = (\varphi^t(b), \Phi(t, b)x), \tag{3}$$

де $\Phi(t, b)$, $t \in \mathbb{R}$, — коцикл.

Означення 2. *Інваріантним перерізом* (*многовидом*) *лінійного розширення π^t називається таке відображення $u(b)\colon B \to X$, що справджується рівність*

$$u(\varphi^t(b)) = \Phi(t, \varphi^t(b))u(b).$$

Наведемо понятійний апарат теорії монотонних динамічних систем [1] та монотонних диференціальних рівнянь [3].

Означення 3. *Замкнена опукла множина $K \subset X$ називається конусом, якщо з $x, y \in K$ випливає, що $x + y$, $\alpha x \in K$ та $K \cap (-K) = \{0\}$, де $-K = \{-x/x \in K\}$.*

K^0 — непорожня внутрішня частина конуса K. Порядок в X задамо таким чином:

1) $x \leqslant y$, якщо $y - x \in K$,

2) $x < y$, якщо $y - x \in K$, $y \neq x$,

3) $x << y$, якщо $y - x \in K^0$.

Наприклад, множина K^+ векторів $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \geqslant 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$, — конус в $\mathbb{R}^n$. Конус K^+ задає природну впорядкованість в $\mathbb{R}^n$: $x \leqslant y$ рівносильно $x_i \leqslant y_i$ $\forall i$. Тому вважаємо, що в X задано структуру впорядкованості, яка задається опуклим конусом K з непорожньою внутрішністю. Для довільних $x, y \in K$ множину $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \{z \in K/x \leqslant z \leqslant y\}$ будемо називати конусним відрізком. Також будемо позначати через $\Delta(M)$ діаметр множини M [2].

Означення 4. *Лінійне розширення π^t називається строго монотонним в додатному напрямку, якщо для довільних x_1, $x_2 \in X$ з нерівності $x_1 \leqslant x_2$, $x_1 \neq x_2$, випливає нерівність $\pi^t(b, x_1) < \pi^t(b, x_2)$ $\forall t > 0$.*

***Зауваження* 1.** Монотонні динамічні системи в додатному напрямку називають [1] кооперативними динамічними системами, а в зворотному — конкурентними, тобто при заміні часу $t \to -t$ конкурентні системи стають кооперативними, і навпаки.

Без обмеження загальності в подальшому будемо розглядати тільки строго монотонні лінійні розширення у від'ємному напрямку (конкурентний випадок). Для подальшого нам знадобиться наступний факт.

Лема 1 (М. Хірш). *Нехай π^t — строго монотонне лінійне розширення, тоді*:

1) $\Phi(-t, b)x << \Phi(-t, b)y$ *для* $x < y$, $x, y \in K$, $t > 0$,

2) $\Phi(-t,b)u \geqslant 0 \ \ \forall u \geqslant 0,\, t > 0,$

3) $\Phi(-t,b) >> 0 \ \ \forall b \in B, t > 0.$

Доведення див. у [4] та [1] (§ 4).

Означення 5. *Для довільних* $x, y \in K^0$ *відстань*

$$\theta(x,y) = \ln \frac{\inf\{\beta \geqslant 0 \colon \alpha x \leqslant y \leqslant \beta x\}}{\sup\{\alpha \geqslant 0 \colon \alpha x \leqslant y \leqslant \beta x\}} \tag{4}$$

називається гільбертовою метрикою [2, 3].

Зауважимо, що рівність $\theta(x,y) = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли x та y належать одному променю, який виходить із початку координат.

Зауваження 2. Доцільно навести означення гільбертової метрики у наступному варіанті, яке теж будемо використовувати в подальшому. Для векторів із додатними координатами $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ гільбертовою метрикою є

$$\theta(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \ln \frac{\max\limits_i \dfrac{x_i}{y_i}}{\min\limits_i \dfrac{x_i}{y_i}} = \max_{i,j} \ln \left(\frac{x_i y_j}{x_j y_i} \right).$$

З рівності $\theta(x,y) = 0$ випливає, що $x = \lambda y$, тому в багатьох роботах ця проективна відстань має назву „гільбертова псевдометрика”.

