УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т им. А. Нобеля),
М. Б. Вакарчук (Днепропетр. нац. ун-т им. О. Гончара)

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ

Exact inequalities of the Kolmogorov type are obtained in Hardy Banach spaces for functions of one complex variable analytic in the unit disk and functions of two complex variables analytic in the unit bidisk. We also present applications of these inequalities to problems of the theory of approximation of analytic functions of one and two complex variables.

Для функцій однієї комплексної змінної, аналітичних в одиничному колі, та для функцій двох комплексних змінних, аналітичних в одиничному біколі, у банахових просторах Харді одержано точні нерівності типу Колмогорова. Також наведено їх застосування до задач теорії апроксимації аналітичних функцій однієї та двох комплексних змінних.

С начала прошлого века у многих математиков, начиная с Э. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харди, Дж. Литтльвуда, А. Н. Колмогорова, особый интерес вызывает получение точных неравенств для норм промежуточных производных функции через норму самой функции и норму ее старшей производной. Современное развитие указанной тематики связано с работами В. В. Арестова, С. Б. Стечкина, Л. В. Тайкова, В. Н. Габушина, В. М. Тихомирова, Н. П. Купцова, В. Н. Коновалова, Н. П. Корнейчука, В. Ф. Бабенко, Г. Г. Магарил-Ильяева, А. А. Лигуна, С. А. Пичугова, В. А. Кофанова и многих других (см., например, монографию [1] и приведенную в ней библиографию).

Не меньший интерес, с нашей точки зрения, представляет решение подобных задач и в случае аналитических функций комплексной переменной, где, по сравнению с вещественным случаем, получено не так много окончательных результатов (см., например, [2 – 6]). Данная статья продолжает указанную тематику в комплексной плоскости.

1. Введем необходимые обозначения и понятия. Пусть $U := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$; $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U; H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$ с конечной нормой

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \begin{cases} \lim\limits_{\rho\to 1-0} M_q(f,\rho), & \text{если} \quad 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup\limits_{z\in U} |f(z)|, & \text{если} \quad q = \infty, \end{cases}$$

где

$$M_q(f,\rho) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\tau})|^q d\tau \right\}^{1/q}.$$

Заметим, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{i\tau})$, которые существуют почти для всех $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$ (см., например, [7, 8]). Если при этом $1 \leqslant p < q$, то справедливо включение $H_q \subset H_p$.

Множество функций $f \in A(U)$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, по комплексной переменной z принадлежат пространству Харди H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, обозначим символом H_q^r. Используя идеи работы К. И. Бабенко [9], можно показать, что $H_q^r \subset H_q$. Исходя из этого для произвольной функции $f \in H_q^r$ при $q \geqslant 2$ имеем $f^{(r)} \in H_q \subset H_2$. Используя разложение f в круге U в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) z^j,$$

где $c_j(f)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — коэффициенты Тейлора функции f, производную r-го порядка $f^{(r)}$ представим в виде

$$f^{(r)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r} c_j(f) z^{j-r},$$

где $\alpha_{j,r} := j(j-1)\ldots(j-r+1)$, $j \geqslant r$. Поскольку, как следует из изложенного выше, для функции $f \in H_q^r$ норма ее r-й производной

$$\|f^{(r)}\|_2 = \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r}^2 |c_j(f)|^2 \right\}^{1/2} \tag{1}$$

конечна в пространстве H_2, в силу формулы (1) и представления величин $\alpha_{j,r}$, конечными в этом пространстве будут и нормы всех ее промежуточных производных $f^{(r-k)}$, $k = \overline{1, r-1}$. Отсюда, в частности, следует принадлежность указанных производных пространствам Харди H_p, $1 \leqslant p < 2$, т. е. справедливы соотношения $H_q^r \subset H_p^{r-k}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, $k = \overline{1, r}$, $H_p^0 \equiv H_p$.

2. Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r$ — *натуральное число,* $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s$, $t \leqslant q$. *Тогда для любой функции* $f \in H_q^r$, *у которой коэффициенты Тейлора* $c_j(f) = 0$, $j = \overline{r-k, r-1}$, *имеет место неравенство*

$$\|f^{(r-k)}\|_p \leqslant \frac{\alpha_{r,r-k}}{\alpha_{r,r}^{1-k/r}} \|f\|_s^{k/r} \|f^{(r)}\|_t^{1-k/r}. \tag{2}$$

Неравенство (2) *является точным в том смысле, что существует функция* $f_0 \in H_q^r$, *обращающая его в равенство. При этом полагаем* $\alpha_{r,0} := 1$.

Доказательство. Поскольку при $k = r$ неравенство (2) очевидно, то полагаем, что $1 \leqslant k < r$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть функция f принадлежит множеству H_q^r и удовлетворяет условию теоремы 1 относительно коэффициентов Тейлора $c_j(f)$. Тогда для ее производной $(r-k)$-го порядка

$$f^{(r-k)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r-k} c_j(f) z^{j-r+k}$$

в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j(f)|^2, \tag{3}$$

$$\|f^{(r-k)}\|_2^2 = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r-k}^2 |c_j(f)|^2. \tag{4}$$

Равенство (4) представим в виде

$$\|f^{(r-k)}\|_2^2 = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r}^{2(1-k/r)} |c_j(f)|^{2(1-k/r)} \left\{ \frac{\alpha_{j,r-k}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}} \right\}^2 |c_j(f)|^{2k/r}. \tag{5}$$

Для получения неравенства (2) применим ряд идей, использованных И. В. Бердниковой и С. З. Рафальсоном в ходе доказательства теоремы 1 из работы [10]. Используя формулу (5), получаем

$$\|f^{(r-k)}\|_2^2 \leqslant \left\{ \sup_{j \geqslant r} \frac{\alpha_{j,r-k}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}} \right\}^2 \sum_{j=r}^{\infty} |c_j(f)|^{2(1-k/r)} \; \alpha_{j,r}^{2(1-k/r)} \; |c_j(f)|^{2k/r}. \tag{6}$$

Воспользуемся далее неравенством Гельдера

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta_j \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{\eta} \right)^{1/\eta} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{\eta'} \right)^{1/\eta'},$$

где $\alpha_j,\ \beta_j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{N};\ \eta > 1$ и $1/\eta + 1/\eta' = 1$. Полагая $\eta := r/(r-k)$, а значит $\eta' := r/k$, и применяя к правой части соотношения (6) неравенство Гельдера, а также используя формулы (1) и (3), записываем оценку сверху величины $\|f^{(r-k)}\|_2^2$:

$$\|f^{(r-k)}\|_2^2 \leqslant \left\{ \sup_{j \geqslant r} \frac{\alpha_{j,r-k}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}} \right\}^2 \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} |c_j(f)|^2 \right\}^{k/r} \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r}^2 |c_j(f)|^2 \right\}^{1-k/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sup_{j \geqslant r} \frac{\alpha_{j,r-k}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}} \right\}^2 \|f\|_2^{2k/r} \|f^{(r)}\|_2^{2(1-k/r)}. \tag{7}$$

Установим равенство

$$\sup_{j \geqslant r} \frac{\alpha_{j,r-k}}{\alpha_{j,r}^{1-k/r}} = \frac{\alpha_{r,r-k}}{\alpha_{r,r}^{1-k/r}}. \tag{8}$$

Поскольку, как нетрудно убедиться путем непосредственных вычислений, при $j \geqslant$ $\geqslant r,\ j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}} = \frac{\big(j(j-1)\dots(j-r+k+1)\big)^{k/r}}{\big((j-r+k)\dots(j-r+1)\big)^{1-k/r}},$$

для удобства рассуждений рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) := \frac{\big(x(x-1)\dots(x-r+k+1)\big)^{k/r}}{\big((x-r+k)\dots(x-r+1)\big)^{1-k/r}}, \tag{9}$$

где $r \leqslant x < \infty$. Покажем, что g является монотонно убывающей функцией. Логарифмируя обе части соотношения (9), получаем

$$\ln g(x) = \frac{1}{r}\Big\{k\big(\ln x + \ln(x-1) + \ldots + \ln(x-r+k+1)\big) -$$

$$-(r-k)\big(\ln(x-r+k) + \ldots + \ln(x-r+1)\big)\Big\}. \tag{10}$$

Дифференцируя обе части равенства (10) по переменной x, имеем

$$g'(x) = g(x)\frac{k(r-k)}{r}\left\{\frac{1}{r-k}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-r+k+1}\right) -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x-r+k} + \ldots + \frac{1}{x-r+1}\right)\right\}. \tag{11}$$

Заменив каждое слагаемое в первой круглой скобке правой части равенства (11) наибольшим числом $1/(x-r+k+1)$, а каждое слагаемое во второй круглой скобке наименьшим числом $1/(x-r+k)$, получим

$$g'(x) \leqslant g(x)\frac{k(r-k)}{r}\left(\frac{1}{x-r+k+1} - \frac{1}{x-r+1}\right) < 0.$$

Следовательно, функция g монотонно убывает на полусегменте $[r,\infty)$, а значит справедливо равенство (8). Используя формулы (7), (8), имеем

$$\|f^{(r-k)}\|_2 \leqslant \frac{\alpha_{r,r-k}}{\alpha_{r,r}^{1-k/r}}\,\|f\|_2^{k/r}\,\|f^{(r)}\|_2^{1-k/r}. \tag{12}$$

Учитывая принадлежность промежуточной производной $f^{(r-k)}$ функции $f \in H_q^r$, $q \geqslant 2$, пространству Харди H_p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, и справедливость соотношений $f \in H_s$, $f^{(r)} \in H_t$, где $2 \leqslant s,t \leqslant q$, а также специфику определения нормы в пространстве Харди, из формулы (12) получаем требуемое неравенство (2).

