УДК 517.5

М. Ш. Шабозов (Ин-т математики АН Республики Таджикистан, Душанбе)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА – СТЕЧКИНА ДЛЯ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2 И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

We consider the problem of finding exact inequalities for the best approximations of periodical differentiable functions by trigonometric polynomials and the m-order moduli of continuity in the space L_2 and present their applications. For some classes of functions defined by the indicated moduli of continuity, we calculate the exact values of n-widths in the space L_2.

Розглянуто задачу про знаходження точних нерівностей між найкращими наближеннями періодичних диференційовних функцій тригонометричними поліномами і модулями неперервності m-го порядку у просторі L_2, а також наведено їх застосування. Для деяких класів функцій, що визначаються зазначеними модулями неперервності, обчислено точні значення n-поперечників у L_2.

1. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, R_+ — множество положительных чисел вещественной оси, $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство 2π-периодических интегрируемых с квадратом по Лебегу действительных функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\Im_{n-1}$ — подпространство всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leq n-1$. Известно, что для произвольной функции $f(x) \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\Im_{n-1}$ равна

$$E_n(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| : \ T_{n-1}(x) \in \Im_{n-1}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right\}^{1/2}, \qquad (1)$$

где

$$S_{n-1}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_k^2 := a_k^2 + b_k^2$.

Через L_2^r $(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^0 = L_2)$ обозначим множество функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)}(x) \in L_2$.

Равенством

$$\omega_m(f;t) := \sup_{|h|\le t} \|\triangle_h^m(f)\| = \sup_{|h|\le t} \left\| \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh) \right\|_{L_2}$$

определим модуль непрерывности m-го порядка функции $f(x) \in L_2$.

Во втором пункте при вычислении n-поперечников на классах функций структурные свойства функции $f(x) \in L_2$ характеризуем скоростью стремления к нулю модуля непрерывности r-й производной $f^{(r)}(x)$, задавая эту скорость посредством мажоранты некоторой усредненной величины $\omega_m(f^{(r)};t)$. В работе [1] рассматривается экстремальная аппроксимационная характеристика вида

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \sup_{\substack{f\in L_2^r \\ f^{(r)}\ne\mathrm{const}}} \frac{2^m n^r E_n(f)}{\left(\int_0^h \omega_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}, \tag{2}$$

где $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $1/r < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, и доказано, что

$$\chi_{m,n,r,p}(h) = \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt \right)^{-1/p}. \tag{3}$$

Отметим, что величины вида (2) при различных значениях указанных параметров изучались в работах [2 – 7]. В частности, Л. В. Тайков [2] показал, что

$$\chi_{1,n,r,2}(h) = \{2n/(nh - \sin nh)\}^{1/2}, \quad 0 < nh \le \pi/2,$$

а С. Б. Вакарчук [5], обобщив указанный результат Л. В. Тайкова, доказал, что

$$\chi_{m,n,r,2/m}(h) = \{2n/(nh - \sin nh)\}^{m/2}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 0 < nh \le \pi/2.$$

Заметим, что из определения величины (2) и равенства (3) для произвольной $f(x) \in L_2^r$ следует неравенство

$$E_n(f) \le 2^{-m} n^{-r} \left(\int\limits_0^h \left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)dt \right)^{1/p}. \tag{4}$$

2. Обозначим через $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$ и $\pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ соответственно колмогоровский, гельфандовский, бернштейновский, линейный и проекционный n-поперечники некоторого выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 (см., например, [5 – 8]). Указанные поперечники монотонны по n и связаны соотношениями

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \tag{5}$$

Также полагаем $E_n(\mathfrak{M})_{L_2} := \sup\left\{E_n(f)_{L_2} \colon f \in \mathfrak{M}\right\}$.

Пусть $\Phi(u)$ — произвольная непрерывная возрастающая функция, определенная на множестве $[0,\infty)$, такая, что $\Phi(0)=0$. Через $W(\Phi):=W(r,m,p;\Phi)$, где $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1/r<p\le 2$, обозначим класс функций $f(x)\in L_2^r(L_2^0\equiv L_2)$, которые при любом $h\in(0,\pi/n]$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяют ограничению

$$\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)};t)dt\right)^{1/p}\le\Phi(h).$$

Зададимся целью вычислить вышеуказанные n-поперечники при некоторых ограничениях на мажоранты $\Phi(u)$.

