УДК 517.956 + 517.43

Т. А. Мельник, Д. Ю. Садовий (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УСЕРЕДНЕННЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ З РІЗНИМИ НЕЛІНІЙНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ФУР'Є, ЩО ЧЕРГУЮТЬСЯ, В ДВОРІВНЕВОМУ ГУСТОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3 : 2 : 2

We investigate the asymptotic behavior of a solution of a quasilinear parabolic boundary-value problem in a two-level thick junction of the type $3 : 2 : 2$. This junction consists of a cylinder on which thin disks of variable thickness are ε-periodically threaded. The thin disks are divided into two levels, depending on their geometric structure and the conditions imposed on their boundaries. In this problem, we consider different alternating inhomogeneous nonlinear Fourier conditions. Moreover, the Fourier conditions depend on additional perturbation parameters. We prove theorems on the convergence of a solution of this problem as $\varepsilon \to 0$ for different values of these parameters.

Исследуется асимптотическое поведение решения квазилинейной параболической краевой задачи в густом двухуровневом соединении типа $3 : 2 : 2$. Такое соединение состоит из цилиндра, на который ε-периодически нанизаны тонкие диски с переменной толщиной. Тонкие диски разделены на два уровня в зависимости от их геометрической структуры, а также от краевых условий, заданных на их границах. В данной задаче рассматриваются различные неоднородные нелинейные условия Фурье, которые чередуются. Кроме того, условия Фурье зависят от дополнительных параметров возмущения. В зависимости от этих параметров доказаны теоремы сходимости для решения такой задачи при $\varepsilon \to 0$.

1. Вступ. Густе з'єднання типу $m : k : d$ є результатом об'єднання деякої області, яку називають тілом з'єднання, і великої кількості тонких областей, що ε-періодично розміщені вздовж деякого многовиду (зони приєднання) на поверхні тіла з'єднання. Тип з'єднання вказує відповідно на граничні розмірності тіла з'єднання (m), зони приєднання (k) і кожної приєднаної тонкої області (d); ε — малий параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими областями та їхню товщину.

Предметом дослідження крайових задач у густих з'єднаннях є асимптотична поведінка розв'язків таких задач при $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких приєднаних областей необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля.

Першими в цьому напрямку були роботи [1 – 3], в яких доведено теореми збіжності для функції Гріна рівняння Гельмгольца в тілі густого з'єднання. При цьому або робилось припущення про збіжність певних компонент крайової задачі, або використовувалось явне зображення деяких величин, яке є можливим при певних конфігураціях тіла густого з'єднання (півпростір). У роботах [4 – 9] дано класифікацію густих з'єднань, розроблено строгі асимптотичні методи дослідження, які дозволили довести теореми збіжності та побудувати асимптотичні наближення для розв'язків основних крайових задач математичної фізики в густих з'єднаннях різних типів (див. також [10 – 13]).

Як продовження досліджень, в роботах [14 – 17] розглянуто крайові задачі в густих з'єднаннях більш складної конфігурації, а саме, в багаторівневих густих з'єднаннях. Багаторівневе густе з'єднання — це густе з'єднання, в якому тонкі області поділяються на скінченну кількість рівнів в залежності від їхньої геометричної структури, а також від крайових умов, які задаються на їхніх межах. Крім того, тонкі області з кожного рівня ε-періодично чергуються вздовж зони приєднання. Зауважимо, що, згідно з вищезазначеною класифікацією, в даних роботах розглядались лінійні крайові задачі в густих з'єднаннях типу $2 : 1 : 1$ та $3 : 2 : 1$. У роботах [14 – 17] було відмічено нову якісну відмінність в асимптотичній поведінці розв'язків крайових задач у багаторівневих густих з'єднаннях, а саме, ефект „багатофазності” в області, яка одночасно заповнюється тонкими областями з різних рівнів.

У даній роботі розглядається параболічна квазілінійна крайова задача в тривимірному дворівневому густому з'єднанні типу 3 : 2 : 2. Таке густе з'єднання складається з циліндра, на який ε-періодично нанизано тонкі диски зі змінною товщиною. Тонкі диски поділяються на два рівня. В даній задачі на межах тонких дисків з обох рівнів задано різні неоднорідні нелінійні умови Фур'є:

$$\partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon^\alpha \kappa_1(v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon \quad \text{на межах тонких дисків з 1-го рівня},$$

$$\partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon \kappa_2(v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon \quad \text{на межах тонких дисків з 2-го рівня},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 1$ — параметри. Вивчається асимптотична поведінка розв'язку такої крайової задачі та вплив параметрів α і β на асимптотичну поведінку розв'язку при $\varepsilon \to 0$. Зазначимо, що різні лінійні крайові задачі в однорівневих густих з'єднаннях типу 3 : 2 : 2 вивчались у роботах [18, 19].

2. Постановка задачі. Нехай $0 < d_0 < d_2 \leq d_1$ та $0 < b_1 < b_2 < 1$; $h_i : [d_0, d_i] \to (0,1)$ — кусково-гладкі функції, для яких виконуються умови

$$0 < b_1 - \frac{h_1(s)}{2} \quad \forall s \in [d_0, d_1],$$

$$b_2 + \frac{h_2(s)}{2} < 1, \qquad b_1 + \frac{h_1(s)}{2} < b_2 - \frac{h_2(s)}{2} \quad \forall s \in [d_0, d_2].$$

Ці нерівності означають, що інтервали

$$I_i(s) := \left(b_i - \frac{h_i(s)}{2}, b_i + \frac{h_i(s)}{2} \right), \qquad s \in [d_0, d_i], \quad i = 1, 2,$$

містяться в (0,1) та $I_1(s) \cap I_2(s) = \varnothing$ для всіх $s \in [d_0, d_2]$.

Розглянемо густе з'єднання Ω_ε типу 3 : 2 : 2 (див. рисунок), яке складається з циліндра

$$\Omega_0 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \ 0 < x_2 < l, \ \ r := \sqrt{x_1^2 + x_3^2} < d_0 \right\}$$

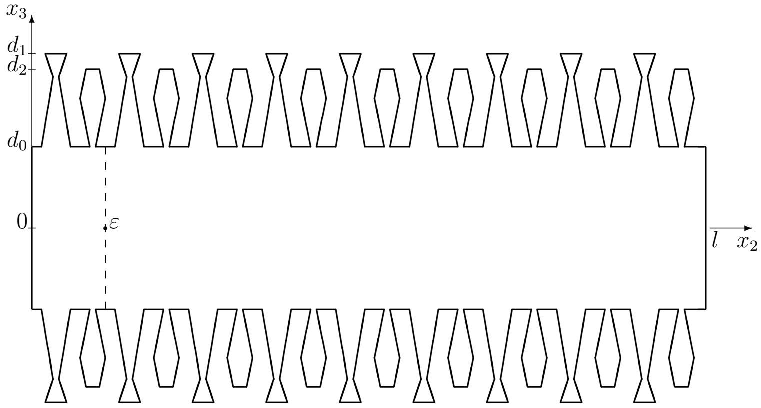
і великої кількості тонких кільцевидних дисків

$$G_j^{(i)}(\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \colon \ |x_2 - \varepsilon(j + b_i)| < \frac{\varepsilon h_i(r)}{2}, \ \ d_0 \leq r < d_i \right\},$$