Найбільш фундаментальними фактами, пов’язаними з гільбертовою метрикою та монотонними операторами, є наступні три теореми Г. Біркгофа [2].

1. Нехай P — додатний лінійний оператор на банаховому просторі X, K — конус в X; тоді з того, що $\theta(u,v) < \infty$, $u, v \in K$, випливає $\theta(Pu, Pv) \leqslant \theta(u,v)$.

2. За умови першого пункту та скінченності проективного діаметра образу конуса $\Delta(P(K)) < \infty$ маємо $\sup \dfrac{\theta(Pu, Pv)}{\theta(u,v)} = \tanh \dfrac{\Delta(\cdot)}{4} < 1$.

3. За умови скінченності проективного діаметра образу конуса $\Delta(P(K)) < \infty$ маємо, що для будь-якого $u \in K$ послідовність ітерацій $P^k(u)$ є послідовністю Коші в гільбертовій метриці.

Одним із найбільш важливих та вживаних понять якісної теорії диференціальних рівнянь є експоненціальна роздільність лінійних диференціальних рівнянь [7, 8, 10, 11]

Означення 6. *Лінійне розширення* (3) *є експоненціально розділеним, якщо* $E = B \times X = X_1 \oplus X_2$ *і для будь-якого* $b \in B$ *існують* d, $\alpha > 0$ *такі, що справджується нерівність*

$$\frac{\|\Phi(t,b)x_1\|}{\|\Phi(t,b)x_2\|} \leqslant d e^{-\alpha t} \frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}, \quad x_i \in X_i(b), \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В роботах [11, 12] розглянуто проективне лінійне розширення, яке асоційоване з заданим лінійним розширенням π^t.

Означення 7. *Проективним розширенням* $\mathcal{P}\pi^t$, *асоційованим з лінійним розширенням* (1), *назвемо*

$$\mathcal{P}\pi^t(b,x) = \left(\varphi^t(b)\,, \frac{\Phi(t,b)x}{\|\Phi(t,b)x\|} \right).$$

2. Основна теорема. Головною метою цієї статті є доведення наступного результату.

Теорема 1. *Нехай* π^t — *строго монотонне лінійне розширення на розшаруванні* $(B \times X, p, B)$, *тоді*:

1) *існує інваріантна декомпозиція* $B \times X = \bigcup_{b \in B} \{b\} \times (X_1(b) \oplus X_2(b))$ $\forall b \in B$, *до того ж* $\dim X_1 = 1$;

2) $X_1(b) = \operatorname{span}\{u(b)\}$, $\|u(b)\| = 1$, *де* $u(b)$ — *інваріантний переріз* (*многовид*) *проективного розширення* $\mathcal{P}\pi^t$;

3) *лінійне розширення* π^t *є експоненціально розділеним.*

Доведення розіб'ємо на ряд етапів.

1. За довільною функцією-перерізом $u(b)\colon B \to K \cap S^1$ (де S^1 — одинична куля в X) розглянемо неперервне відображення

$$P^k(b,x) = P^k u(b) := \frac{\Phi(-k, \varphi^k(b)) u(\varphi^k(b))}{\|\Phi(-k, \varphi^k(b)) u(\varphi^k(b))\|}, \quad k \geqslant 1, \quad b \in B. \tag{6}$$

Завдяки лемі Хірша маємо строгу монотонність відображення P^1, яке і будемо розглядати. $\theta(x,y)$ означає гільбертову метрику.