Покажем, что неравенство (2) является неулучшаемым в указанном выше смысле. Для этого рассмотрим, например, функцию $f_0(z) := z^r$, принадлежащую множеству H_q^r. Поскольку $\|f_0^{(r)}\|_t = \alpha_{r,r}$, $\|f_0\|_s = 1$, $\|f_0^{(r-k)}\|_p = \alpha_{r,r-k}$, подставляя значения указанных величин в формулу (2), убеждаемся в том, что неравенство (2) обращается в равенство.

Теорема 1 доказана.

3. Пусть $\mathbf{z} := (z_1,z_2) = (\rho_1 e^{i\tau_1}, \rho_2 e^{i\tau_2})$, где $0 \leqslant \rho_1,\rho_2 < \infty$; $0 \leqslant \tau_1,\tau_2 \leqslant 2\pi$, — произвольная точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$; $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \colon |z_j| < 1,\ j = 1,2\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$; $\Gamma^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 \colon |z_j| = 1,\ j = 1,2\}$ — остов единичного бикруга. Класс всех аналитических в U^2 функций обозначим через $A(U^2)$. Пусть $f \in A(U^2)$, $\rho_j \in [0,1)$, $j = 1,2$, $1 \leqslant q < \infty$, и

$$M_q(f;\rho_1,\rho_2) := \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(\rho_1 e^{i\tau_1}, \rho_2 e^{i\tau_2})\right|^q d\tau_1 d\tau_2\right\}^{1/q}.$$

Символом $H_{q,2} := H_q(U^2)$, $q \geqslant 1$, обозначим пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U^2)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,2} := \|f\|_{H_{q,2}} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{\rho_j \to 1-0 \\ j=1,2}} M_q(f;\rho_1,\rho_2), & \text{если} \quad 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup\limits_{\substack{z_j \in U \\ j=1,2}} |f(z_1,z_2)|, & \text{если} \quad q = \infty. \end{cases}$$

Из результатов А. Зигмунда [11] следует, что для функции $f \in H_{q,2}$, $1 \leqslant \leqslant q < \infty$, почти всюду на Γ^2 существуют угловые граничные значения $f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2})$ и выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\rho_j \to 1-0 \\ j=1,2}} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| f(\rho_1 e^{i\tau_1}, \rho_2 e^{i\tau_2}) - f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2}) \right|^q d\tau_1 d\tau_2 = 0 \ ,$$

т. е. функцию f можно считать заданной почти всюду на Γ^2. Поэтому под $H_{q,2}$ часто подразумевают именно множество таких граничных функций и говорят, что норма функции $f \in H_{q,2}$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2})$, которые существуют почти для всех $0 \leqslant \tau_1, \tau_2 \leqslant 2\pi$.

Символом $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, $r_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, обозначим множество функций $f \in A(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(r_1,r_2)}$ и частные производные $f^{(r_1,0)}$, $f^{(0,r_2)}$ по переменным z_1 и z_2 соответственно принадлежат пространству Харди $H_{q,2}$.

Лемма 1. *Для любых чисел* $r_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, *и* $1 \leqslant q < \infty$ *справедливо соотношение* $H_{q,2}^{r_1,r_2} \subset H_{q,2}$.

Доказательство. Полагаем, что f — произвольная функция, принадлежащая множеству $H_{q,2}^{r_1,r_2}$. Покажем принадлежность функции f пространству Харди $H_{q,2}$. Пусть $z_2 \in U$ — произвольная фиксированная точка. Тогда, в силу определения множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, нетрудно видеть, что функция $f(z_1, z_2)$, как функция одной независимой переменной $z_1 \in U$, является элементом множества $H_q^{r_1}$ и для нее имеет место представление (см., например, [9, 12])

$$f(z_1,z_2) = \sum_{k=0}^{r_1-1} c_k(f,z_2) z_1^k + \frac{z_1^{r_1}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f^{(r_1,0)}(z_1 e^{-iu}, z_2) \mathcal{K}_{r_1}(u) du \ , \tag{13}$$

где

$$c_k(f,z_2) := \frac{R_1^{-k}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(R_1 e^{iu}, z_2) e^{-iku} du, \quad 0 < R_1 < 1, \tag{14}$$

$$\mathcal{K}_{r_1}(u) := \frac{1}{2\alpha_{r_1,r_1}} + \sum_{\nu=r_1+1}^{\infty} \frac{\cos(\nu - r_1)u}{\alpha_{\nu,r_1}} \ , \tag{15}$$

которое проверяется непосредственной подстановкой выражений (14), (15) в формулу (13). Заметим, что функция $\mathcal{K}_{r_1}$ является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$ [9].

На основании аналогичных соображений запишем следующее представление для $f(R_1 e^{iu}, z_2)$, как для функции от переменной z_2 при фиксированном значении $R_1 e^{iu}$:

$$f(R_1e^{iu},z_2)=\sum_{j=0}^{r_2-1}\widetilde{c}_j(f,R_1e^{iu})z_2^j+\frac{z_2^{r_2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(0,r_2)}(R_1e^{-iu},z_2e^{iv})\mathcal{K}_{r_2}(v)dv\ , \quad (16)$$

где

$$\widetilde{c}_j(f,R_1e^{iu}):=\frac{R_2^{-j}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(R_1e^{iu},R_2e^{iv})e^{-ijv}dv,\quad 0<R_2<1, \quad (17)$$

а функция $\mathcal{K}_{r_2}$ определяется по аналогии с выражением (15). Представим функцию $f^{(r_1,0)}(z_1e^{-iu},z_2)$, $(z_1,z_2)\in U^2$, как функцию от переменной z_2 при фиксированном значении z_1e^{-iu} следующим образом:

$$f^{(r_1,0)}(z_1e^{-iu},z_2)=\sum_{j=0}^{r_2-1}c_j^*(f^{(r_1,0)},z_1e^{-iu})z_2^j+$$

$$+\frac{z_2^{r_2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(r_1,r_2)}(z_1e^{-iu},z_2e^{-iv})\mathcal{K}_{r_2}(v)dv\ , \quad (18)$$

где

$$c_j^*(f^{(r_1,0)},z_1e^{-iu}):=\frac{R_2^{-j}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(r_1,0)}(z_1e^{-iu},R_2e^{iv})e^{-ijv}dv,\quad 0<R_2<1. \quad (19)$$

Используя соотношения (13), (14) и (16)–(19), записываем

$$f(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{r_1-1}\sum_{j=0}^{r_2-1}c_{kj}(f)z_1^kz_2^j+\frac{z_1^{r_1}}{2\pi^2}\sum_{j=0}^{r_2-1}\left(\frac{z_2}{R_2}\right)^jF_j(f^{(r_1,0)};z_1)+$$

$$+\frac{z_2^{r_2}}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{r_1-1}\left(\frac{z_1}{R_1}\right)^k\widetilde{F}_k(f^{(0,r_2)};z_2)+\frac{z_1^{r_1}z_2^{r_2}}{\pi^2}F(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2)\ , \quad (20)$$