де $i = 1, 2$, $j = 0, \ldots, N-1$, тобто $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \cup G_\varepsilon$, $G_\varepsilon = G_\varepsilon^{(1)} \cup G_\varepsilon^{(2)}$, $G_\varepsilon^{(i)} = \bigcup_{j=0}^{N-1} G_j^{(i)}(\varepsilon)$. Тут N — велике натуральне число, отже, $\varepsilon = l/N$ — малий параметр, який характеризує відстань між сусідніми тонкими дисками та їхню товщину. Таким чином, кількість тонких дисків дорівнює $2N$, вони поділяються на два рівня $G_\varepsilon^{(1)}$ та $G_\varepsilon^{(2)}$ і диски з кожного рівня ε-періодично чергуються.

Позначимо через $\Upsilon_\varepsilon^{(i)}$ об'єднання зовнішніх поверхонь тонких дисків з i-го рівня, а через $S^\pm$ основи циліндра Ω_0. Введемо також такі позначення:

$$\overline{\Omega}_i := \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}_i, \qquad D_i := \{ x \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x_2 < l, \ d_0 < r < d_i \},$$



Поперечний переріз густого з'єднання Ω_ε типу $3:2:2$

$$Q_i := \overline{\Omega}_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon\ r = d_i\}, \qquad Q_\varepsilon^{(i)} := \partial G_\varepsilon^{(i)} \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon\ r = d_i\},$$

$$Q_0 := \overline{\Omega}_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon\ r = d_0\}, \qquad Q_\varepsilon^{(0)} := \partial \Omega_\varepsilon \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon\ r = d_0\},$$

$$\Theta_\varepsilon^{(i)} := G_\varepsilon^{(i)} \cap \partial\Omega_0, \qquad \Upsilon_\varepsilon := \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \cup \Upsilon_\varepsilon^{(2)}, \quad i = 1, 2.$$

Нехай T — фіксоване додатне число. В густому з'єднанні Ω_ε розглянемо параболічну квазілінійну крайову задачу

$$\begin{aligned}
&\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon + \kappa_0(v_\varepsilon) = f_\varepsilon && \text{в}\ \ \Omega_\varepsilon \times (0,T),\\
&\partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon^\alpha \kappa_1(v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon && \text{на}\ \ \Upsilon_\varepsilon^{(1)} \times (0,T),\\
&\partial_\nu v_\varepsilon + \varepsilon \kappa_2(v_\varepsilon) = \varepsilon^\beta g_\varepsilon && \text{на}\ \ \Upsilon_\varepsilon^{(2)} \times (0,T),\\
&\partial_\nu v_\varepsilon = q_\varepsilon^\pm && \text{на}\ \ S^\pm \times (0,T),\\
&\partial_\nu v_\varepsilon = 0 && \text{на}\ \ Q_\varepsilon^{(0)} \times (0,T),\\
&v_\varepsilon\big|_{t=0} = 0 && \text{в}\ \ \Omega_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ — похідна по зовнішній нормалі, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 1$ — параметри, квадратні дужки позначають стрибок вказаної функції.

Відносно заданих функцій будемо вважати, що виконуються наступні умови:

функції $f_\varepsilon, f_0 \in L^2\big(\Omega_1 \times (0,T)\big)$ та

$$f_\varepsilon \longrightarrow f_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2\big(\Omega_1 \times (0,T)\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

функції $g_\varepsilon, g_0 \in L^2\big(0,T; H^1(D_1)\big)$ та

$$g_\varepsilon \xrightarrow{w} g_0 \quad \text{слабко в} \quad L^2\big(0,T; H^1(D_1)\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

функції $q_\varepsilon^\pm, q_0^\pm \in L^2\big(S^\pm \times (0,T)\big)$ та

$$q_\varepsilon^\pm \xrightarrow{w} q_0^\pm \quad \text{слабко в} \quad L^2\big(S^\pm \times (0,T)\big) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

функції κ_i неперервні за Ліпшицем (що еквівалентно умові $\kappa_i \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R})$) та існують додатні сталі $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ такі, що

$$c_1 \leq \kappa_i'(s) \leq c_2 \quad \text{для майже всіх} \quad s \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2. \tag{5}$$

Розглянемо простір

$$W_\varepsilon = \left\{ v \in L^2\big(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon)\big) \colon \ \frac{\partial v}{\partial t} := v' \in L^2\Big(0, T; \big(H^1(\Omega_\varepsilon)\big)^*\Big) \right\}.$$

Відомо (див., наприклад, §1 гл. IV в [20]), що $W_\varepsilon \subset C\big([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)\big)$.

Функція $v_\varepsilon \in W_\varepsilon$ така, що $v_\varepsilon|_{t=0} = 0$, є слабким розв'язком задачі (1), якщо для довільної функції $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ і для майже всіх $t \in (0, T)$

$$\langle v_\varepsilon'(\cdot, t), \varphi \rangle + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \big(\nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi + \kappa_0(v_\varepsilon)\varphi\big) dx +$$

$$+ \varepsilon^\alpha \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon)\, \varphi d\sigma_x + \varepsilon \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \kappa_2(v_\varepsilon) \varphi d\sigma_x =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi dx + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon} g_\varepsilon \varphi d\sigma_x + \int\limits_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \varphi d\tilde{x}. \tag{6}$$

Тут через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено двоїстість між $\big(H^1(\Omega_\varepsilon)\big)^*$ і $H^1(\Omega_\varepsilon)$, $\tilde{x} = (x_1,\, x_3)$.

Так само, як, наприклад, в [21], можна показати, що для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ існує єдиний слабкий розв'язок задачі (1). Метою нашого дослідження є вивчення асимптотичної поведінки розв'язку крайової задачі (1) при $\varepsilon \to 0$.

3. Формулювання результатів та їх аналіз. Для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільної функції $y \in L^2\big(0, T; H^1(G_\varepsilon^{(i)})\big)$ визначимо оператори продовження нулем таким чином:

$$\widetilde{y}^{(i)}(x, t) = \begin{cases} y(x, t), & (x, t) \in G_\varepsilon^{(i)} \times [0, T], \\ 0, & (x, t) \in \big(D_i \setminus G_\varepsilon^{(i)}\big) \times [0, T], \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Так само будемо позначати оператори продовження нулем для функцій із простору $H^1(G_\varepsilon^{(i)})$, які визначаються аналогічно.