Розглянемо довільні початкові значення $x_i(b) \in K^0$ лінійного розширення π^t з відповідними конусними відрізками:

$$x_1(b) \in \langle\langle x_{11}, x_{12} \rangle\rangle, \quad x_2(b) \in \langle\langle x_{21}, x_{22} \rangle\rangle.$$

Ці початкові значення порівнювані в проективній метриці, якщо

$$\lambda_1 P^1(b, x_{11}) < P^1(b, x_{21}) < \mu_1 P^1(b, x_{11}),$$

$$\lambda_2 P^1(b, x_{12}) < P^1(b, x_{22}) < \mu_2 P^1(b, x_{12}).$$

Маємо

$$\beta_1(P^1(b, x_{11}), P^1(b, x_{21})) = \inf \mu_1, \quad \alpha_1(P^1(b, x_{11}), P^1(b, x_{21})) = \sup \lambda_1,$$

$$\beta_2(P^1(b, x_{12}), P^1(b, x_{22})) = \inf \mu_2, \quad \alpha_2(P^1(b, x_{12}), P^1(b, x_{22})) = \sup \lambda_2.$$

Враховуючи монотонність P^1 та першу теорему Біркгофа, можна стверджувати, що проективна відстань між образами x_{11} та x_{21}, x_{12} та x_{22} скінченна та дорівнює

$$\theta(P^1(b, x_{1i}), P^1(b, x_{2i})) = \ln \frac{\beta_i(P^1(b, x_{1i}), P^1(b, x_{2i}))}{\alpha_i(P^1(b, x_{1i}), P^1(b, x_{2i}))} = c_1 < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

2. Розглянемо в конусі K^0 кулю радіуса R з центром у точці $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0)$. Належність деякої точки y кулі еквівалентна виконанню нерівності

$$\ln \frac{\max\limits_i \dfrac{y_i}{x_i^0}}{\min\limits_i \dfrac{y_i}{x_i^0}} \leq R, \quad i = \overline{1, n+1}, \tag{8}$$

звідки отримуємо

$$\max_i \frac{y_i}{x_i^0} \leqslant e^R \min_i \frac{y_i}{x_i^0}. \tag{9}$$

Таким чином, належність точки y кулі еквівалентна належності y множині вигляду

$$y \in \alpha\big\langle x^0, e^R x^0\big\rangle, \quad \alpha > 0. \tag{10}$$

Оскільки множина точок y_i, для яких $\min_i \dfrac{y_i}{x_i^0} = 1$, належить межі конуса

$$K_1 = \{x \in X^{n+1} \colon x \geqslant x^0\}, \tag{11}$$

то множина точок y_i, яка задовольняє нерівність $\max_i \dfrac{y_i}{x_i^0} \leqslant e^R$, належить конусу

$$K_2 = \{x \in X^{n+1} \colon x \leqslant e^R x^0\}. \tag{12}$$

Внаслідок однорідності нерівності (9) маємо $K_1 \cap K_2 = \langle x^0,\, e^R x^0\rangle\alpha$.

Позначивши $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, введемо до розгляду радіуси

$$e^{R_1} = \max\left(\frac{\overrightarrow{x_{22}}}{\overrightarrow{x_1}}, 1\right), \quad e^{-R_2} = \min\left(\frac{\overrightarrow{x_{21}}}{\overrightarrow{x_1}}, 1\right). \tag{13}$$

Враховуючи (8) – (10), переконуємося, що точка $\overrightarrow{x_2}$ належить кулі радіуса $R_1 + R_2$ з центром у точці x_1.

Аналогічно вводимо R_1' та R_2':

$$e^{R_1'} = \max\left(\frac{\overrightarrow{x_{22}}}{\overrightarrow{x_{11}}}, 1\right), \quad e^{-R_2'} = \min\left(\frac{\overrightarrow{x_{21}}}{\overrightarrow{x_{12}}}, 1\right). \tag{14}$$