где

$$c_{kj}(f):=\frac{R_1^{-k}R_2^{-j}}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(R_1e^{iu},R_2e^{iv})e^{-iku}e^{-ijv}dudv\ ,$$

$$F_j(f^{(r_1,0)};z_1):=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(r_1,0)}(z_1e^{-iu},R_2e^{iv})e^{-ijv}\mathcal{K}_{r_1}(u)dudv\ , \quad (21)$$

$$\widetilde{F}_k(f^{(0,r_2)};z_2):=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(0,r_2)}(R_1e^{iu},z_2e^{-iv})e^{-iku}\mathcal{K}_{r_2}(v)dudv\ , \quad (22)$$

$$F(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2):=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(r_1,r_2)}(z_1e^{-iu},z_2e^{-iv})\mathcal{K}_{r_1}(u)\mathcal{K}_{r_2}(v)dudv\ . \quad (23)$$

Покажем, что функция $f \in H_{q,2}^{r_1,r_2}$, представленная в виде равенства (20), принадлежит пространству Харди $H_{q,2}$. Для этого убедимся в том, что величина $M_q(f;\rho_1,\rho_2)$ является ограниченной сверху при $\rho_j \to 1-0$, $j=1,2$. Используя определение множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, формулы (15), (21) и обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$M_q(z_1^{r_1} z_2^j F_j(f^{(r_1,0)};z_1);\rho_1,\rho_2) = \rho_1^{r_1}\rho_2^j \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| F_j\left(f^{(r_1,0)}, \rho_1 e^{i\tau_1}\right)\right|^q d\tau_1 \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| f^{(r_1,0)}(\rho_1 e^{i(\tau_1-u)}, R_2 e^{iv})\right| \mathcal{K}_{r_1}(u)\,du\,dv \right)^q d\tau_1 \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_{r_1}(u) \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| f^{(r_1,0)}(\rho_1 e^{i(\tau_1-u)}, R_2 e^{iv})\right|^q d\tau_1 \right)^{1/q} du\,dv =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha_{r_1,r_1}} \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| f^{(r_1,0)}(\rho_1 e^{it}, R_2 e^{iv})\right|^q dt \right)^{1/q} dv.$$

Применяя к правой части данного соотношения неравенство Гельдера, получаем

$$M_q(z_1^{r_1} z_2^j F_j(f^{(r_1,0)};z_1);\rho_1,\rho_2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\alpha_{r_1,r_1}} (2\pi)^{1/q'} \left\{ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| f^{(r_1,0)}(\rho_1 e^{it}, R_2 e^{iv})\right|^q dt\,dv \right\}^{1/q} \leqslant c_1 \|f^{(r_1,0)}\|_{q,2}\,, \quad (24)$$

где $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, $j = \overline{0, r_2-1}$, c_1 — абсолютная константа.

Используя определение множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, формулы (15), (22), а также обобщенное неравенство Минковского и неравенство Гельдера, аналогичным образом получаем

$$M_q(z_1^k z_2^{r_2} \widetilde{F}_k(f^{(0,r_2)};z_2);\rho_1,\rho_2) \leqslant c_2 \|f^{(0,r_2)}\|_{q,2}\,, \quad (25)$$

где c_2 — абсолютная константа. На основании аналогичных соображений и формулы (23) имеем

$$M_q(z_1^{r_1} z_2^{r_2} F(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2);\rho_1,\rho_2) =$$

$$= \rho_1^{r_1}\rho_2^{r_2} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| F\left(f^{(r_1,r_2)}; \rho_1 e^{i\tau_1}, \rho_2 e^{i\tau_2}\right)\right|^q d\tau_1 d\tau_2 \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| f^{(r_1,r_2)}(\rho_1 e^{i(\tau_1-u)}, \rho_2 e^{i(\tau_2-v)})\right| \mathcal{K}_{r_1}(u)\mathcal{K}_{r_2}(v)\,du\,dv \right)^q d\tau_1 d\tau_2 \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_{r_1}(u)\mathcal{K}_{r_2}(v)\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f^{(r_1,r_2)}(\rho_1 e^{i(\tau_1-u)},\rho_2 e^{i(\tau_2-v)})\right|^q d\tau_1 d\tau_2\right)^{1/q} dudv \leqslant$$

$$\leqslant c_3\|f^{(r_1,r_2)}\|_{q,2}\ , \tag{26}$$

где c_3 — абсолютная константа. Используя соотношение (20) и неравенства (24)–(26), получаем

$$\|f\|_{q,2} = \lim_{\substack{\rho_j\to 1-0\\ j=1,2}} M_q(f;\rho_1,\rho_2) < \infty\,,$$

т. е. функция f, принадлежащая множеству $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, является элементом пространства Харди $H_{q,2}$.

Лемма 1 доказана.

***Замечание* 1.** Из определения множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, вложения $H_{q,2}\subset H_{p,2}$, где $1\leqslant p\leqslant q<\infty$, в силу леммы 1 имеем $H_{q,2}^{r_1,r_2}\subset H_{p,2}^{r_1,r_2}$.

4. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $r_1,r_2\in\mathbb{N}$; $1\leqslant k_j\leqslant r_j$, $j=1,2,$ — *натуральные числа*; $1\leqslant p\leqslant 2\leqslant s,t,u,v\leqslant q$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{q,2}^{r_1,r_2}$, *у которой коэффициенты Тейлора*

$$c_{\nu,r_2-k_2}(f)=\ldots=c_{\nu,r_2-1}(f)=0,$$

$$c_{r_1-k_1,\mu}(f)=\ldots=c_{r_1-1,\mu}(f)=0,$$

где $\nu=r_1-k_1,r_1-k_1+1,\ldots,\ \mu=r_2-k_2,r_2-k_2+1,\ldots,$ *выполняется неравенство*

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{p,2}\leqslant \frac{\alpha_{r_1,r_1-k_1}}{\alpha_{r_1,r_1}^{1-k_1/r_1}}\frac{\alpha_{r_2,r_2-k_2}}{\alpha_{r_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\left\|f\right\|_{s,2}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\left\|f^{(r_1,0)}\right\|_{t,2}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$

$$\times\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_{u,2}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{v,2}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \tag{27}$$

Неравенство (27) *является точным в том смысле, что на множестве* $H_{q,2}^{r_1,r_2}$ *существует функция, обращающая* (27) *в равенство.*

Доказательство. Из замечания 1 следует, что функция f, удовлетворяющая условиям теоремы 2, принадлежит также множеству $H_{p,2}^{r_1,r_2}$, где $1\leqslant p\leqslant 2$. При $r_1=k_1$, $r_2=k_2$ неравенство (27) очевидно. Если же $r_1=k_1$ и $1\leqslant k_2\leqslant r_2-1$ или $r_2=k_2$ и $1\leqslant k_1\leqslant r_1-1$, то доказательство неравенства (27) повторяет ход рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1. Поэтому всюду далее полагаем, что натуральные числа k_1 и k_2 удовлетворяют неравенствам $1\leqslant k_j\leqslant$ $\leqslant r_j-1$, $j=1,2$. Пусть

$$f(z_1,z_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}$$

— произвольная функция из множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, удовлетворяющая условиям данной теоремы относительно коэффициентов Тейлора $c_{j_1,j_2}(f)$. Для функции f, ее частных производных порядка r_1 по переменной z_1 и порядка r_2 по переменной z_2

$$f^{(r_1,0)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1}z_2^{j_2}\ ,$$

$$f^{(0,r_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2-r_2}\ ,$$

а также смешанных производных

$$f^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1}z_2^{j_2-r_2}\ ,$$

$$f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1+k_1}z_2^{j_2-r_2+k_2}$$

в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f\|_{2,2}^2=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}|c_{j_1,j_2}(f)|^2, \tag{28}$$

$$\begin{cases}\left\|f^{(r_1,0)}\right\|_{2,2}^2=\sum\limits_{j_1=r_1}^{\infty}\sum\limits_{j_2=0}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2;\\[2ex] \left\|f^{(0,r_2)}\right\|_{2,2}^2=\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}\sum\limits_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2;\\[2ex] \left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{2,2}^2=\sum\limits_{j_1=r_1}^{\infty}\sum\limits_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2,\end{cases} \tag{29}$$

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{2,2}^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}^2\alpha_{j_2,r_2-k_2}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2\ . \tag{30}$$

Из условий теоремы 2, налагаемых на коэффициенты Тейлора функции f, а также из формул (29), (30) следует, что функция f принадлежит $H_{2,2}^{r_1-k_1,r_2-k_2}$, а значит, в силу замечания 1, f принадлежит множеству $H_{p,2}^{r_1-k_1,r_2-k_2}$ при $1\leqslant p<2$. Используя формулу (30) и условия теоремы 2, записываем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{2,2}^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left(\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}|c_{j_1,j_2}(f)|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$

$$\times\left(\alpha_{j_1,r_1}|c_{j_1,j_2}(f)|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left(\alpha_{j_2,r_2}|c_{j_1,j_2}(f)|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}|c_{j_1,j_2}(f)|^{k_1k_2/(r_1r_2)}}{\alpha_{j_1,r_1}^{1-k_1/r_1}\alpha_{j_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right)^2.$$

Из данного равенства получаем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{2,2}^2 \leqslant \left\{\sup_{j_1\geqslant r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{\alpha_{j_1,r_1}^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\geqslant r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{\alpha_{j_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$

$$\times\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}(\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}|c_{j_1,j_2}(f)|)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$

$$\times\big(\alpha_{j_1,r_1}|c_{j_1,j_2}(f)|\big)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\big(\alpha_{j_2,r_2}|c_{j_1,j_2}(f)|\big)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\big|c_{j_1,j_2}(f)\big|^{2k_1k_2/(r_1r_2)}. \tag{31}$$

Установим неравенство, необходимое для дальнейших рассуждений.

