УДК 517.518.362

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
А. А. Мурач (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Чернигов. технол. ун-т)

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

The Orlicz and Tandori theorems on the unconditional almost-everywhere convergence, with respect to Lebesgue measure, of real orthogonal series defined on the interval $(0;1)$ are extended to general complex orthogonal series defined on an arbitrary measure space.

Теореми Орліча і Тандорі про безумовну збіжність майже скрізь щодо міри Лебега дійсних ортогональних рядів, заданих на інтервалі $(0;1)$, поширено на загальні комплексні ортогональні ряди, що задані на просторі з довільною мірою.

1. Введение. В теории ортогональных рядов важную роль играет теорема Меньшова – Радемахера (см., например, [1], п. 2.3.2, [2], гл. 9, § 1). Она утверждает, что последовательность чисел $(\log_2^2 n)$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду (п.в.) относительно меры Лебега ряда по произвольной ортонормированной системе (ОНС) вещественных функций, заданных на ограниченном интервале оси. Как отмечено, например, в работах Б. М. Макарова [3] (п. 2.3.1), Ф. Морица, К. Тандори [4], К. Мини [5], эта теорема сохраняет силу для общих ортогональных вещественных или комплексных рядов, заданных на произвольном измеримом пространстве.

Вместе с тем известные авторам теоремы о *безусловной* сходимости п.в. ортогональных рядов установлены в предположении, что ОНС состоит из вещественных функций, заданных на ограниченном интервале оси. Среди этих результатов существенное место занимает теорема Орлича [6], которая дает достаточное условие того, что последовательность чисел $(\omega_n \log_2^2 n)$ является множителем Вейля для безусловной сходимости п.в. (см. также [1], п. 2.5.1). Как показал К. Тандори [7], условие теоремы Орлича на возрастающую последовательность (ω_n) нельзя ослабить.

В этой связи возникает вопрос: верна ли теорема Орлича для любой ОНС комплекснозначных функций, заданных на произвольном измеримом пространстве? В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Приведенное здесь доказательство отлично от данного В. Орличем. Оно опирается на теорему Тандори [7] о безусловной сходимости п.в., которую мы также распространяем на общие ортогональные ряды.

Отметим, что в случае ортогональных рядов по комплекснозначным собственным функциям самосопряженного эллиптического оператора, заданного на замкнутом компактном многообразии X, условия теорем Меньшова – Радемахера и Орлича равносильны принадлежности разлагаемой функции изотропным пространствам Хермандера $H^{\log}(X)$ и $H^{\varphi \log}(X)$ соответственно (см. [8, 9] и [10], п. 2.3.2). Здесь возрастающая функция $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$ регулярно меняется на $+\infty$ по Карамата и удовлетворяет условию

$$\int\limits_2^\infty \frac{dt}{t\,(\log_2 t)\,\varphi^2(t)} < \infty.$$

Общие формы теорем Меньшова – Радемахера и Орлича имеют содержательные приложения к исследованию сходимости кратных тригонометрических рядов, суммируемых различными методами. Соответствующие результаты будут приведены в другой статье.

2. Основные результаты. Пусть X— произвольное измеримое пространство, на котором задана некоторая σ-аддитивная мера $\mu \geq 0$. Не предполагается, что эта мера конечна или σ-конечна.

Рассмотрим комплексное гильбертово пространство $L_2(X, d\mu)$, образованное измеримыми функциями $f\colon X \to \mathbb{C}$ такими, что

$$\|f\| := \left(\int\limits_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) \right)^{1/2} < \infty$$

(точнее, классами функций, эквивалентных относительно μ).

Пусть в пространстве $L_2(X, d\mu)$ произвольно выбрана ортонормированная система комплекснозначных функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Исследуем безусловную сходимость μ-почти всюду (μ-п.в.) на X ортогонального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \varphi_n(x), \tag{1}$$

где коэффициенты a_n — комплексные числа.

Напомним, что ряд (1) называется *безусловно* сходящимся μ-п.в. на X, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = (\sigma(n))_{n=1}^{\infty}$ сходится μ-п.в. на X ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \, \varphi_{\sigma(n)}(x). \tag{2}$$

(При этом множество меры нуль расходимости ряда (2) может зависеть от перестановки σ.) Отметим, что из сходимости ряда (1) μ-п. в. (на X) не следует, вообще говоря, что этот ряд безусловно сходится μ-п. в.