Теорема 1. *При $\alpha \geq 1$ розв'язок v_ε задачі* (1) *задовольняє співвідношення*

$$\begin{array}{lll} v_\varepsilon \xrightarrow{w} v^+ & \textit{слабко в} & L^2\big(0, T; H^1(\Omega_0)\big), \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \xrightarrow{w} h_1 v_1^- & \textit{слабко в} & L^2\big(D_1 \times (0, T)\big), \\ \widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} \xrightarrow{w} h_2 v_2^- & \textit{слабко в} & L^2\big(D_2 \times (0, T)\big) \end{array} \qquad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{7}$$

де багатозначна листова функція

$$\mathbf{U}_0(x, t) := \begin{cases} v^+(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ v_1^-(x, t), & (x, t) \in D_1 \times (0, T), \\ v_2^-(x, t), & (x, t) \in D_2 \times (0, T), \end{cases} \tag{8}$$

є слабким розв'язком задачі

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v^+ - \Delta v^+ + \kappa_0(v^+) = f_0 \quad \text{\textit{в}} \quad \Omega_0 \times (0,T),\\
&\partial_\nu v^+ = q_0^\pm \quad \text{\textit{на}} \quad S^\pm \times (0,T),\\
&h_1 \partial_t v_1^- - \mathrm{div}_{\tilde{x}}(h_1 \nabla_{\tilde{x}} v_1^-) + h_1 \kappa_0(v_1^-) + 2\delta_{\alpha,1}\kappa_1(v_1^-) = h_1 f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0\\
&\qquad \text{\textit{в}} \quad D_1 \times (0,T),\\
&\partial_\nu v_1^- = 0 \quad \text{\textit{на}} \quad Q_1 \times (0,T),\\
&h_2 \partial_t v_2^- - \mathrm{div}_{\tilde{x}}(h_2 \nabla_{\tilde{x}} v_2^-)\\
&\ + h_2 \kappa_0(v_2^-) + 2\kappa_2(v_2^-) = h_2 f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0 \quad \text{\textit{в}} \quad D_2 \times (0,T),\\
&\partial_\nu v_2^- = 0 \quad \text{\textit{на}} \quad Q_2 \times (0,T),\\
&v_1^- = v_2^- = v^+ \quad \text{\textit{на}} \quad Q_0 \times (0,T),\\
&h_1(d_0)\partial_r v_1^- + h_2(d_0)\partial_r v_2^- = \partial_r v^+ \quad \text{\textit{на}} \quad Q_0 \times (0,T),\\
&\mathbf{U}_0|_{t=0} = 0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

а множники $\delta_{\alpha,1}$ та $\delta_{\beta,1}$ — символи Кронекера.

Зауваження **1.** У співвідношеннях (7), (9) та далі по тексту функції h_1 та h_2 залежать від змінної $r = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$, тобто $h_i(r)$, $r \in [d_0, d_i]$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *При $\alpha < 1$ та $\kappa_1(0) = 0$ розв'язок v_ε задачі* (1) *задовольняє співвідношення*

$$
\begin{aligned}
&v_\varepsilon \xrightarrow{w} v^+ \quad \text{\textit{слабко в}} \quad L^2\big(0,T; H^1(\Omega_0)\big),\\
&\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)} \xrightarrow{s} 0 \quad \text{\textit{сильно в}} \quad L^2\big(D_1 \times (0,T)\big), \qquad \text{\textit{при}} \quad \varepsilon \to 0,\\
&\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} \xrightarrow{w} h_2 v_2^- \quad \text{\textit{слабко в}} \quad L^2\big(D_2 \times (0,T)\big)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

де функція v^+ є узагальненим розв'язком крайової задачі

$$
\begin{aligned}
&\partial_t v^+ - \Delta v^+ + \kappa_0(v^+) = f_0 \quad \text{\textit{в}} \quad \Omega_0 \times (0,T),\\
&v^+ = 0 \quad \text{\textit{на}} \quad Q_0 \times (0,T),\\
&\partial_\nu v^+ = q_0^\pm \quad \text{\textit{на}} \quad S^\pm \times (0,T),\\
&v^+\big|_{t=0} = 0 \quad \text{\textit{в}} \quad \Omega_0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

а функція v_2^- — узагальненим розв'язком задачі

$$
\begin{aligned}
& h_2 \partial_t v_2^- - \operatorname{div}_{\tilde{x}}(h_2 \nabla_{\tilde{x}} v_2^-) + h_2 \kappa_0(v_2^-) + 2\kappa_2(v_2^-) = h_2 f_0 + 2\,\delta_{\beta,1} g_0 \\
& \qquad \text{в} \quad D_2 \times (0,T), \\
& v_2^- = 0 \quad \text{на} \quad Q_0 \times (0,T), \\
& \partial_\nu v_2^- = 0 \quad \text{на} \quad Q_2 \times (0,T), \\
& v_2^-\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

З наведених результатів видно, що параметри α, β і крайові умови на межах тонких приєднаних дисків суттєво впливають на асимптотичну поведінку розв’язку початкової задачі (1).

При $\alpha \geq 1$ усереднена задача (9) для початкової задачі (1) є нестандартною крайовою задачею в анізотропному просторі Соболєва W (див. означення цього простору в п. 5.4 доведення теореми 1) для багатозначної листової функції $\mathbf{U}_0$. При цьому функції v^+, v_1^- та v_2^-, що фігурують в означенні функції $\mathbf{U}_0$, є головними членами асимптотичного розвинення розв’язку v_ε задачі (1) у тілі з’єднання Ω_0 та в областях D_1 і D_2 відповідно.

Крайові умови Фур’є на межах тонких дисків з обох рівнів трансформуються в граничному переході в нові доданки в диференціальних рівняннях в областях D_1 та D_2, що заповнюються тонкими дисками з відповідних рівнів при $\varepsilon \to 0$. Також ці доданки показують вплив параметрів α та β на асимптотичну поведінку розв’язку. У випадку, коли $\alpha > 1$, зникає доданок $2\delta_{\alpha,1}\kappa_1(v_1^-)$. З фізичної точки зору це означає, що коефіцієнт зовнішнього конвективного теплообміну на поверхні тонких дисків з 1-го рівня є достатньо малим, і цим теплообміном можна знехтувати. Якщо $\beta > 1$, то зникають доданки $2\delta_{\beta,1} g_0$, тобто температура навколишнього середовища достатньо мала, і її можна вважати рівною нулю.

При $\alpha < 1$ початкова задача (1) розпадається в граничному переході на дві незалежні крайові задачі (11) та (12). Проте задачі (11) та (12) формують в сукупності усереднену задачу для задачі (1), оскільки розв’язки v^+ та v_2^- цих задач є головними членами асимптотики для розв’язку v_ε початкової задачі в тілі з’єднання та в тонких дисках з другого рівня відповідно. Умови $\alpha < 1$ та $\kappa_1(0) = 0$ означають, що коефіцієнт зовнішнього конвективного теплообміну на поверхні тонких дисків з 1-го рівня надто великий, тобто на поверхні цих дисків відбувається дуже інтенсивний теплообмін з навколишнім середовищем. Як наслідок, розв’язок v_ε у тонких дисках з 1-го рівня прямує до нуля.