Пусть a, b, c, d — положительные числа такие, что $a+b+c+d=1$; μ_j, β_j, γ_j, δ_j, $j\in\mathbb{N}$, — неотрицательные числа. Согласно [13, с. 36] справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j^a\,\beta_j^b\,\gamma_j^c\,\delta_j^d\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j\right)^a\left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\right)^b\left(\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\right)^c\left(\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j\right)^d.$$

Покажем, что имеет место двумерный аналог данного неравенства. Пусть числа μ_{j_1,j_2}, β_{j_1,j_2}, γ_{j_1,j_2}, δ_{j_1,j_2}, где $j_1,j_2\in\mathbb{N}$, являются неотрицательными, а числа a,b,c,d удовлетворяют сформулированным выше условиям. Рассмотрим двойную сумму

$$\sum\nolimits^{*}:=\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2}^a\beta_{j_1,j_2}^b\gamma_{j_1,j_2}^c\delta_{j_1,j_2}^d.$$

Применяя к внутренней сумме по индексу суммирования j_2 последнее неравенство, имеем

$$\sum\nolimits^{*}\leqslant\sum_{j_1=1}^{\infty}\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2}\right)^a\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\beta_{j_1,j_2}\right)^b\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\gamma_{j_1,j_2}\right)^c\left(\sum_{j_2=1}^{\infty}\delta_{j_1,j_2}\right)^d.$$

Полагая

$$A_{j_1}:=\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2},\quad B_{j_1}:=\sum_{j_2=1}^{\infty}\beta_{j_1,j_2},\quad \Gamma_{j_1}:=\sum_{j_2=1}^{\infty}\gamma_{j_1,j_2},\quad D_{j_1}:=\sum_{j_2=1}^{\infty}\delta_{j_1,j_2},$$

записываем

$$\sum\nolimits^{*}\leqslant\sum_{j_1=1}^{\infty}A_{j_1}^aB_{j_1}^b\Gamma_{j_1}^cD_{j_1}^d.$$

На основе аналогичных рассуждений получаем

$$\sum\nolimits^{*}\leqslant\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}A_{j_1}\right)^a\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}B_{j_1}\right)^b\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\Gamma_{j_1}\right)^c\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}D_{j_1}\right)^d.$$

С учетом введенных обозначений отсюда имеем

$$\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2}^{a}\beta_{j_1,j_2}^{b}\gamma_{j_1,j_2}^{c}\delta_{j_1,j_2}^{d}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\mu_{j_1,j_2}\right)^{a}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\beta_{j_1,j_2}\right)^{b}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\gamma_{j_1,j_2}\right)^{c}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{\infty}\delta_{j_1,j_2}\right)^{d}. \tag{32}$$

Применим к правой части соотношения (31) неравенство (32), где $a := (1 - k_1/r_1)(1-k_2/r_2)$, $b := (1-k_1/r_1)k_2/r_2$, $c := (1-k_2/r_2)k_1/r_1$, $d := k_1k_2/(r_1r_2)$. При этом полагаем $\mu_{j_1,j_2} := (\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}|c_{j_1,j_2}(f)|)^2$, $\beta_{j_1,j_2} := (\alpha_{j_1,r_1}|c_{j_1,j_2}(f)|)^2$, $\gamma_{j_1,j_2} := (\alpha_{j_2,r_2}|c_{j_1,j_2}(f)|)^2$, $\delta_{j_1,j_2} := |c_{j_1,j_2}(f)|^2$, $j_1 = r_1, r_1+1,\ldots$, $j_2 = r_2, r_2 + 1,\ldots$, и считаем, что $\mu_{j_1,j_2} = \beta_{j_1,j_2} = \gamma_{j_1,j_2} = \delta_{j_1,j_2} := 0$, если $j_1 = \overline{1, r_1-1}$. $j_2 = 1,2,\ldots$ или $j_1 = r_1, r_1+1,\ldots$, $j_2 = \overline{1, r_2-1}$. Используя равенство (8) и формулы (28)–(30), из (32) с учетом введенных обозначений находим

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{2,2}^{2}\leqslant\left\{\sup_{j_1\geqslant r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{\alpha_{j_1,r_1}^{1-k_1/r_1}}\right\}^{2}\left\{\sup_{j_2\geqslant r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{\alpha_{j_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right\}^{2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^{2}\alpha_{j_2,r_2}^{2}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^{2}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}^{2}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_{r_1,r_1-k_1}^{2}}{\alpha_{r_1,r_1}^{2(1-k_1/r_1)}}\frac{\alpha_{r_2,r_2-k_2}^{2}}{\alpha_{r_2,r_2}^{2(1-k_2/r_2)}}\|f\|_{2,2}^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\times$$

$$\times\left\|f^{(r_1,0)}\right\|_{2,2}^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_{2,2}^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{2,2}^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \tag{33}$$

Используя замечание 1, из формулы (33) получаем требуемое неравенство (27). Покажем его неулучшаемость. Для этого рассмотрим функцию $f_1(z_1,z_2) := z_1^{r_1}z_2^{r_2}$, которая принадлежит множеству $H_{q,2}^{r_1,r_2}$. Путем непосредственных вычислений убеждаемся в том, что

$$\left\|f_1^{(r_1,r_2)}\right\|_{v,2}=\alpha_{r_1,r_1}\alpha_{r_2,r_2},\quad \left\|f_1^{(0,r_2)}\right\|_{u,2}=\alpha_{r_2,r_2},$$

$$\left\|f_1^{(r_1,0)}\right\|_{t,2}=\alpha_{r_1,r_1}, \quad \left\|f_1\right\|_{s,2}=1, \quad \left\|f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_{p,2}=\alpha_{r_1,r_1-k_1}\alpha_{r_2,r_2-k_2}.$$

После подстановки полученных величин в (27) это неравенство обращается в равенство, т. е. оказывается точным в указанном ранее смысле.

Теорема 2 доказана.

5. Рассмотрим некоторые приложения результатов, полученных в пунктах 2 и 4, к задачам теории аппроксимации аналитических функций одной и двух комплексных переменных. Вначале остановимся на одномерном случае.

Символом $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначим подпространство алгебраических полиномов комплексного переменного z степени, не превышающей n. Для функции $f \in H_q$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, символом $E_{n-1}(f)_q$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим величину ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства H_q, т. е.

$$E_{n-1}(f)_q := \inf\left\{\|f-P_{n-1}\|_q \colon P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}.$$

Полином $P^*_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$, для которого выполняется равенство $E_{n-1}(f)_q := \|f - P^*_{n-1}\|_q$, называют полиномом наилучшего приближения функции $f \in H_q$. В случае $q = 2$ полином P^*_{n-1} совпадает с полиномом $T_{n-1}(f,z) := \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)z^k$, являющимся частной суммой $(n-1)$-го порядка ряда Тейлора функции $f \in H_2$, т. е.