Теорема 1 (общая форма теоремы Тандори). *Пусть последовательность комплексных чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2 \log_2^2 n \right)^{1/2} < \infty, \tag{3}$$

где $\nu_k := 2^{2^k}$. Тогда ряд (1) *безусловно сходится μ-п.в. на X.*

Это теорема доказана К. Тандори [7] в случае, когда

$$\begin{gathered} X = (\alpha, \beta), \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty, \quad \mu \text{ — мера Лебега}, \\ \varphi_n \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Им также показано, что она окончательная в следующем смысле: для фиксированной убывающей последовательности положительных чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ряд (1) безусловно сходится п.в. на интервале $(0; 1)$ для любой ОНС вещественных функций

$(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). Изложение этих результатов К. Тандори приведено в монографии [2] (гл. 9, § 2 и примечание к гл. 9 на с. 532).

Достаточное условие безусловной сходимости ряда (1) можно выразить в терминах множителей Вейля.

Теорема 2 (общая форма теоремы Орлича)**.** *Пусть последовательность комплексных чисел* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *и возрастающая* (*нестрого*) *последовательность положительных чисел* $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяют следующим условиям*:

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 (\log_2^2 n)\omega_n < \infty, \tag{5}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)\omega_n} < \infty. \tag{6}$$

Тогда ряд (1) *безусловно сходится* μ*-п.в. на* X.

В случае (4) эта теорема является эквивалентной формулировкой теоремы Орлича [6], предложенной П. Л. Ульяновым [11, с. 53] (см. также [12, с. 53]). Теорема Орлича и ее доказательство приведены, например, в монографии [1] (п. 2.5.1). Как уже отмечалось, в этой теореме условие (6) на последовательность $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ нельзя ослабить.

Теоремы 1 и 2 будут доказаны ниже в пп. 4 и 5 соответственно.

3. Вспомогательные факты. Сначала сделаем одно замечание. Без потери общности в доказательствах можно предполагать, что мера μ является σ-конечной. В самом деле, поскольку все функции $|\varphi_n|^2$, $n \geq 1$, интегрируемы на X, каждое множество $\{x \in X \colon |\varphi_n(x)| > 1/j\}$, где $j \geq 1$ целое, имеет конечную меру. Следовательно, мера μ является σ-конечной на множестве всех тех точек $x \in X$, где $\varphi_n(x) \neq 0$ хотя бы для одного значения n. Вне этого множества все члены ряда (1) суть тождественные нули. Поэтому указанное предположение не приводит к потере общности в доказательствах.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующий факт.

Лемма 1 (общая форма леммы Меньшова – Радемахера)**.** *Пусть произвольно заданы целое число* $N \geq 1$, *конечная ОНС функций* $\Psi := (\psi_n)_{n=1}^{N}$ *в* $L_2(X, d\mu)$ *и конечный набор комплексных чисел* $b := (b_n)_{n=1}^{N}$. *Тогда для функции*

$$S_N^*(\Psi, b, x) := \max_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{n=1}^{j} b_n \psi_n(x) \right|, \quad x \in X, \tag{7}$$

выполняется неравенство

$$\|S_N^*(\Psi, b, \cdot)\| \leq C \, \log_2(N+1) \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Здесь C — *некоторая универсальная положительная постоянная.*

В случае (4) неравенство (8) получено независимо Д. Е. Меньшовым и Г. Радемахером и использовано ими для доказательства теоремы о сходимости п.в. ортогональных рядов (см. изложение их результатов в монографиях [1], пп. 2.3.1, 2.3.2

и [2], гл. 9, § 1). Оно известно также и в рассматриваемой нами общей ситуации (см., например, [13] (теорема 3) и [5] (предложение 2.1)). Отметим, что полная характеризация последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что ряд (1) сходится п.в. для произвольной ОНС функций в $L_2(X, d\mu; \mathbb{R})$, дана А. Пашкевичем [14].

4. Доказательство теоремы 1. Мы в основном следуем схеме доказательства из монографии [2] (гл. 9, § 2, теорема 5), где рассмотрен случай (4).