Зі співвідношень (13), (14) випливає, що $R_i' \geqslant R_i$, $i = 1, 2$, тобто $\theta(x_1, x_2) < R_1' + R_2'$. Застосовуючи першу теорему Біркгофа, маємо

$$\theta(P^1(b,u), P^1(b,v)) \leqslant \theta(u,v) < R_1' + R_2'$$

$$\forall u \in \langle\langle x_{11}, x_{12}\rangle\rangle, \quad v \in \langle\langle x_{21}, x_{22}\rangle\rangle.$$

Звідси випливають нерівність $\Delta P^1(b,K)) < \theta(u,v)$ та скінченність проективного діаметра образу $P^1(b,K)$. Тому, застосовуючи третю теорему Біркгофа, переконуємося, що відображення P^1 є стиском у проективній метриці

$$\theta(P^1(b,u), P^1(b,v)) \leqslant \gamma\theta(u,v), \quad \gamma \in (0,1), \quad \forall u, v \in K.$$

Розглядаючи далі неперервну послідовність відображень $P^1 \to P^2 \to \ldots \to P^k$, отримуємо

$$\theta(P^k(b,u), P^k(b,v)) \leqslant \gamma\theta(u,v), \quad \gamma \in (0,1), \quad \forall u, v \in K, \tag{15}$$

тобто при деякому фіксованому перерізі $\widetilde{u} \colon B \to K \cap S^1$ послідовність відображень $P^k\widetilde{u}$ рівномірно збігається до $u = P^1 u$, що остаточно відповідає існуванню інваріантного перерізу $u(b) \colon B \to K \cap S^1$ вигляду (6) та існуванню відповідного йому інваріантного підрозшарування X_1, яке є лінійною оболонкою інваріантного многовиду $u(b)$ в дискретному випадку часу. В п'ятій частині доведення ми отримаємо інваріантність підрозшарування X_1 у випадку неперервного часу.

3. Аналогічними міркуваннями доводиться існування спряженого інваріантного перерізу $u^*(b) \colon B \to K \cap S^1$ відповідного спряженого проективного розширення

$(\mathcal{P}\pi^t)^*$ [11]. Метою наступних двох пунктів є доведення експоненціальної роздільності лінійного розширення π^t. Зауважимо, що згідно з теоремою 6.10 з [11] існує інваріантне підрозшарування X_2.

Далі розглядаємо $v \neq 0$ та площину

$$E_b = \{v \in X / \langle v, u^*(\varphi^k(b))\rangle = 0\}.$$

Введемо також до розгляду компактний окіл початку координат в E_b:

$$W_b = \left\{ v \in E_b / \frac{v + u(\varphi^k(b))}{\|v + u(\varphi^k(b))\|} \in K \cap S^1 \right\}.$$

Зрозуміло, що існує вектор $\overrightarrow{c_1} = (c_1, \ldots, c_1)^T$ такий, що $v + u(\varphi^k(b)) \leqslant \overrightarrow{c_1}$ та

$$\theta(v + u(\varphi^k(b)), u(\varphi^k(b))) \leqslant c \quad \forall v \in W_b. \tag{16}$$

Враховуючи (15), отримуємо

$$\theta(\Phi(-k, \varphi^k(b))(v + u(\varphi^k(b))), u(\varphi^k(b))) =$$

$$= \theta(\Phi(-k, \varphi^k(b))(v + u(\varphi^k(b))), \Phi(-k, \varphi^k(b))u(\varphi^k(b))) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\theta(v + u(\varphi^k(b)), u(\varphi^k(b))) \leqslant \gamma C, \tag{17}$$

де $\gamma \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, $c = \sup\{\theta(u,v), u, v \in S^1\}$. Зважаючи на те, що $\|u(\cdot)\| = 1$, одержуємо рівності

$$\Phi(-k, \varphi^k(b))(v + u(\varphi^k(b))) = \frac{u(\varphi^k(b))}{u(\varphi^k(b))}(v + u(\varphi^k(b))) =$$

$$= \frac{u(\varphi^k(b))v}{u(\varphi^k(b))\|u(\varphi^k(b))\|} + u(\varphi^k(b)) = \frac{\Phi(-k, \varphi^k(b))v}{\|\Phi(-k, \varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|} + u(\varphi^k(b)). \tag{18}$$