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2\ . \tag{34}$$

Теорема 3. *Пусть $r \in \mathbb{N}$; $1 \leqslant k \leqslant r$ — натуральное число; $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant s,t \leqslant q$. Тогда для произвольной функции $f \in H_q^r$ и любого натурального числа $n > r$ выполняется неравенство*

$$E_{n-r+k-1}(f^{(r-k)})_p \leqslant \frac{\alpha_{n,r-k}}{\alpha_{n,r}^{1-k/r}}\left(E_{n-1}(f)_s\right)^{k/r}\left(E_{n-r-1}(f^{(r)})_t\right)^{1-k/r}, \tag{35}$$

где $f^{(0)} \equiv f$, которое является точным в указанном ранее смысле.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f)z^j,$$

принадлежащую множеству H_q^r, и обозначим

$$e_n(f,z) := f(z) - T_{n-1}(f,z) = \sum_{j=n}^{\infty} c_j(f)z^j\ . \tag{36}$$

Очевидно, что $e_n(f) \in H_q^r$. Поскольку рассматриваемая функция f также принадлежит пространству Харди H_2, из равенств (34) и (36) имеем

$$E_{n-1}(f)_2 = \|e_n(f)\|_2\ . \tag{37}$$

Пусть $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$ — целое неотрицательное число. Путем непосредственного вычисления производных ν-го порядка можно убедиться в справедливости равенства

$$T_{n-1}^{(\nu)}(f,z) = T_{n-\nu-1}(f^{(\nu)},z)\ , \tag{38}$$

где $T_{n-1}^{(0)}(f,z) \equiv T_{n-1}(f,z)$. В силу равенств (36) и (38) для $n > r \geqslant k \geqslant 1$ получаем

$$e_n^{(r-k)}(f,z) = \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{j,r-k} c_j(f) z^{j-r+k} =$$

$$= f^{(r-k)}(z) - T_{n-r+k-1}(f^{(r-k)},z) = e_{n-r+k}(f^{(r-k)},z), \tag{39}$$

$$e_n^{(r)}(f,z) = \sum_{j=n}^{\infty} \alpha_{j,r} c_j(f) z^{j-r} = f^{(r)}(z) - T_{n-r-1}(f^{(r)},z) = e_{n-r}(f^{(r)},z)\,. \tag{40}$$

Учитывая равенство (37), из формул (39), (40) имеем

$$\left\| e_n^{(r-k)}(f) \right\|_2 = E_{n-r+k-1}(f^{(r-k)})_2, \tag{41}$$

$$\left\| e_n^{(r)}(f) \right\|_2 = E_{n-r-1}(f^{(r)})_2. \tag{42}$$

Применяя теорему 1 при $p = s = t = 2$ к функции $e_n(f)$, с учетом формул (37) и (41), (42) получаем

$$E_{n-r+k-1}(f^{(r-k)})_2 \leqslant \frac{\alpha_{n,r-k}}{\alpha_{n,r}^{1-k/r}} \left(E_{n-1}(f)_2\right)^{k/r} \Big(E_{n-r-1}(f^{(r)})_2\Big)^{1-k/r}\,. \tag{43}$$

Из определения величины наилучшего полиномиального приближения функции $f \in H_q$ при $1 \leqslant p \leqslant q$ имеем

$$E_{n-1}(f)_p \leqslant E_{n-1}(f)_q\,. \tag{44}$$

Учитывая соотношение $H_q^r \subset H_p^{r-k}$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, и используя (44), из формулы (43) получаем требуемое неравенство (35). Покажем его неулучшаемость в указанном ранее смысле. Для этого рассмотрим функцию $f_2(z) := z^n$, $n > r$, которая принадлежит множеству H_q^r. Очевидно, что $f_2^{(r-k)}(z) = \alpha_{n,r-k} z^{n-r+k}$ и $f_2^{(r)}(z) = \alpha_{n,r} z^{n-r}$. Вычисляя точные значения величин наилучших полиномиальных приближений указанных функций (см., например, [14, с. 66]), имеем $E_{n-1}(f_2)_s = 1$, $E_{n-r-1}(f_2^{(r)})_t = \alpha_{n,r}$, $E_{n-r+k-1}(f_2^{(r-k)})_p = \alpha_{n,r-k}$.

Подставляя полученные величины наилучших полиномиальных приближений в неравенство (35), убеждаемся в том, что оно обращается в равенство, т. е. является неулучшаемым в указанном ранее смысле.

Теорема 3 доказана.

Через W_q^r обозначим класс, состоящий из функций $f \in H_q^r$, для которых $\|f^{(r)}\|_q \leqslant 1$. Наилучшее приближение класса W_q^r подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства Харди H_p обозначим через $E_{n-1}(W_q^r)_p := \sup\{E_{n-1}(f)_p \colon f \in \in W_q^r\}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. В работе [9] К. И. Бабенко доказал следующий результат:

$$E_{n-1}(W_\infty^r) = \frac{1}{\alpha_{n,r}},$$

где $n > r$, который позднее нашел свое развитие в работе Л. В. Тайкова [15], а именно, из полученной им теоремы 1 следует равенство

$$E_{n-1}(W_q^r)_p = \frac{1}{\alpha_{n,r}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant q. \tag{45}$$

Рассмотрим величину $\sup\{E_{n-r+k-1}(f^{(r-k)})_p : f \in W_q^r\}$, $n > r \geqslant k \geqslant 1$. В частности, при $r = k$ и $1 \leqslant p \leqslant q$ данная экстремальная характеристика совпадает с величиной $E_{n-1}(W_q^r)_p$ и ее можно рассматривать как дальнейшее распространение результата (45) на случай вычисления точных значений наилучших полиномиальных приближений промежуточных производных $f^{(r-k)}$ на классе W_q^r в метрике пространства Харди H_p. Следующая теорема касается вычисления указанной характеристики для случая $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$.

Теорема 4. *Пусть натуральные числа n, r, k удовлетворяют соотношению $n > r \geqslant k \geqslant 1$ и $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{E_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}\right)_p : f \in W_q^r\right\} = \frac{1}{(n-r+k)\dots(n-r+1)}. \tag{46}$$

Доказательство. Рассмотрим следующее неравенство для функций из множества H_q^r, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ (см., например, [16, c. 287]):

$$E_{n-1}(f)_q \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_q \, . \tag{47}$$

Используя неравенство Гельдера, нетрудно убедиться в справедливости вложения $W_q^r \subset W_s^r$ при $2 \leqslant s \leqslant q$. Учитывая неравенства (44), где $p := s$, и (47), для $f \in W_q^r$ записываем

$$E_{n-1}(f)_s \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}} \big\|f^{(r)}\big\|_q \leqslant \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{48}$$

Для функции $f \in W_q^r$ при $2 \leqslant t \leqslant q$ на основании неравенства (44), где $p := t$, имеем

$$E_{n-r-1}\left(f^{(r)}\right)_t \leqslant E_{n-r-1}\left(f^{(r)}\right)_q \leqslant \big\|f^{(r)}\big\|_q \leqslant 1. \tag{49}$$

Тогда для произвольной функции $f \in W_q^r$ с учетом формул (48), (49) и соотношения $H_q^r \subset H_p^{r-k}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q$, из теоремы 3 получаем оценку сверху

$$E_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}\right)_p \leqslant \frac{\alpha_{n,r-k}}{\alpha_{n,r}}.$$

Следовательно,

$$\sup\left\{E_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}\right)_p : f \in W_q^r\right\} \leqslant \frac{1}{(n-r+k)\dots(n-r+1)}. \tag{50}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_3(z) := \dfrac{1}{\alpha_{n,r}} z^n$, которая принадлежит классу W_q^r. Поскольку $f_3^{(r-k)}(z) = \dfrac{\alpha_{n,r-k}}{\alpha_{n,r}} z^{n-r+k}$, то

$$\sup\left\{E_{n-r+k-1}\left(f^{(r-k)}\right)_p : f \in W_q^r\right\} \geqslant E_{n-r+k-1}\left(f_3^{(r-k)}\right)_p =$$

$$= \frac{1}{(n-r+k)\dots(n-r+1)}. \tag{51}$$

Сопоставляя неравенства (50) и (51), получаем требуемое равенство (46).

Теорема 4 доказана.

6. Пусть $(Z_1, \|\cdot\|_{Z_1})$ и $(Z_2, \|\cdot\|_{Z_2})$ — некоторые линейные нормированные пространства аналитических в единичном круге функций одной комплексной переменной z_1 и z_2, а $\mathfrak{N}_N \subset Z_1$ и $\mathfrak{M}_M \subset Z_2$ — конечномерные подпространства с базисами

$$\{a_0(z_1), a_1(z_1), \dots, a_N(z_1)\}, \quad \{b_0(z_2), b_1(z_2), \dots, b_M(z_2)\}$$

соответственно. Для упрощения записи всюду далее указанные пространства будем обозначать символами Z_1 и Z_2. Полагаем

$$G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M) := Z_2 \otimes \mathfrak{N}_N \oplus Z_1 \otimes \mathfrak{M}_M, \tag{52}$$

где символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (52) имеют вид

$$g_{N,M}(z_1, z_2) := \sum_{j_1=0}^{N} \varphi_{j_1}(z_2) a_{j_1}(z_1) + \sum_{j_2=0}^{M} \psi_{j_2}(z_1) b_{j_2}(z_2)\ ,$$

где $\{\varphi_{j_1}(z_2)\}_{j_1=0}^N \subset Z_2$, $\{\psi_{j_2}(z_1)\}_{j_2=0}^M \subset Z_1$ — произвольные наборы функций. Всюду далее будем называть их обобщенными квазиполиномами (см., например, [17]).