Відмітимо також вплив геометричної структури густого з’єднання на асимптотичну поведінку розв’язку, що полягає в появі в усереднених задачах коефіцієнтів $h_i(r)$, які визначають відносну товщину тонких дисків з i-го рівня. Більш того, в областях D_i, що заповнюються тонкими дисками з i-го рівня в граничному переході, отримано диференціальні рівняння відносно лише двох просторових змінних x_1 та x_3.

Схема доведення теорем 1 *та* 2. Для усереднення крайових задач у густих з’єднаннях з неоднорідними крайовими умовами Неймана або Фур’є в роботі першого автора [8] було запропоновано метод спеціальних інтегральних тотожностей. Для розглядуваних задач це тотожність (13), за допомогою якої також доводяться апріорна оцінка (18) та лема 2. Згідно з оцінкою (18) можна вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\} \subset \{\varepsilon\}$, для якої будуть мати місце границі (22). З оцінки (18) також випливає нерівність (30), яка вказує на якісну відмінність в асимптотичній поведінці розв'язку задачі (1) при $\alpha < 1$. За допомогою вибору спеціальних тестових функцій знаходяться границі лінійних доданків у співвідношеннях (22). Границі ж нелінійних величин відшуковуємо на підставі нерівностей (16), (17) та методу Браудера – Мінті (див., наприклад, [20], розділ 3).

4. Апріорні оцінки та допоміжні твердження. Позначимо через $S_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, об'єднання бічних поверхонь тонких дисків з i-го рівня, тобто

$$S_{(\varepsilon)}^{(i)} = \bigcup_{j=0}^{N-1} \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \colon\ |x_2 - \varepsilon(j + b_i)| = \frac{\varepsilon h_i(r)}{2},\ \ d_0 \le r < d_i \right\}.$$

Нескладно переконатись, що для майже всіх $x \in S_\varepsilon^{(i)}$ одиничний вектор нормалі до бічної поверхні тонких дисків у точці x має вигляд

$$\overline{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h_i'(r)|^2}} \left(-\frac{\varepsilon h_i'(r) x_1}{2r}, \pm 1, -\frac{\varepsilon h_i'(r) x_3}{2r} \right),$$

де $\pm$ вказує на ліву і праву частину бічної поверхні тонких дисків відповідно. Далі будемо використовувати інтегральну тотожність, яку доведено у [18]:

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{(i)}} \frac{\varepsilon h_i(r)}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h_i'(r)|^2}}\, \varphi\, d\sigma_x = \int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} \varphi\, dx - \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} Y_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \partial_{x_2} \varphi\, dx, \tag{13}$$

де $Y_i(t) = -t + [t] + b_i$, $i = 1, 2$, і $[t]$ — ціла частина t, $\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ — довільна функція. Оскільки $\max_{\mathbb{R}} |Y_i| \le 1$, $i = 1, 2$, то з (13) випливає, що

$$\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} \varphi^2\, dx \le \varepsilon C_1 \left(\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} |\nabla \varphi|^2\, dx + \int\limits_{S_\varepsilon^{(i)}} \varphi^2\, d\sigma_x \right) \tag{14}$$

та

$$\|\varphi\|_{L^2(S_\varepsilon^{(i)})} \le C_2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

***Зауваження* 2.** Тут і далі всі константи c_i, C_i, які з'являються в нерівностях, не залежать від ε.

З (5) отримаємо наступні нерівності для майже всіх $t \in \mathbb{R}$:

$$c_1 t^2 + \kappa_i(0) t \le \kappa_i(t) t \le c_2 t^2 + \kappa_i(0) t, \tag{16}$$

$$|\kappa_i(t)| \le |\kappa_i(0)| + c_3 |t|, \quad i = 0, 1, 2. \tag{17}$$

Лема 1. *Існують додатні сталі C_0 та ε_0 такі, що при всіх значеннях $\varepsilon \in$ $\in (0, \varepsilon_0)$ для розв'язку v_ε задачі* (1) *має місце нерівність*

$$\max_{0 \le t \le T} \|v_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le C_0. \tag{18}$$

Доведення. З тотожності (6) для довільного $t \in (0,T]$ отримуємо

$$\frac{1}{2}\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \big(|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + \kappa_0(v_\varepsilon)v_\varepsilon\big)dxd\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\varepsilon^\alpha \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x + \varepsilon \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \kappa_2(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\, v_\varepsilon dx + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon} g_\varepsilon\, v_\varepsilon d\sigma_x + \int\limits_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm\, v_\varepsilon d\tilde{x} \right) d\tau,$$

звідки за допомогою нерівності (16) виводимо

$$\frac{1}{2}\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + c_1 v_\varepsilon^2)\, dxd\tau +$$

$$+c_1 \int\limits_0^t \left(\varepsilon^\alpha \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon^2\, d\sigma_x + \varepsilon \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} v_\varepsilon^2\, d\sigma_x \right) d\tau \le$$

$$\le - \int\limits_0^t \left(\kappa_0(0) \int\limits_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon\, dx + \kappa_1(0)\, \varepsilon^\alpha \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon\, d\sigma_x + \kappa_2(0)\, \varepsilon \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} v_\varepsilon\, d\sigma_x \right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\, v_\varepsilon\, dx + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon} g_\varepsilon\, v_\varepsilon\, d\sigma_x + \int\limits_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm\, v_\varepsilon\, d\tilde{x} \right) d\tau. \tag{19}$$

1. Випадок $\alpha \ge 1$. Використовуючи нерівність Коші–Буняковського та (15), знаходимо

$$\frac{1}{2}\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + C_1 \|v_\varepsilon\|^2_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le$$

$$\le C_2 \big(1 + \varepsilon^{\alpha-1} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,t))} +$$

$$+ \varepsilon^{\beta-1}\|g_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(D_1))} + \|q_\varepsilon^\pm\|_{L^2(S^\pm\times(0,t))}\big) \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))}.$$

З останньої нерівності випливають такі дві нерівності:

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le$$

$$\le C_3 \big(1 + \varepsilon^{\alpha-1} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,t))} + \varepsilon^{\beta-1}\|g_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(D_1))} + \|q_\varepsilon^\pm\|_{L^2(S^\pm\times(0,t))}\big),$$

$$\max_{0\le\tau\le t} \|v_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le C_4 \big(1 + \varepsilon^{\alpha-1} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,t))} +$$

$$+\varepsilon^{\beta-1}\|g_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(D_1))}+\|q_\varepsilon^{\pm}\|_{L^2(S^\pm\times(0,t))}\big)\|v_\varepsilon\|_{L^2(0,t;H^1(\Omega_\varepsilon))}.$$

Покладаючи $t=T$ і використовуючи умови (2) – (4), отримуємо нерівність (18).