Зауважимо, що за побудовою

$$\frac{\Phi(-k, \varphi^k(b))v}{\|\Phi(-k, \varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|} \in W_{u(\varphi^k(b))}. \tag{19}$$

Зважаючи на (18), (19) та (16), маємо

$$\theta\left(\frac{\Phi(-k, \varphi^k(b))v}{\|\Phi(-k, \varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|} + u(\varphi^k(b)), u(\varphi^k(b))\right) \leqslant \gamma C, \tag{20}$$

де $\gamma \in (0,1)$, $C > 0$.

4. Введемо наступні позначення:

$$q := \frac{\Phi(-k, \varphi^k(b))v}{\|\Phi(-k, \varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|}, \quad w := u(\varphi^k(b)), \quad w >> 0, \quad q + w >> 0,$$

$\max w = \max_i(w_i)$, $\min w = \min_i(w_i)$, $|q| = (|q_1|, \ldots, |q_n|)$. Припустимо, що $q_i \geqslant 0$. Тоді

$$\frac{q_i w_j}{\max^2 w} \leqslant \frac{q_i w_j - w_i q_j}{w_i w_j} = \frac{q_i + w_i}{w_i} - \frac{q_j + w_j}{w_j} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(\frac{q+w}{w}\right) - \min\left(\frac{q+w}{w}\right). \tag{21}$$

Випадок $q_i \leqslant 0$ є аналогічним. З іншого боку,

$$\ln\left(\max\frac{q+w}{w}\right) - \ln\left(\min\frac{q+w}{w}\right) \geqslant 1 - \frac{\min\left(\dfrac{q+w}{w}\right)}{\max\left(\dfrac{q+w}{w}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\max\left(\dfrac{q+w}{w}\right) - \min\left(\dfrac{q+w}{w}\right)}{\max(q+w)} \min(w). \tag{22}$$

Враховуючи (21), (22) та означення гільбертової метрики у варіанті Сенета, маємо

$$\frac{q_i w_j}{\max^2 w} \leqslant \frac{\max(q+w)}{\min w} \ln\left(\frac{\max\dfrac{q+w}{w}}{\min\dfrac{q+w}{w}}\right).$$

Остаточно отримуємо

$$\theta(q+w, w) \geqslant \frac{\max|q| \min^2 w}{\max(q+w)\max^2 w}. \tag{23}$$

Поєднуючи (20), (23), одержуємо оцінки

$$\frac{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))v\|\varepsilon^2}{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\| m C_1} \leqslant$$

$$\leqslant \theta\left(\frac{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))v\|}{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|} + u(\varphi^k(b)), u(\varphi^k(b))\right) \leqslant \gamma C.$$

Звідси знаходимо

$$\frac{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))v\|}{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|} \leqslant \gamma C \frac{mC_1}{\varepsilon^2}, \quad \gamma \in (0,1). \tag{24}$$

Зважаючи на те, що (24) виконується для довільного $v \in W_b$, де W_b — окіл початку координат в E_b, отримуємо

$$\frac{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))\big|_{E_b}\|}{\|\Phi(-k,\varphi^k(b))u(\varphi^k(b))\|} \leqslant \gamma^k C^k \quad , \quad \gamma \in (0,1), \quad C > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, остаточно маємо дискретний варіант експоненціальної роздільності: $X = X_1 \oplus X_2$, $\dim X_1 = 1$, $X_1 = \operatorname{span}\{u(b)\}$, $w \in X_2$ так, що справджується оцінка

$$\frac{\|\Phi(n,\varphi^{-n}(b)))u(\varphi^{-n}(b))\|}{\|\Phi(n,\varphi^{-n}(b))w\|} \leqslant K_3 e^n, \quad n \in \mathbb{Z}^-. \tag{25}$$