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1 = a_2 = 0$. Для целого $k \ge 0$ обозначим

$$H_k := \{j \in \mathbb{N} \colon \nu_k + 1 \le j \le \nu_{k+1}\};$$

здесь, напомним, $\nu_k := 2^{2^k}$. Рассмотрим произвольную перестановку (2) ортогонального ряда (1). Определим последовательность чисел $\left(\varepsilon_n^{(k)}\right)_{n=1}^{\infty}$ по формуле

$$\varepsilon_n^{(k)} := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma(n) \in H_k, \\ 0, & \text{если} \quad \sigma(n) \notin H_k. \end{cases}$$

Для произвольных $p, q \in \mathbb{N}$ таких, что $p \le q$, можем записать

$$\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)}\, \varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^{(k)} a_{\sigma(n)}\, \varphi_{\sigma(n)}(x), \quad x \in X. \tag{9}$$

Ряд в правой части равенства (9) сходится для каждого $x \in X$, так как он содержит лишь конечное число ненулевых членов.

Для целого $k \ge 0$ положим

$$\delta_k(x) := \sup_{1 \le p < q < \infty} \left| \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^{(k)}\, a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right|, \quad x \in X. \tag{10}$$

Отметим, что

$$\delta_k(x) \le\; 2 \sup_{1 \le q < \infty} \left| \sum_{n=1}^{q} \varepsilon_n^{(k)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right|, \quad x \in X, \tag{11}$$

причем последняя сумма содержит лишь слагаемые, для которых индекс $\sigma(n) \in$ $\in H_k$. Положим в лемме 1

$$\Psi := \{\varphi_{\sigma(n)} \colon n \in \mathbb{N} \;\text{ такое, что }\; \sigma(n) \in H_k\},$$

$$b := \{a_{\sigma(n)} : n \in \mathbb{N} \;\text{ такое, что }\; \sigma(n) \in H_k\},$$

$$N = N(k) := \nu_{k+1} - \nu_k = \nu_k(\nu_k - 1).$$

Тогда

$$S^*_{N(k)}(\Psi, b, x) = \sup_{1 \le q < \infty} \left| \sum_{n=1}^{q} \varepsilon_n^{(k)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right|, \quad x \in X.$$

Поэтому в силу леммы 1 и неравенства (11) имеем

$$\|\delta_k\| \leq 2C\log_2(N(k)+1)\left(\sum_{n:\ \sigma(n)\in H_k} |a_{\sigma(n)}|^2\right)^{1/2} =$$

$$= 2C\log_2(N(k)+1)\left(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно, поскольку

$$\log_2(N(k)+1) = \log_2(\nu_k(\nu_k-1)+1) \leq 2\log_2\nu_k,$$

приходим к оценке

$$\left(\int\limits_X \delta_k^2(x)d\mu(x)\right)^{1/2} \leq 4C\left(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2\log_2^2 n\right)^{1/2}. \qquad (12)$$

Покажем, что отсюда следует неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(x) < \infty \quad \text{для} \quad \mu\text{-п.в.} \quad x\in X. \qquad (13)$$

Как отмечалось выше, можно предполагать без потери общности, что мера μ является σ-конечной.

Если $\mu(X) < \infty$, то в силу неравенства Коши для интегралов, оценки (12) и условия (3) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_X \delta_k(x)d\mu(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_X d\mu(x)\right)^{1/2}\left(\int\limits_X \delta_k^2(x)\,d\mu(x)\right)^{1/2} \leq \qquad (14)$$

$$\leq 4C\sqrt{\mu(X)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2\log_2^2 n\right)^{1/2} < \infty. \qquad (15)$$

Следовательно, по теореме Б. Леви

$$\int\limits_X\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(x)\right)d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_X \delta_k(x)d\mu(x) < \infty, \qquad (16)$$

откуда получаем (13) (напомним, что все $\delta_k \geq 0$).

Если $\mu(X) = \infty$, то представим X в виде счетного объединения измеримых множеств X_j, $j\in\mathbb{N}$, меры которых конечны. Для каждого номера j неравенства (14), (15) и их следствия — формулы (16), (13) — сохраняют силу, если в них заменить X на X_j. Отсюда снова получаем (13).

В силу (13) для μ-п.в. $x\in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $m = m(x,\varepsilon)$, что

$$\sum_{k=m}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon. \tag{17}$$

Выберем номер $p = p(x, \varepsilon)$ настолько большим, что сумма

$$\sum_{n=1}^{p-1} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x)$$

содержит все функции φ_n с номерами из H_k, где $0 \le k < m(x, \varepsilon)$. Тогда в силу (10) и (17) для любого целого $q \ge p$ имеем

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^{(k)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| = \left| \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^{(k)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty} \left| \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^{(k)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| \le \sum_{k=m}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon.$$

Таким образом, для μ-п. в. $x \in X$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $p = p(x, \varepsilon)$, что при любом целом $q \ge p$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \right| < \varepsilon.$$

Тем самым установлено, что ряд (2) сходится для μ-п. в. $x \in X$.

Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Мы выведем ее из теоремы 1, показав, что условия (5) и (6) влекут за собой условие (3).

Для каждого целого числа $k \ge 0$ полагаем

$$A_k := \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2 \log_2^2 n,$$

где, как и прежде, $\nu_k := 2^{2^k}$. Воспользовавшись неравенством Коши, можем записать

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{1/2} \omega_{\nu_k}^{1/2} \omega_{\nu_k}^{-1/2} \le \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k \omega_{\nu_k} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\nu_k}^{-1} \right)^{1/2}.$$

Как отмечалось в [11, с. 53, 54], условие (6) равносильно следующему:

$$c := \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\nu_k}^{-1} < \infty. \tag{18}$$

(Для полноты изложения докажем это в конце настоящего пункта.) Следовательно, в силу условия (5) и возрастания последовательности $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{1/2}\right)^2 \leq c\sum_{k=0}^{\infty} A_k \omega_{\nu_k} = c\sum_{k=0}^{\infty} \omega_{\nu_k} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2 \log_2^2 n \leq$$

$$\leq c\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2 (\log_2^2 n)\omega_n = c\sum_{n=3}^{\infty} |a_n|^2 (\log_2^2 n)\omega_n < \infty.$$

Таким образом, выполняется условие (3):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} |a_n|^2 \log_2^2 n\right)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, по теореме 1 ряд (1) безусловно сходится μ-п.в. на X.

Теорема 2 доказана.

В приведенном доказательстве был использован следующий факт.

Предложение 1. *Для любой возрастающей (нестрого) последовательности положительных чисел $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ условия (6) и (18) равносильны.*

Доказательство. Как известно, для любой убывающей (нестрого) последовательности положительных чисел $(d_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\, d_{2^n} < \infty. \tag{19}$$

Дважды применяя (19) сначала для $d_n := (n(\log_2 n)\omega_n)^{-1}$, а затем для $d_n := (n\omega_{2^n})^{-1}$, получаем требуемую равносильность:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log_2 n)\omega_n} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\omega_{2^n}} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{\nu_n}} < \infty.$$

Предложение 1 доказано.

6. Заключительное замечание. Как видно из доказательств леммы 1 и теорем 1 и 2, они сохраняют силу, если система $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса [15] (гл. VI, § 2) в замыкании своей линейной оболочки в пространстве $L_2(X, d\mu; \mathbb{C})$. При этом в лемме 1 в правой части неравенства (8) постоянная C уже не является универсальной и зависит от выбора системы $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$.

1. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 360 с.
2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с.
3. *Makarov B. M.* p-Absolutely summing operators and some of their applications // St. Petersburg Math. J. – 1992. – **3**, № 2. – P. 227 – 298.
4. *Móricz F., Tandori K.* An improved Menshov – Rademacher theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – **124**, № 3. – P. 877 – 885.
5. *Meaney C.* Remarks on the Rademacher – Menshov theorem // Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ. – 2007. – **42**. – P. 100 – 110.
6. *Orlicz W.* Zur Theorie der Orthogonalreihen // Bull. Int. Acad. Sci. Polon. Cracovie. – 1927. – P. 81 – 115.
7. *Tandori K.* Über die orthogonalen Functionen X (unbedingte Kovergenz) // Acta Sci. Math. – 1962. – **23**, № 3-4. – P. 185 – 221.

8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
9. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 29 – 35.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (arXiv:1106.3214)
11. *Ульянов П. Л.* О множителях Вейля для безусловной сходимости // Мат. сб. – 1963. – **60**, № 1. – С. 39 – 62.
12. *Ульянов П. Л.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 1. – С. 3 – 69.
13. *Móricz F.* Moment inequalities and the strong laws of large numbers // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1976. – **35**, № 4. – S. 299 – 314.
14. *Paszkiewicz A.* A complete characterization of coefficients of a.e. convergent orthogonal series and majorizing measures // Invent. math. – 2010. – **180**, № 1. – P. 55 – 110.
15. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

Получено 14.04.11