2. Випадок $\alpha<1$. Додатково припускаємо, що $\kappa_1(0)=0$. Тоді з (19) аналогічно випадку 1 виводимо нерівність (18).

Лему 1 доведено.

Позначимо через χ_Ω характеристичну функцію множини $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Відомо [18], що мають місце збіжності

$$\begin{aligned}\chi_{\Theta_\varepsilon^{(i)}} &\xrightarrow{w} h_i(d_0) \quad \text{в} \quad L^2(Q_0),\\ \chi_{G_\varepsilon^{(i)}} &\xrightarrow{w} h_i(r) \quad \text{в} \quad L^2(D_i)\end{aligned} \qquad \text{при} \quad \varepsilon\to0, \quad i=1,2.$$

Тут і далі будемо використовувати позначення

$$\widetilde{\kappa_j(\varphi_i)}^{(i)}:=\begin{cases}\kappa_j(\varphi_i(x,t)), & (x,t)\in G_\varepsilon^{(i)}\times[0,T],\\ 0, & (x,t)\in(D_i\setminus G_\varepsilon^{(i)})\times[0,T],\end{cases}$$

де φ_i — довільна функція з $L^2\big(0,T;H^1(G_\varepsilon^{(i)})\big)$, $j=0,1,2$, $i=1,2$.

За допомогою тотожності (13) так само, як і в [10], доводимо наступну лему.

Лема 2. *Нехай послідовність $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ з $L^2\big(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon)\big)$ є рівномірно обмеженою по ε та*

$$\widetilde{\kappa_i(v_\varepsilon)}^{(i)}\xrightarrow{w}\mu_i \quad \textit{в} \quad L^2\big(D_i\times(0,T)\big) \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to0, \quad i=1,2.$$

Тоді для довільної функції $\psi_i\in L^2\big(0,T;H^1(D_i)\big)$, $i=1,2$,

$$\varepsilon\int_0^T\int_{S_\varepsilon^{(i)}}\kappa_i(v_\varepsilon)\psi_i d\sigma_x\,dt\to2\int_0^T\int_{D_i}h_i^{-1}\mu_i\psi_i\,dx\,dt \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to0. \tag{20}$$

Крім того, на підставі (3) *маємо*

$$\varepsilon\int_0^T\int_{S_\varepsilon^{(i)}}g_\varepsilon\psi_i d\sigma_x\,dt\to2\int_0^T\int_{D_i}g_0\psi_i dx\,dt \quad \textit{при} \quad \varepsilon\to0, \quad i=1,2. \tag{21}$$

5. Доведення теореми 1. Випадок $\alpha\geq1$.

5.1. З оцінки (18) випливає, що існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}\subset\{\varepsilon\}$ (яку ми знову позначимо через $\{\varepsilon\}$) така, що

$$\begin{array}{lll}
v_\varepsilon(\cdot,t) \xrightarrow{w} y_0^+(\cdot,t) & \text{в} \quad L^2(\Omega_0) & \text{для майже всіх } \ t\in[0,T], \\
\widetilde{v_\varepsilon(\cdot,t)}^{(i)} \xrightarrow{w} y_0^{i,-}(\cdot,t) & \text{в} \ L^2(D_i) & \text{для майже всіх } \ t\in[0,T], \\
v_\varepsilon|_{\Omega_0} \xrightarrow{w} v^+ & \text{в} \ L^2\big(0,T;H^1(\Omega_0)\big), & \\
\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)} \xrightarrow{w} v_0^{i,-} := h_i v_i^- & \text{в} \ L^2\big(D_i\times(0,T)\big), & \\
\widetilde{\partial_{x_j} v_\varepsilon}^{(i)} \xrightarrow{w} \gamma_j^{(i)} & \text{в} \ L^2\big(D_i\times(0,T)\big), & \\
\kappa_0(v_\varepsilon) \xrightarrow{w} \zeta_0 & \text{в} \ L^2\big(\Omega_0\times(0,T)\big), & \\
\widetilde{\kappa_0(v_\varepsilon)}^{(i)} \xrightarrow{w} \zeta_i & \text{в} \ L^2\big(D_i\times(0,T)\big), & \\
\widetilde{\kappa_i(v_\varepsilon)}^{(i)} \xrightarrow{w} \mu_i & \text{в} \ L^2\big(D_i\times(0,T)\big) &
\end{array} \tag{22}$$

при $\varepsilon\to0$, де y_0^+, $y_0^{i,-}$, v^+, v_i^-, $\gamma_j^{(i)}$, ζ_0, ζ_i, μ_i, $i=1,2$, $j=\overline{1,3}$, будуть визначені нижче.

З теореми Фубіні випливає, що $v^+(\cdot,t)\in L^2(\Omega_0), v_0^{i,-}(\cdot,t)\in L^2(D_i)$, $i=1,2$, для майже всіх $t\in(0,T)$. Тому на підставі (22) маємо

$$y_0^+(x,t)=v^+(x,t) \qquad \text{для майже всіх } \ (x,t)\in\Omega_0\times(0,T),$$

$$y_0^{i,-}(x,t)=v_0^{i,-}(x,t) \quad \text{для майже всіх } \ (x,t)\in D_i\times(0,T), \quad i=1,2.$$

5.2. Знайдемо $\gamma_2^{(i)}$, $i=1,2$. Розглянемо тестові функції

$$\Phi_i(x,t)=\begin{cases}0, & (x,t)\in\Big(\Omega_\varepsilon\setminus G_\varepsilon^{(i)}\Big)\times(0,T),\\ \varepsilon Y_i(\frac{x_2}{\varepsilon})\psi_i(x)\eta(t), & (x,t)\in G_\varepsilon^{(i)}\times(0,T),\end{cases}$$

де $\psi_i\in C_0^\infty(D_i)$, $\eta\in C^1([0,T])$ — довільні функції, а $Y_i(t)=-t+[t]+b_i$, $i=1,2$. Очевидно, що $\Phi_i\in W_\varepsilon$ та

$$\nabla_x\Phi_i(x,t)=\varepsilon\eta(t)Y_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\nabla_x\psi_i(x)+\eta(t)\big(0,-\psi_i(x),0\big) \quad \text{в} \quad G_\varepsilon^{(i)}\times(0,T).$$

Означення слабкого розв'язку задачі (1) еквівалентне наступному (див., наприклад, § III.4 в [23]): $v_\varepsilon\in L^2\big(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon)\big)$ є слабким розв'язком задачі (1), якщо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon(x,T)\varphi(x,T)\,dx-\int\limits_0^T\langle\varphi',v_\varepsilon\rangle\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\nabla_x v_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\kappa_0(v_\varepsilon)\,\varphi dx+\varepsilon^\alpha\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)\,\varphi d\sigma_x+\varepsilon\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\kappa_2(v_\varepsilon)\,\varphi d\sigma_x\right)dt=$$

$$= \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi dx + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon} g_\varepsilon \, \varphi d\sigma_x + \int\limits_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \, \varphi d\tilde{x} \right) dt \quad \forall \varphi \in W_\varepsilon. \tag{23}$$