5. Залишилось довести неперервність за часом оцінки (25). Нехай $t = n - \tau < 0$, $n \in \mathbb{Z}^-$, $\tau \in [0,1)$. Тоді

$$\|\Phi(t,b)x_1\| = \|\Phi(n+(-\tau),b)x_1\| =$$

$$= \|\Phi(-\tau,\varphi^{-\tau}(b))\Phi(n,b)x_1\| \leqslant \|\Phi_{-\tau}\|\|\Phi(n,b)x_1\|. \tag{26}$$

Аналогічно

$$\|\Phi(t,b)x_2\| = \|\Phi(t+\tau),b)x_2\| \leqslant \|\Phi_\tau\|\|\Phi(t,b)x_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\Phi(t,b)x_2\| \geqslant \frac{\|\Phi(n,b)x_2\|}{\|\Phi_\tau\|} \tag{27}$$

Враховуючи (25) – (27), одержуємо

$$\frac{\|\Phi(t,b)x_1\|}{\|\Phi(t,b)x_2\|} \leqslant \|\Phi_{-\tau}\|\|\Phi_\tau\|\frac{\|\Phi(n,b)x_1\|}{\|\Phi(n,b)x_2\|} \leqslant$$

$$\leqslant \|\Phi_{-\tau}\|\|\Phi_\tau\|\frac{\|x_1\|}{\|x_2\|}K_3e^n, \quad K_3>0, \quad n\in\mathbb{Z}^-.$$

Для випадку $t>0$ доведення аналогічне.

Зауважимо, що π^t-інваріантність підрозшарування X_1 при всіх $t\in\mathbb{R}$ випливає з теореми 4.4 роботи [8].

Теорему 1 доведено.

Твердження 1. *Якщо лінійне розширення* (3) *є регулярним* [5, 11, 13], *то* (3) *є експоненціально розділеним.*

Доведення. Зрозуміло, що за умов твердження лінійне розширення (3) є експоненціально дихотомічним, тобто існують $\alpha, K>0$ і проектор P такі, що для довільних $x_1\in X_1(b)$, $x_2\in X_2(b)$ виконуються нерівності

$$\|\Phi(t,b)x_1\| \leqslant \|\Phi(t,b)P(b)\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|x_1\|,$$

$$\|\Phi(t,b)x_2\| \geqslant \frac{1}{\|(I-P(b))\Phi^{-1}(t,b)\|} \geqslant \frac{e^{\alpha t}}{K}\|x_2\|,$$

звідки випливає експоненціальна роздільність з відповідними підрозшаруваннями $X_1(b), X_2(b)$ лінійного розширення π^t.

***Зауваження* 3.** Згідно з Б. Биловим [10], дійсні функції $p_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, назвемо розділеними, якщо $p_{i+1}-p_i\geqslant a>0$. Звідси випливає інтегральна роздільність, тобто існує $D>0$ таке, що

$$\int\limits_s^t p_{i+1}(m)-p_i(m)dm > -\varepsilon(t-s)-D \quad \forall t\geqslant s.$$

Якщо всі функції $a_i(t)$ інтегрально розділені, то система $\dot{x}=\operatorname{diag}(a_1(t),\ldots,a_n(t))x$ експоненціально розділена.

Відомо [11], що з експоненціальної роздільності не випливає регулярність (експоненціальна дихотомія). Аналогічна ситуація має місце із взаємозв'язком монотонності лінійних розширень та квазірегулярністю (яка означає, що спряжене лінійне розширення не має нетривіальних обмежених розв'язків, які проходять через шар над точкою b_0) або слабкою регулярністю [11, 13].