Пусть Z — линейное нормированное пространство аналитических в единичном бикруге функций двух комплексных переменных, содержащее множество $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$. Для произвольной функции $f \in Z$ обозначим через

$$\mathcal{E}_{N,M}(f)_Z := \inf\{\|f - g_{N,M}\|_Z : g_{N,M} \in G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)\} \tag{53}$$

величину ее наилучшего приближения элементами множества (52). Аппроксимативные характеристики вида (53) в случае приближения вещественных функций нескольких переменных изучались, например, в работах [17 – 20]. Величину (53) называют еще приближением функции „углом” [18].

Далее полагаем $Z := H_{q,2}$, $Z_j := H_q, j = 1, 2$, $\mathfrak{N}_N := \mathcal{P}_N$, $\mathfrak{M}_M := \mathcal{P}_M$. Это означает, что при изучении вопросов, связанных с наилучшим приближением функций элементами множества $G(\mathcal{P}_N, \mathcal{P}_M)$ в пространстве Харди $H_{q,2}$, имеем

$$G(\mathcal{P}_N, \mathcal{P}_M) = \left\{ g_{N,M}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{N} \varphi_{j_1}(z_2) z_1^{j_1} + \sum_{j_2=0}^{M} \psi_{j_2}(z_1) z_2^{j_2} : \right.$$

$$\left. \varphi_{j_1}(z_2) \in H_q, j_1 = \overline{0, N};\ \ \psi_{j_2}(z_1) \in H_q, j_2 = \overline{0, M} \right\}.$$

В этом случае величину $\mathcal{E}_{N,M}(f)_Z$ обозначим символом $\mathcal{E}_{N,M}(f)_q$, а функции $g_{N,M}$ будем называть квазиполиномами. Под квазиполиномом Тейлора порядка $\{n_1 - 1, n_2 - 1\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, для аналитической в U^2 функции $f(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2}$ понимаем выражение

$$T_{n_1-1,n_2-1}(f;z_1,z_2):=\sum_{j_1=0}^{n_1-1}\sum_{j_2=0}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}+$$

$$+\sum_{j_2=0}^{n_2-1}\sum_{j_1=0}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}-\sum_{j_1=0}^{n_1-1}\sum_{j_2=0}^{n_2-1}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}\ . \tag{54}$$

Очевидно, что $T_{n_1-1,n_2-1}(f)\in G(\mathcal{P}_{n_1-1},\mathcal{P}_{n_2-1})$. В работе [21, с. 17] было показано, что среди всех квазиполиномов вида

$$g_{n_1-1,n_2-1}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=0}^{n_1-1}\varphi_{j_1}(z_2)z_1^{j_1}+\sum_{j_2=0}^{n_2-1}\psi_{j_2}(z_1)z_2^{j_2}\ , \tag{55}$$

принадлежащих множеству $G(\mathcal{P}_{n_1-1},\mathcal{P}_{n_2-1})\subset H_{2,2}$, наилучшее приближение функции $f\in H_{2,2}$ доставляет ее квазиполином Тейлора (54), т. е.

$$\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f)_2=\left\|f-T_{n_1-1,n_2-1}(f)\right\|_{2,2}=\sum_{j_1=n_1}^{\infty}\sum_{j_2=n_2}^{\infty}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2. \tag{56}$$

Теорема 5. *Пусть* $n_j>r_j\geqslant k_j\geqslant 1$, $j=1,2,$ — *натуральные числа;* $1\leqslant p\leqslant 2\leqslant s,t,u,v\leqslant q<\infty$. *Тогда для любой функции* $f\in H_{q,2}^{r_1,r_2}$ *выполняется неравенство*

$$\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\big(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\big)_p\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_{n_1,r_1-k_1}\alpha_{n_2,r_2-k_2}}{\alpha_{n_1,r_1}^{1-k_1/r_1}\alpha_{n_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\left(\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f)_s\right)^{k_1k_2/(r_1r_2)}\times$$

$$\times\Big(\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-1}\big(f^{(r_1,0)}\big)_t\Big)^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\Big(\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-r_2-1}\big(f^{(0,r_2)}\big)_u\Big)^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\Big(\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-r_2-1}\big(f^{(r_1,r_2)}\big)_v\Big)^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\ , \tag{57}$$

которое является точным в указанном ранее смысле.

Доказательство. Для произвольной функции

$$f(z_1,z_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2},$$

принадлежащей множеству $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, полагаем

$$e_{n_1,n_2}(f;z_1,z_2):=f(z_1,z_2)-T_{n_1-1,n_2-1}(f;z_1,z_2)=\sum_{j_1=n_1}^{\infty}\sum_{j_2=n_2}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}. \tag{58}$$

Как следует из замечания 1 и ряда рассуждений из доказательства теоремы 2, при выполнении условий теоремы 5 функция $f\in H_{q,2}^{r_1,r_2}$ также принадлежит множеству $H_{2,2}^{r_1-k_1,r_2-k_2}$. В силу соотношения (58) это означает, что данному множеству принадлежит и функция $e_{n_1,n_2}(f)$. Непосредственным образом можно убедиться в справедливости равенств

$$T^{(\nu_1,0)}_{n_1-1,n_2-1}(f;z_1,z_2)=T_{n_1-\nu_1-1,n_2-1}(f^{(\nu_1,0)};z_1,z_2),$$
$$T^{(0,\nu_2)}_{n_1-1,n_2-1}(f;z_1,z_2)=T_{n_1-1,n_2-\nu_2-1}(f^{(0,\nu_2)};z_1,z_2), \tag{59}$$
$$T^{(\nu_1,\nu_2)}_{n_1-1,n_2-1}(f;z_1,z_2)=T_{n_1-\nu_1-1,n_2-\nu_2-1}(f^{(\nu_1,\nu_2)};z_1,z_2),$$

где $f^{(0,0)}\equiv f$; $0\leqslant\nu_j\leqslant n_j-1$, $j=1,2$, — неотрицательные целые числа и $T^{(0,0)}_{n_1-1,n_2-1}(f):=T_{n_1-1,n_2-1}(f)$. Из соотношений (58), (59) при $n_j>r_j\geqslant k_j\geqslant 1$, $j=1,2$, получаем равенства

$$e^{(r_1,0)}_{n_1,n_2}(f;z_1,z_2)=\sum_{j_1=n_1}^{\infty}\sum_{j_2=n_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1}z_2^{j_2}=$$
$$=f^{(r_1,0)}(z_1,z_2)-T_{n_1-r_1-1,n_2-1}(f^{(r_1,0)};z_1,z_2)=e_{n_1-r_1,n_2}(f^{(r_1,0)};z_1,z_2), \tag{60}$$

$$e^{(0,r_2)}_{n_1,n_2}(f;z_1,z_2)=\sum_{j_1=n_1}^{\infty}\sum_{j_2=n_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2-r_2}=$$
$$=f^{(0,r_2)}(z_1,z_2)-T_{n_1-1,n_2-r_2-1}(f^{(0,r_2)};z_1,z_2)=e_{n_1,n_2-r_2}(f^{(0,r_2)};z_1,z_2), \tag{61}$$

$$e^{(r_1,r_2)}_{n_1,n_2}(f;z_1,z_2)=\sum_{j_1=n_1}^{\infty}\sum_{j_2=n_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1}z_2^{j_2-r_2}=$$
$$=f^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2)-T_{n_1-r_1-1,n_2-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2)=$$
$$=e_{n_1-r_1,n_2-r_2}(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2), \tag{62}$$

$$e^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}_{n_1,n_2}(f;z_1,z_2)=$$
$$=\sum_{j_1=n_1}^{\infty}\sum_{j_2=n_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1+k_1}z_2^{j_2-r_2+k_2}=$$
$$=f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2)-T_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)};z_1,z_2)=$$
$$=e_{n_1-r_1+k_1,n_2-r_2+k_2}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)};z_1,z_2). \tag{63}$$