Введем обозначение

$$(\sin t)_*=\left\{\sin t,\quad\text{если}\quad 0\le t\le\pi/2;\quad 1,\quad\text{если}\quad t>\pi/2\right\}.$$

Теорема 1. *Если для любого заданного* $0<\mu\le 1$ *и для всех* $\lambda>0$, $0<u\le\pi$, $r,m\in\mathbb{N}$, $1/r<p\le 2$, *функция* $\Phi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(\mu u)\int\limits_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}dv\le\Phi^p(\lambda u)\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv, \tag{6}$$

то для любого $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\rho_{2n}(W(\Phi),L_2)=\rho_{2n-1}(W(\Phi),L_2)=E_n(W(\Phi))_{L_2}=$$

$$=2^{-(m+1/p)}n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/2}\sin^{mp}t\,dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right), \tag{7}$$

где $\rho_k(\cdot)$ — *любой из* k*-поперечников* $b_k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ *или* $\pi_k(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху для проекционного n-поперечника с учетом определения класса $W(\Phi)$ получаем из неравенства (4), полагая в нем $h=\mu\pi/n$:

$$\pi_{2n}(W(\Phi),L_2)\le\pi_{2n-1}(W(\Phi),L_2)\le\sup\left\{E_n(f)_{L_2}\colon f\in W(\Phi)\right\}\le$$

$$\le 2^{-m}n^{-r}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/n}\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)=$$

$$=2^{-\left(m+\frac{1}{p}\right)}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/2}\sin^{mp}t\,dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right). \tag{8}$$

С целью получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника класса $W(\Phi)$ введем в рассмотрение $(2n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S_{2n+1} = \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_n\colon \ \|T_n\|_2 = 2^{-m} n^{-r} \left(\int\limits_0^{\mu\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем, что $S_{2n+1} \subset W(\Phi)$.

В работе [4] доказано, что для произвольного полинома $T_n(x) \in S_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_m(T_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m n^r \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^m \|T_n\|_2. \qquad (9)$$

Неравенство (9) возведем в степень p, $1/r < p \leq 2$, и проинтегрируем по t в пределах от 0 до λu, затем выполним замену переменной $nt = v$ в правой части и учтем принадлежность полинома $T_n(x)$ сфере S_{2n+1}. В итоге получим

$$\int\limits_0^{\lambda u} \omega_m^p(T_n^{(r)}, t)_2 dt \leq \frac{\Phi^p\left(\frac{\mu\pi}{n}\right) \int_0^{\lambda u} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)_*^{mp} dt}{\int_0^{\mu\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt} =$$

$$= \frac{\Phi^p\left(\frac{\mu\pi}{n}\right) \int_0^{\lambda n u} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} dv}{\int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{mp} dv}.$$

Вводя обозначение $u = \pi/n$ и используя условие (6), приходим к неравенству

$$\int\limits_0^{\lambda u} \omega_m^p(T_n^{(r)}, t)_2 dt \leq \frac{\Phi^p(\mu u) \int_0^{\lambda \pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)_*^{mp} dv}{\int_0^{\mu\pi} \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{mp} dv} \leq \Phi^p(\lambda u),$$

откуда следует включение $S_{2n+1} \subset W(\Phi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника, получаем следующую оценку снизу:

$$b_{2n-1}(W(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(W(\Phi), L_2) \geq b_{2n}(S_{2n+1}, L_2) =$$

$$= 2^{-m} n^{-r} \left(\int\limits_0^{\mu\pi/n} \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{-\left(m+\frac{1}{p}\right)} n^{-r+\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\mu\pi/2} \sin^{mp} t dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right). \qquad (10)$$

Сопоставляя неравенства (8) и (10), с учетом соотношения (5) получаем равенство (7).

Теорема 1 доказана.

Условия теоремы 1 на первый взгляд выглядят неестественными и трудно-проверяемыми. Однако это не так. Нетрудно проверить, что условие (6) является необходимым и достаточным для того, чтобы совокупность функций

$$\left\{2^{-\left(m+\frac{1}{p}\right)}n^{-r+\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^{\mu\pi/2}\sin^{mp}t dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\mu\pi}{n}\right)\right\}\left\{\begin{array}{c}\sin nx\\ \cos nx\end{array}\right\}$$

принадлежала классу $W(\Phi)$.