***Приклад* 1.** Розглянемо лінійну диференціальну систему

$$\dot{x} = 0,$$
$$\dot{y} = a(t)y,$$

де $a(t) = 1$ для $t \leqslant 1$, $a(t) = 1/t$ для $t \geqslant 1$. Розв'язок даної системи має вигляд

$$x(t) = c,$$

$$y(t) = \begin{cases} y(1)e^t, & t \leqslant 1, \\ y(1)t, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

тому цілком зрозуміла квазірегулярність системи, але не існують $\alpha,\ K_1 > 0$ такі, що

$$\frac{|x(t)||x(1)|}{|y(t)||y(1)|} = \frac{1}{t} \leqslant K_1 e^{-\alpha(t-1)} \quad \forall t \geqslant 1,$$

тобто з квазірегулярності не випливає експоненціальна роздільність.

Аналогічно з слабкої регулярності не випливає експоненціальна роздільність. Дійсно, на прикладі системи, де діагональ не є роздільною, маємо

$$\dot{x} = 0,$$
$$\dot{y} = (-\operatorname{arctg}\, t)y.$$

З'ясуємо, які додаткові умови слід накласти на монотонне лінійне розширення, що є достатніми для його квазірегулярності. Нагадаємо [11, 13], що для лінійного розширення π^t стійким (нестійким) підрозшаруванням є множини

$$X^s = \{x \in E / \, \|\pi^t(x,b)\| \to 0, t \to +\infty\},$$

$$X^u = \{x \in E / \, \|\pi^t(x,b)\| \to 0, t \to -\infty\}.$$

Наступний результат поєднує монотонні лінійні розширення з теорією регулярності лінійних розширень динамічних систем [5, 6].

Теорема 2. *Нехай виконуються наступні умови*:

1) *лінійне розширення* (3) *є строго монотонним*;

2) *для проективного лінійного розширення* $\mathcal{P}\pi^t$ *маємо* $\mathcal{P}X^u \equiv \mathcal{P}X_2$ (*або* $\mathcal{P}X^s \equiv \equiv \mathcal{P}X_1$).

Тоді лінійне розширення (3) *є квазірегулярним.*

Доведення. За теоремою 1 лінійне розширення (3) є експоненціально розділеним відносно інваріантних підрозшарувань $X_1 \oplus X_2$. Це означає можливість застосування теореми 6.18 з [11]. Тоді $\mathcal{P}X_2$ — атрактор $\mathcal{P}\pi^t$, $\mathcal{P}X_1$ — репелер $\mathcal{P}\pi^t$. На підставі другої умови теореми та теореми 8.13 [11] отримуємо квазірегулярність лінійного розширення (3).

Теорему 2 доведено.

1. *Smith H.* Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative system // Math. Surv. Monogr. – Providence: Amer. Math. Soc., 1995. – **11**. – 254 p.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – М.: Мир, 1984. – 560 с.
3. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.

4. *Hirsch M.* Systems of differential equations that are competitive or cooperative I: Limit sets // SIAM. J. Math. Anal. – 1982. – **13**, № 1. – P. 167 – 179.
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 303 с.
6. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219 – 1240.
7. *Polacik P., Terescak I.* Exponential separation and invariant bundles for maps in ordered Banach spaces with applications to parabolic equations // J. Dynam. Different. Equat. – 1993. – **5**, № 2. – P. 279–303. [Erratum. – 1994. – **6**. – P. 245 – 246.]
8. *Shen W., Yi Y.* Almost automorphic and almost periodic dynamics in skew-product semiflows // Mem. Amer. Math. Soc. – 1998. – **136**. – 121 p.
9. *Sell G., You Y.* Dynamics of evolutionary equations // Appl. Math. Sci. – New York: Springer, 2002. – **143**. – 565 p.
10. *Былов Б. Ф.* О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Мат. сб. – 1965. – **58**, № 3. – С. 338 – 344.
11. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 292 с.
12. *Colonius F., Kliemann W.* The Morse spectrum of linear flows on vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. – 1996. – **348**, № 11. – P. 4355 – 4388.
13. *Бронштейн И. У., Копанский А. Я.* Инвариантные многообразия и нормальные формы. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 332 с.

Одержано 10.09.10,
після доопрацювання — 11.09.11