Підставивши функцію Φ_1 в тотожність (23), отримаємо

$$\varepsilon^{-1} \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{x_2} v_\varepsilon \psi_1 \eta dx dt \le \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} |v_\varepsilon(x,T)\psi_1(x)\eta(T)| dx +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} |v_\varepsilon \psi_1 \eta'| dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} |(\nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \psi_1)\eta| dx \, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} |\kappa_0(v_\varepsilon)\psi_1 \eta| dx \, dt + \varepsilon^\alpha \int\limits_0^T \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} |\kappa_1(v_\varepsilon)\psi_1\eta| d\sigma_x dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} |f_\varepsilon \psi_1 \eta| dx dt + \varepsilon^\beta \int\limits_0^T \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} |g_\varepsilon \psi_1 \eta| d\sigma_x dt.$$

З останньої нерівності на підставі (2), (3), (15), (17) і (18) маємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{D_1} \widetilde{\partial_{x_2} v_\varepsilon}^{(1)} \psi_1 \eta dx dt = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

звідки випливає, що $\gamma_2^{(1)} = 0$ майже скрізь в $D_1 \times (0,T)$. Аналогічним чином, підставивши функцію Φ_2 в інтегральну тотожність (23), отримаємо, що $\gamma_2^{(2)} = 0$ майже скрізь в $D_2 \times (0,T)$.

Знайдемо $\gamma_1^{(i)}$ та $\gamma_3^{(i)}, i = 1,2$. За допомогою тотожності (13) отримаємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_{D_i} \widetilde{\partial_{x_j} v_\varepsilon}^{(i)} \psi_i \eta dx \, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} \partial_{x_j} v_\varepsilon \psi_i \eta dx \, dt =$$

$$= - \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} v_\varepsilon \partial_{x_j} \psi_i \eta \, dx \, dt - \varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_{S_\varepsilon^{(i)}} \frac{h_i'(r) x_j v_\varepsilon \psi_i \eta}{2r\sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h_i'(r)|^2}} \, d\sigma_x dt =$$

$$= - \int\limits_0^T \int\limits_{D_i} \widetilde{v_\varepsilon}^{(i)} \partial_{x_j} \psi_i \eta \, dx \, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{D_i} \frac{x_j h_i'(r)}{r h_i(r)} \, \widetilde{v_\varepsilon}^{(i)} \psi_i \eta \, dx \, dt +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} Y_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \frac{x_j h_i'(r)}{r h_i(r)} \partial_{x_2}(v_\varepsilon \psi_i) \eta \, dx \, dt$$

для всіх $\psi_i \in C_0^\infty(D_i)$, $\eta \in C^1([0,T])$, $j = 1,3$, $i = 1,2$. Перейшовши до границі в цій рівності, одержимо, що для довільних $\psi_i \in C_0^\infty(D_i)$, $\eta \in C^1([0,T])$

$$\int_0^T \int_{D_i} \gamma_j^{(i)} \psi_i \eta \, dx \, dt = -\int_0^T \int_{D_i} v_i^- \big(h_i \, \partial_{x_j} \psi_i + \psi_i \, \partial_{x_j} h_i\big) \eta \, dx \, dt,$$

звідки випливає, що існують узагальнені похідні $\partial_{x_j} v_i^-$ та

$$\gamma_j^{(i)} = h_i(r) \partial_{x_j} v_i^- \quad \text{для майже всіх} \quad (x,t) \in D_i \times (0,T), \quad j = 1,3, \quad i = 1,2.$$

5.3. Покажемо, що $v^+|_{Q_0} = v_1^-\big|_{Q_0} = v_2^-\big|_{Q_0}$ в сенсі сліду для майже всіх $t \in (0,T)$. З властивостей оператора сліду та (22) випливає, що для майже всіх $t \in (0,T)$

$$v_\varepsilon(\cdot,t)|_{Q_0} \xrightarrow{s} v^+(\cdot,t)|_{Q_0} \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q_0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{24}$$

Розглянемо рівність

$$\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)}(x,t)|_{Q_0} = \chi_{\Theta_\varepsilon^{(i)}}(x) v_\varepsilon(x,t)|_{Q_0}, \quad (x,t) \in Q_0 \times (0,T), \tag{25}$$

де

$$\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)}(x,t)|_{Q_0} = \begin{cases} v_\varepsilon(x,t)|_{Q_0}, & (x,t) \in \Theta_\varepsilon^{(i)} \times (0,T), \\ 0, & (x,t) \in \Big(Q_0 \setminus \Theta_\varepsilon^{(i)}\Big) \times (0,T), \end{cases} \qquad i = 1,2.$$

На підставі співвідношень (20), (24) та (25) маємо, що, з одного боку,

$$\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)}|_{Q_0} \xrightarrow{w} h_i(d_0)\, v^+|_{Q_0} \quad \text{в} \quad L^2(Q_0) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T), \quad i = 1,2.$$

З іншого боку, виразимо границю функцій $\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)}|_{Q_0}$ через сліди функцій v_i^-. Для довільної функції $\psi_i \in C^\infty(\overline{D_i})$, $\psi_i|_{r=d_i} = 0$, та для майже всіх $t \in (0,T)$

$$\int_{G_\varepsilon^{(i)}} r^{-1} \, \partial_r v_\varepsilon \psi_i dx = \int_{G_\varepsilon^{(i)}} r^{-1} (\partial_{x_1} v_\varepsilon \cos\theta + \partial_{x_3} v_\varepsilon \, \sin\theta) \, \psi_i dx =$$

$$= -\int_{G_\varepsilon^{(i)}} v_\varepsilon \, \partial_{x_1}(r^{-1}\psi_i \, \cos\theta) \, dx - \int_{G_\varepsilon^{(i)}} v_\varepsilon \, \partial_{x_3}(r^{-1}\psi_i \sin\theta) dx -$$

$$-d_0^{-1} \int_{\Theta_\varepsilon^{(i)}} (v_\varepsilon \psi_i)|_{\Theta_\varepsilon^{(i)}} \, d\sigma_x - \int_{S_\varepsilon^{(i)}} v_\varepsilon \psi_i \frac{\varepsilon h_i'(r)}{2r\sqrt{1 + \varepsilon^2 4^{-1} |h_i'(r)|^2}} \, d\sigma_x,$$

де (r, θ, x_2) — циліндричні координати: $r = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$ та $\theta = \arctan\left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)$.