Используя равенство (56), из формул (58) и (60) – (63) имеем

$$\left\|e_{n_1,n_2}(f)\right\|_{2,2}=\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f)_2\ ,$$

$$\left\|e_{n_1,n_2}^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(f)\right\|_{2,2}=\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right)_2\ ,$$

$$\left\|e_{n_1,n_2}^{(r_1,0)}(f)\right\|_{2,2}=\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-1}\left(f^{(r_1,0)}\right)_2\ , \tag{64}$$

$$\left\|e_{n_1,n_2}^{(0,r_2)}(f)\right\|_{2,2}=\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-r_2-1}\left(f^{(0,r_2)}\right)_2\ ,$$

$$\left\|e_{n_1,n_2}^{(r_1,r_2)}(f)\right\|_{2,2}=\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-r_2-1}\left(f^{(r_1,r_2)}\right)_2.$$

Применяя теорему 2 к функции $e_{n_1,n_2}(f)$ в случае $p=s=t=u=v=2$, в силу соотношений (27) и (64) получаем

$$\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})_2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha_{n_1,r_1-k_1}\alpha_{n_2,r_2-k_2}}{\alpha_{n_1,r_1}^{1-k_1/r_1}\alpha_{n_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\left(\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f)_2\right)^{k_1k_2/(r_1r_2)}\times$$

$$\times\left(\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-1}(f^{(r_1,0)})_2\right)^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left(\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-r_2-1}(f^{(0,r_2)})_2\right)^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left(\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-r_2-1}(f^{(r_1,r_2)})_2\right)^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \tag{65}$$

Для произвольной функции $h\in H_{q,2}$ при $1\leqslant p\leqslant 2\leqslant w\leqslant q$ из соотношения $H_{q,2}\subset H_{w,2}\subset H_{p,2}$ и неравенства Гельдера имеем

$$\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(h)_p=$$

$$=\inf\{\|h-g_{n_1-1,n_2-1}\|_{p,2}\colon g_{n_1-1,n_2-1}\in G(\mathcal{P}_{n_1-1},\mathcal{P}_{n_2-1})\subset H_{p,2}\}\leqslant$$

$$\leqslant\inf\{\|h-g_{n_1-1,n_2-1}\|_{w,2}\colon g_{n_1-1,n_2-1}\in G(\mathcal{P}_{n_1-1},\mathcal{P}_{n_2-1})\subset H_{w,2}\}=$$

$$=\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(h)_w. \tag{66}$$

Учитывая определение множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, $2\leqslant q<\infty$, принадлежность ему функции f, а также включение $f\in H_{p,2}^{r_1-k_1,r_2-k_2}$, $1\leqslant p\leqslant 2$, и неравенство (66), из (65) получаем соотношение (57).

Покажем неулучшаемость неравенства (57). С этой целью рассмотрим функцию $f_4(z_1,z_2):=z_1^{n_1}z_2^{n_2}$, где $n_j>r_j$, $j=1,2$, которая принадлежит пространству Харди $H_{w,2}$ при любом $w\geqslant 1$. Используя определение величины наилучшего приближения квазиполиномами вида (55), записываем оценку сверху

$$\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f_4)_w\leqslant\|f_4\|_{w,2}=1\ . \tag{67}$$

Установим оценку снизу величины $\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f_4)_w$. В силу представления (55) произвольного элемента $g_{n_1-1,n_2-1}\in G(\mathcal{P}_{n_1-1},\mathcal{P}_{n_2-1})\subset H_{1,2}$ имеем

$$1=\frac{1}{4\pi^2}\left|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(f_4\left(e^{it_1},e^{it_2}\right)-g_{n_1-1,n_2-1}\left(e^{it_1},e^{it_2}\right)\right)e^{-i(n_1t_1+n_2t_2)}dt_1dt_2\right|.$$

Отсюда получаем

$$1 \leqslant \|f_4 - g_{n_1-1,n_2-1}\|_{1,2}. \tag{68}$$

Используя следующее из (53) определение величины $\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(\cdot)_1$ и неравенство (68), записываем $1 \leqslant \mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f_4)_1$. Из последнего неравенства и (66) получаем оценку снизу

$$1 \leqslant \mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f_4)_w. \tag{69}$$

Тогда равенство

$$\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f_4)_w = 1 \tag{70}$$

следует из соотношений (67) и (69).

На основании аналогичных соображений нетрудно показать справедливость равенств

$$\begin{gathered}
\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\big(f_4^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\big)_p = \alpha_{n_1,r_1-k_1}\alpha_{n_2,r_2-k_2}, \\
\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-1}\big(f_4^{(r_1,0)}\big)_t = \alpha_{n_1,r_1}, \\
\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-r_2-1}\big(f_4^{(0,r_2)}\big)_u = \alpha_{n_2,r_2}, \\
\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-r_2-1}\big(f_4^{(r_1,r_2)}\big)_v = \alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}.
\end{gathered} \tag{71}$$

После подстановки соответствующих величин из равенства (70), где $w := s$, и из равенств (71) в формулу (57) получаем требуемое равенство, подтверждающее неулучшаемость соотношения (57) в указанном ранее смысле.

Теорема 5 доказана.

Обозначим через $W_{q,2}^{r_1,r_2}$ класс, содержащий функции из множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, которые удовлетворяют условию $\|f^{(r_1,r_2)}\|_{q,2} \leqslant 1$.

Теорема 6. *Пусть натуральные числа n_j, r_j, k_j; $j = 1,2$, удовлетворяют соотношениям $n_j > r_j \geqslant k_j \geqslant 1$, $j = 1,2$, и $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right)_p : f \in W_{q,2}^{r_1,r_2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(n_1-r_1+k_1)\ldots(n_1-r_1+1)(n_2-r_2+k_2)\ldots(n_2-r_2+1)}. \tag{72}$$

Доказательство. Приведем необходимые сведения из теории аппроксимации функций одной комплексной переменной. Для аналитической в единичном круге функции $\varphi \in H_1^r$ имеет место следующее представление (см., например, [9, 12])

$$\varphi(z) - \Lambda_{n-1,r}(\varphi,z) = \frac{z^r}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}_{n,r}(t)e^{i(n-r)t}\varphi^{(r)}(ze^{-it})dt\ , \tag{73}$$

где $z \in U$, $n > r$,

$$\mathcal{K}_{n,r}(t) := \frac{1}{2\alpha_{n,r}} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\cos(j-n)t}{\alpha_{j,r}},$$

$$\Lambda_{n-1,r}(\varphi, z) := \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,r} c_j(f) z^j \ , \tag{74}$$

$$\lambda_{j,r} := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = 0, \ldots, r-1, \\ 1 - \dfrac{\alpha_{j,r}}{\alpha_{2n-j,r}}, & \text{если} \quad j = r, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Условимся считать, что на функцию $f \in W_{q,2}^{r_1,r_2}$ оператор Λ_{n_1-1,r_1} вида (74) действует как на функцию от переменной z_1 при фиксированном z_2, сопоставляя ей функцию $\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}(f; z_1, z_2)$, а оператор Λ_{n_2-1,r_2} вида (74) на функцию f действует как на функцию от переменной z_2 при фиксированном z_1, сопоставляя ей функцию $\Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}(f; z_1, z_2)$. Оператор $\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1} \Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}$ сопоставляет функции f функцию $\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\left(\Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}(f); z_1, z_2\right)$, которая является результатом последовательного действия на f сначала оператора $\Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}$ по переменной z_2, а затем оператора $\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}$ по переменной z_1. При этом указанные операторы перестановочны, т. е. $\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\left(\Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}(f)\right) = \Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}\left(\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}(f)\right)$.