Ниже мы проанализируем условия теоремы 1 и выясним значения $\alpha,$ при которых функция $\Phi_0(u) = u^\alpha$ удовлетворяет этим условиям. С этой целью запишем неравенство (6) в эквивалентной форме

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}dv}{\displaystyle\int_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv} \le \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p}, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \mu \le 1. \tag{11}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы неравенство* (11) *имело место с любыми заданными* $\lambda > 0$, $0 < \mu \le 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ *определялось по формуле*

$$\alpha = \alpha(\mu; m, p) = \mu\pi\left(\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}\left\{p\int\limits_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv\right\}^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Приравнивая производные по λ от левой и правой частей неравенства (11) при $\lambda = \mu$, получаем (12). Из равенства (12) при любых $0 < \mu \le 1$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ определим границы значения числа α. Имеем

$$\frac{1}{p} \le \alpha(\mu; m, p) = \frac{\mu\pi\left(\sin\dfrac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}}{p\displaystyle\int_0^{\mu\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)^{mp}dv} \le$$

$$\le \frac{\pi}{2p\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{2}{\pi}\mu v\right)^{mp}dv} = \mu^{-mp}\left(m+\frac{1}{p}\right).$$

Поскольку согласно этому неравенству $\alpha < \mu^{-mp}(m+1/p)$, $0 < \mu \le 1$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ неравенство (11) выполняется. Из определения $\alpha = \alpha(\mu; m, p)$ следует другая эквивалентная форма неравенства (11):

$$\frac{(1/\pi)\displaystyle\int_0^{\lambda\pi}\left(\sin\frac{v}{2}\right)_*^{mp}dv}{\left(\sin\dfrac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}} \le \frac{\mu}{\alpha p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p}. \tag{13}$$

Обе части неравенства (13) совпадают на концах интервала $\lambda \in (0, \mu)$ вместе со своими производными по λ. Если допустить знак равенства в (13) на данном интервале, то производные обеих частей неравенства (13)

$$\frac{\left(\sin \dfrac{\lambda\pi}{2}\right)_*^{mp}}{\left(\sin \dfrac{\mu\pi}{2}\right)^{mp}}, \quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\alpha p - 1}$$

будут совпадать в четырех различных точках отрезка $[0, \mu]$.

Таким образом, функция

$$r(\lambda) = \frac{\left(\sin \dfrac{\lambda\pi}{2}\right)_*}{\left(\sin \dfrac{\mu\pi}{2}\right)} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(\alpha p - 1)/mp}$$

имеет четыре нуля на $[0, \mu]$. Это означает, что производная

$$r'(\lambda) = \frac{\dfrac{\pi}{2}\left(\cos \dfrac{\lambda\pi}{2}\right)_*}{\left(\sin \dfrac{\mu\pi}{2}\right)} - \frac{\alpha p - 1}{\mu m p}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(\alpha p - 1 - mp)/mp}$$

имеет три различных нуля на интервале $(0, \mu)$. Пришли к противоречию. Этим неравенство (11) доказано для $\lambda \in (0, \mu]$.

Если предположить, что неравенство (11) не имеет места для $\lambda > \mu$, то обязательно найдется $\lambda = \mu_0 > \mu$, для которого в (11) будет реализовано равенство. Это следует из того, что левая часть в (11) является линейной функцией от λ при $\lambda > 1$, а правая часть — возрастающая выпуклая вниз функция, так как по определению $\alpha p > 1$. Таким образом, функция $r(\lambda)$ будет иметь четыре нуля на полуинтервале $[0, \mu_0)$, а ее производная $r'(\lambda)$ — по крайне мере, три различных нуля при $0 < \lambda < \mu_0$. Опять пришли к противоречию. Этим неравенство (11) доказано.

Следствие. *Для любых натуральных m, n, r $1/r < p \le 2$,*

$$\alpha(1; m, p) = \frac{\sqrt{\pi}}{p}\Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1\right)\left\{\Gamma\left(\frac{mp+1}{2}\right)\right\}^{-1},$$

$\Gamma(b)$ — гамма-функция Эйлера, справедливы равенства

$$\rho_{2n}(W(\Phi_0), L_2) = \rho_{2n-1}(W(\Phi_0), L_2) = E_n(W(\Phi_0))_{L_2} =$$

$$= 2^{-m}(\alpha p)^{1/p}\pi^{\alpha - 1/p}n^{-r-\alpha+1/p},$$

где $\rho_k(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных k-поперечников $b_k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $d^k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$ и $\pi_k(\cdot)$.

1. *Шабозов М. Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Мат. заметки. – 2010. – **87**, № 4. – С. 616 – 623.

2. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
3. *Тайков Л. В.* Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 4. – С. 535 – 542.
4. *Тайков Л. В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 2. – С. 217 – 223.
5. *Вакарчук С. Б.* Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. – 2006. – **80**, № 1. – С. 11 – 18.
6. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 3. – С. 334 – 345.
7. *Вакарчук С. Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. – 2005. – **78**, № 5. – С. 792 – 796.
8. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 325 с.

Получено 28.10.10,
после доработки — 12.08.11