Оскільки $\partial_{x_1}(r^{-1}\cos\theta) + \partial_{x_3}(r^{-1}\sin\theta) = 0$, то на підставі (13) можна переписати останню інтегральну тотожність у вигляді

$$-d_0^{-1} \int_{Q_0} (\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)} \psi_i)\Big|_{Q_0} d\sigma_x + \varepsilon \int_{G_\varepsilon^{(i)}} Y_i\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \frac{h_i'(r)}{r h_i(r)} \, \partial_{x_2}(v_\varepsilon \psi_i) d\sigma_x =$$

$$= \int\limits_{D_i} r^{-1}\big(\widetilde{\partial_r v_\varepsilon}^{(i)}\psi_i + \widetilde{v_\varepsilon}^{(i)}\,\partial_r\psi_i + \frac{h_i'(r)}{h_i(r)}\,\widetilde{v_\varepsilon}^{(i)}\psi_i\big)dx.$$

Перейшовши до границі в цій рівності при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$-\frac{h_i(d_0)}{d_0}\int\limits_{Q_0}(v^+\,\psi_i)\big|_{Q_0}\,d\sigma_x = \int\limits_{D_i} r^{-1}\big(h_i(r)\,\partial_r(v_i^-\,\psi_i) + h_i'(r)v_i^-\psi_i\big)dx =$$

$$= -\frac{h_i(d_0)}{d_0}\int\limits_{Q_0}(v_i^-\,\psi_i)\big|_{Q_0}\,d\sigma_x$$

для всіх $\psi_i \in C^\infty(\overline{D_i})$, $\psi_i|_{r=d_i} = 0$, звідки випливає, що

$$v^+\big|_{Q_0} = v_1^-\big|_{Q_0} = v_2^-\big|_{Q_0} \quad \text{в сенсі сліду для майже всіх} \quad t \in (0,T). \qquad (26)$$

5.4. Нехай $\eta \in C^1([0,T])$, $\varphi_0 \in H^1(\Omega_0)$, $\varphi_i \in H^1(D_i)$, $i = 1,2$, — довільні функції, причому $\varphi_0|_{Q_0} = \varphi_1|_{Q_0} = \varphi_2|_{Q_0}$ в сенсі сліду. Визначимо функцію

$$\widehat{\varphi}(x,t) = \begin{cases} \varphi_0(x)\eta(t), & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ \varphi_1(x)\eta(t), & (x,t) \in G_\varepsilon^{(1)} \times (0,T), \\ \varphi_2(x)\eta(t), & (x,t) \in G_\varepsilon^{(2)} \times (0,T). \end{cases}$$

Очевидно, що $\widehat{\varphi} \in W_\varepsilon$.

Використавши операції продовження нулем, перепишемо тотожність для розв'язку (23) з тестовою функцією $\widehat{\varphi}$ у вигляді

$$\int\limits_{\Omega_0}(v_\varepsilon\varphi_0\eta)|_{t=T}\,dx + \int\limits_{D_1}(\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\varphi_1\,\eta)|_{t=T}dx + \int\limits_{D_2}(\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)}\varphi_2\,\eta)|_{t=T}dx -$$

$$-\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_0} v_\varepsilon\varphi_0\,dx + \int\limits_{D_1}\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\varphi_1\,dx + \int\limits_{D_2}\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)}\varphi_2\,dx\right)\eta'\,dt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\nabla_x v_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi_0 + \kappa_0(v_\varepsilon)\,\varphi_0\big)\eta dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_1}\big(\widetilde{\nabla_x v_\varepsilon}^{(1)}\cdot\nabla_x\varphi_1 + \widetilde{\kappa_0(v_\varepsilon)}^{(1)}\varphi_1\big)dx + \varepsilon^\alpha\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)\varphi_1 d\sigma_x\right)\eta dt +$$

$$+\int\limits_0^T\left(\int\limits_{D_2}\big(\widetilde{\nabla_x v_\varepsilon}^{(2)}\cdot\nabla_x\varphi_2 + \widetilde{\kappa_0(v_\varepsilon)}^{(2)}\varphi_2\big)dx + \varepsilon\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\kappa_2(v_\varepsilon)\varphi_2 d\sigma_x\right)\eta dt =$$

$$= \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon\,\varphi_0 dx + \int\limits_{D_1}\chi_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon\varphi_1 dx + \int\limits_{D_2}\chi_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon\varphi_2 dx\right)\eta dt +$$

$$+\int_0^T \left(\varepsilon^{\beta} \int_{\Upsilon_{\varepsilon}^{(1)}} g_{\varepsilon}\, \varphi_1 d\sigma_x + \varepsilon^{\beta} \int_{\Upsilon_{\varepsilon}^{(2)}} g_{\varepsilon}\, \varphi_2 d\sigma_x + \int_{S^{\pm}} q_{\varepsilon}^{\pm} \varphi_0 d\tilde{x} \right) \eta dt.$$

Врахувавши (20) – (22), перейдемо в останній тотожності до границі при $\varepsilon \to 0$:

$$\int_{\Omega_0} (v^+ \varphi_0 \eta)|_{t=T} dx + \int_{D_1} h_1 (v_1^- \varphi_1 \eta)|_{t=T} dx + \int_{D_2} h_2 (v_2^- \varphi_2 \eta)|_{t=T} dx -$$

$$-\int_0^T \left(\int_{\Omega_0} v^+ \varphi_0 \, dx + \int_{D_1} h_1 v_1^- \, \varphi_1 \, dx + \int_{D_2} h_2 v_2^- \, \varphi_2 \, dx \right) \eta' dt +$$

$$+\int_0^T \int_{\Omega_0} \big(\nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi_0 + \zeta_0 \varphi_0 \big) \eta dx dt +$$

$$+\int_0^T \int_{D_1} \big(h_1 \nabla_{\tilde{x}} v_1^- \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi_1 + \zeta_1 \varphi_1 + 2\, \delta_{\alpha,1} h_1^{-1} \mu_1 \varphi_1 \big)\, \eta dx dt +$$

$$+\int_0^T \int_{D_2} \big(h_2 \nabla_{\tilde{x}} v_2^- \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi_2 + \zeta_2 \varphi_2 + 2 h_2^{-1} \mu_2 \varphi_2 \big) \eta \, dx dt =$$

$$= \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f_0 \varphi_0 \, dx + \int_{D_1} h_1 f_0 \varphi_1 dx + \int_{D_2} h_2 f_0 \varphi_2 dx \right) \eta \, dt +$$

$$+\int_0^T \left(2\, \delta_{\beta,1} \int_{D_1} g_0 \varphi_1 dx + 2\, \delta_{\beta,1} \int_{D_2} g_0 \varphi_2 dx + \int_{S^{\pm}} q_0^{\pm} \varphi_0 d\tilde{x} \right) \eta \, dt. \tag{27}$$