Рассмотрим в качестве аппарата приближения функции $f \in W_{q,2}^{r_1,r_2}$ функцию

$$\Lambda_{n_1-1,n_2-1}^{r_1,r_2}(f; z_1, z_2) := \Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}(f; z_1, z_2) + \Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}(f; z_1, z_2) -$$

$$-\Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\left(\Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}(f); z_1, z_2\right), \tag{75}$$

которая является элементом множества $G(\mathcal{P}_{n_1-1}, \mathcal{P}_{n_2-1}) \subset H_{q,2}$. Напомним, что в случае функций двух вещественных переменных аппроксимативные свойства аппаратов приближения, которые в определенном смысле подобны (75), изучались, например, в работах [20, 22]. Пусть $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $H_{q,2}$. Воспользовавшись идеей рассуждений из работы [22], в рассматриваемом случае получаем

$$f - \Lambda_{n_1-1,n_2-1}^{r_1,r_2}(f) = \left(\mathbb{I} - \Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\right) f - \Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}\left(\mathbb{I} - \Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\right) f =$$

$$= \left(\mathbb{I} - \Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\right)\left(\mathbb{I} - \Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}\right) f \ . \tag{76}$$

Поскольку в силу формулы (73)

$$\left(\mathbb{I} - \Lambda_{n_1-1,r_1}^{z_1}\right) f(z_1, z_2) = \frac{z_1^{r_1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_{n_1,r_1}(t_1) e^{i(n_1-r_1)t_1} f^{(r_1,0)}(z_1 e^{-it_1}, z_2) dt_1 \ , \tag{77}$$

$$\left(\mathbb{I} - \Lambda_{n_2-1,r_2}^{z_2}\right) f(z_1, z_2) = \frac{z_2^{r_2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{K}_{n_2,r_2}(t_2) e^{i(n_2-r_2)t_2} f^{(0,r_2)}(z_1, z_2 e^{-it_2}) dt_2 \ , \tag{78}$$

то

$$\left(\mathbb{I}-\Lambda^{z_1}_{n_1-1,r_1}\right)\left(\mathbb{I}-\Lambda^{z_2}_{n_2-1,r_2}\right)f(z_1,z_2)=\frac{z_1^{r_1}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}_{n_1,r_1}(t_1)e^{i(n_1-r_1)t_1}\times$$

$$\times\frac{\partial^{r_1}}{\partial z_1^{r_1}}\left(\frac{z_2^{r_2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}_{n_2,r_2}(t_2)e^{i(n_2-r_2)t_2}f^{(0,r_2)}(z_1e^{-it_1},z_2e^{-it_2})dt_2\right)dt_1=$$

$$=\frac{z_1^{r_1}z_2^{r_2}}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}_{n_1,r_1}(t_1)\mathcal{K}_{n_2,r_2}(t_2)e^{i((n_1-r_1)t_1+(n_2-r_2)t_2)}\times$$

$$\times f^{(r_1,r_2)}(z_1e^{-it_1},z_2e^{-it_2})dt_1dt_2. \qquad (79)$$

Используя в рассматриваемом случае определение величины наилучшего приближения квазиполиномами, обобщенное неравенство Минковского и учитывая, что функции $\mathcal{K}_{n_j,r_j}(t_j)$, $j=1,2$, являются неотрицательными и интегрируемыми на отрезке $[0,2\pi]$, для произвольной функции $f\in W^{r_1,r_2}_{q,2}$ при $2\leqslant s\leqslant q$ из (76) и (79) получаем

$$\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-1}(f)_s\leqslant\left\|f-\Lambda^{r_1,r_2}_{n_1-1,n_2-1}(f)\right\|_{s,2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{q,2}\leqslant\frac{1}{\alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}}\,. \qquad (80)$$

Поскольку функции $\Lambda^{z_1}_{n_1-1,r_1}(f)$ и $\Lambda^{z_2}_{n_2-1,r_2}(f)$ принадлежат множеству $G(\mathcal{P}_{n_1-1},\mathcal{P}_{n_2-1})\subset H_{q,2}$, используя соотношения (77), (78), для $2\leqslant t,u\leqslant q$ имеем

$$\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-1}\left(f^{(r_1,0)}\right)_t\leqslant\left\|f^{(r_1,0)}-\Lambda^{z_2}_{n_2-1,r_2}\left(f^{(r_1,0)}\right)\right\|_{t,2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha_{n_2,r_2}}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{q,2}\leqslant\frac{1}{\alpha_{n_2,r_2}}\,, \qquad (81)$$

$$\mathcal{E}_{n_1-1,n_2-r_2-1}\left(f^{(0,r_2)}\right)_u\leqslant\left\|f^{(0,r_2)}-\Lambda^{z_1}_{n_1-1,r_1}\left(f^{(0,r_2)}\right)\right\|_{u,2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha_{n_1,r_1}}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{q,2}\leqslant\frac{1}{\alpha_{n_1,r_1}}\,. \qquad (82)$$

Очевидно, что при $2\leqslant v\leqslant q$

$$\mathcal{E}_{n_1-r_1-1,n_2-r_2-1}\left(f^{(r_1,r_2)}\right)_v\leqslant\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_{q,2}\leqslant 1\,. \qquad (83)$$

Используя неравенство (57) и оценки сверху (80) – (83), получаем следующее неравенство при $1\leqslant p\leqslant 2\leqslant q<\infty$:

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right)_p:f\in W^{r_1,r_2}_{q,2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_{n_1,r_1-k_1}\alpha_{n_2,r_2-k_2}}{\alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}} =$$

$$= \frac{1}{(n_1-r_1+k_1)\ldots(n_1-r_1+1)(n_2-r_2+k_2)\ldots(n_2-r_2+1)}. \tag{84}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (84), рассмотрим функцию

$$f_5(z_1,z_2) := \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{\alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}}, \quad n_j > r_j, \quad j=1,2.$$

Очевидно, что $f_5 \in W_{q,2}^{r_1,r_2}$ и

$$f_5^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2) = \frac{\alpha_{n_1,r_1-k_1}\alpha_{n_2,r_2-k_2}}{\alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}}\, z_1^{n_1-r_1+k_1}\, z_2^{n_2-r_2+k_2}.$$

На основании рассуждений, аналогичных приведенным при получении равенства (70), имеем

$$\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\left(f_5^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right)_p = \frac{\alpha_{n_1,r_1-k_1}\alpha_{n_2,r_2-k_2}}{\alpha_{n_1,r_1}\alpha_{n_2,r_2}}.$$

Тогда

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right)_p : f \in W_{q,2}^{r_1,r_2}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \mathcal{E}_{n_1-r_1+k_1-1,n_2-r_2+k_2-1}\left(f_5^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right)_p =$$

$$= \frac{1}{(n_1-r_1+k_1)\ldots(n_1-r_1+1)(n_2-r_2+k_2)\ldots(n_2-r_2+1)}. \tag{85}$$

Сопоставляя оценку сверху (84) и оценку снизу (85), получаем требуемое равенство (72).

Теорема 6 доказана.

1. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. — 590 с.
2. *Hardy G. H., Landay E., Littlewood J. E.* Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions // Math. Z. – 1935. – **39**. – S. 677 – 695.
3. *Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии / Сб. научн. работ Ин-та математики АН УССР. – Киев: Наук. думка, 1988. – С. 4 – 7.
4. *Вакарчук М. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических в бикруге функций // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики: Тези доп. міжнар. конф. – Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 1993. – С. 35.
5. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О мультипликативных неравенствах типа Харди – Литтльвуда – Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Математика. Вип. 15. – 2010. – **18**, № 6/1. – С. 81 – 87.
6. *Вакарчук М. Б., Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических функций одной и нескольких переменных // Approxim. Theory and Appl. / Abstract Int. Conf. in Memory of N. P. Korneichuk (June 14 – 17, 2010). – Dnepropetrovsk, 2010. – P. 27.
7. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 312 с.
8. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces. – New York and London: Acad. Press, 1970. – 258 p.

9. *Бабенко К. И.* О наилучшем приближении одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – **22**, № 5. – С. 631 – 640.
10. *Бердникова И. В., Рафальсон С. З.* Некоторые неравенства между нормами функции и ее производных в интегральных метриках // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 12. – С. 3 – 6.
11. *Zigmund A.* On the boundary values of functions of several complex variables // Fund. Math. – 1949. – **36**. – P. 207 – 235.
12. *Вакарчук С. Б., Забутная В. И.* О наилучших линейных методах приближения классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$ // Мат. заметки. – 2009. – **85**, № 3. – С. 323 – 329.
13. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
14. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций / Сб. научн. работ Ин-та прикл. математики и механики АН УССР. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 62 – 73.
15. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 155 – 162.
16. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 2. – С. 285 – 295.
17. *Брудный Ю. А.* Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 4. – С. 555 – 583.
18. *Потапов М. К.* Изучение некоторых классов функций при помощи приближения „углом” // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **117**. – С. 256 – 300.
19. *Haufmann W., Jetter K.,* Steinhaus B. Degree of best approximation by trigonometric blending functions // Math. Z. – 1985. – **189**, № 1. – С. 143 – 150.
20. *Gonska H., Jetter K.* Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials // J. Approxim. Theory. – 1986. – **48**, № 4. – P. 396 – 406.
21. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 7. – С. 14 – 25.
22. *Корнейчук Н. П., Переверзев С. В.* К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов // Теория функций и топология / Сб. научн. работ Ин-та математики АН УССР. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 43 – 49.

Получено 17.06.11,
после доработки — 19.11.11