Множина функцій

$$\Big\{ \big(\varphi_0(x)\eta(t), \varphi_1(x)\eta(t), \varphi_2(x)\eta(t) \big) \colon \ \eta \in C^1([0,T]),$$

$$\varphi_0 \in H^1(\Omega_0), \ \ \varphi_i \in H^1(D_i), \ \ i = 1,2, \ \ \varphi_0|_{Q_0} = \varphi_1|_{Q_0} = \varphi_2|_{Q_0} \Big\}$$

є щільною в просторі функцій

$$W = \Big\{ \mathbf{u} = (\psi_0, \psi_1, \psi_2) \colon \ \psi_0 \in L^2\big(0,T; H^1(\Omega_0)\big), \ \ \exists \psi_0' \in L^2\big(0,T; (H^1(\Omega_0))^*\big),$$

$$\psi_i \in L^2\big(0,T; \widetilde{H}^1(D_i)\big), \ \ \exists \psi_i' \in L^2\big(0,T; (\widetilde{H}^1(D_i))^*\big),$$

$$i = 1,2, \ \ \psi_0|_{Q_0} = \psi_1|_{Q_0} = \psi_2|_{Q_0} \Big\}$$

(останні рівності розуміються в сенсі сліду) зі скалярним добутком

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_W=\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_0}(\nabla_x u_0\cdot\nabla_x v_0+u_0v_0)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{D_1}(\nabla_{\tilde{x}}u_1\cdot\nabla_{\tilde{x}}v_1+u_1v_1)\,dx+\int\limits_{D_2}(\nabla_{\tilde{x}}u_2\cdot\nabla_{\tilde{x}}v_2+u_2v_2)\,dx\right)dt,$$

де $\mathbf{u}=(u_0,u_1,u_2)$, $\mathbf{v}=(v_0,v_1,v_2)$, $\widetilde{H}^1(D_i)=\big\{w\in L^2(D_i)\colon \exists\partial_{x_j}w\in L^2(D_i),\ j=\overline{1,3}\big\}$ — анізотропний простір Соболєва. Цей факт доводиться, як і в [22] (розділ V, § 2.3).

Отже, інтегральна тотожність (27) виконується для довільної тестової функції з простору W. Цей факт означає, що багатозначна листова функція $\mathbf{U_0}\in W$, визначена формулою (8), є слабким розв'язком задачі (9), однак диференціальні рівняння в $\Omega_0\times(0,T)$, $D_1\times(0,T)$ та $D_2\times(0,T)$ містять поки що невідомі члени ζ_0, ζ_1, ζ_2, μ_1 та μ_2 :

$$\partial_t v^+-\Delta v^+ +\zeta_0=f_0\quad\text{в}\quad \Omega_0\times(0,T),$$

$$h_1\partial_t v_1^- -\mathrm{div}_{\tilde{x}}(h_1\nabla_{\tilde{x}}v_1^-)+\zeta_1+2\delta_{\alpha,1}h_1^{-1}\mu_1=h_1f_0+2\,\delta_{\beta,1}g_0\quad\text{в}\quad D_1\times(0,T),$$

$$h_2\partial_t v_2^- -\mathrm{div}_{\tilde{x}}(h_2\nabla_{\tilde{x}}v_2^-)+\zeta_2+2h_2^{-1}\mu_2=h_2f_0+2\,\delta_{\beta,1}g_0\quad\text{в}\quad D_2\times(0,T).$$

5.5. Знайдемо функції ζ_0, ζ_1, ζ_2, μ_1 та μ_2 за допомогою метода Браудера – Мінті. Розглянемо інтегральну тотожність (23) з тестовою функцією $\varphi=v_\varepsilon$:

$$\frac12\int\limits_{\Omega_\varepsilon}v_\varepsilon^2(x,T)dx+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\big(|\nabla_x v_\varepsilon|^2+\kappa_0(v_\varepsilon)v_\varepsilon\big)dxdt+$$

$$+\,\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\kappa_2(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon}f_\varepsilon\, v_\varepsilon dx+\varepsilon^\beta\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon}g_\varepsilon v_\varepsilon\, d\sigma_x+\int\limits_{S^\pm}q_\varepsilon^\pm v_\varepsilon\, d\tilde{x}\right)dt.$$

З умов (2) – (4) та з (22) випливає, що границя правої частини при $\varepsilon\to 0$ дорівнює

$$\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_0}f_0v^+dx+\int\limits_{D_1}h_1f_0v_1^-\,dx+\int\limits_{D_2}h_2f_0v_2^-\,dx\right)dt+$$

$$+\int\limits_0^T\left(2\,\delta_{\beta,1}\int\limits_{D_1}g_0v_1^-dx+2\,\delta_{\beta,1}\int\limits_{D_2}g_0v_2^-dx+\int\limits_{S^\pm}q_0^\pm v^+d\tilde{x}\right)dt:=I_1,$$

а беручи до уваги тотожність (27) з тестовою функцією $\mathbf{U}_0$, маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2(x,T)dx+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\big(|\nabla_x v_\varepsilon|^2+\kappa_0(v_\varepsilon)v_\varepsilon\big)dxdt+$$

$$+\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\kappa_2(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big(v^+(x,T)\big)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{D_i}h_i\big(v_i^-(x,T)\big)^2dx+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(|\nabla_x v^+|^2+\zeta_0 v^+\big)dxdt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{D_i}\big(h_i|\nabla_{\tilde{x}}v_i^-|^2+\zeta_i v_i^-\big)dx\,dt+$$

$$+2\,\delta_{\alpha,1}\int\limits_0^T\int\limits_{D_1}h_1^{-1}\mu_1\,v_1^-dxdt+2\int\limits_0^T\int\limits_{D_2}h_2^{-1}\mu_2\,v_2^-dxdt. \tag{28}$$

Розглянемо довільну функцію $\mathbf{u}=(\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2)\in W$ та використаємо таку нерівність монотонності:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big(v_\varepsilon(x,T)-\varphi_0(x,T)\big)^2\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}\big(v_\varepsilon(x,T)-\varphi_i(x,T)\big)^2+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x v_\varepsilon-\nabla_x\varphi_0|^2dxdt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}|\nabla_{\tilde{x}}v_\varepsilon-\nabla_{\tilde{x}}\varphi_i|^2\,dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\kappa_0(v_\varepsilon)-\kappa_0(\varphi_0)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_0\big)dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}\big(\kappa_0(v_\varepsilon)-\kappa_0(\varphi_i)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_i\big)dxdt+$$

$$+\,\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\big(\kappa_1(v_\varepsilon)-\kappa_1(\varphi_1)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_1\big)d\sigma_x dt+$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\big(\kappa_2(v_\varepsilon)-\kappa_2(\varphi_2)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_2\big)d\sigma_x dt\ge 0.$$

Звідси отримаємо

$$
\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2(x,T)\,dx+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\big(|\nabla_x v_\varepsilon|^2+\kappa_0(v_\varepsilon)v_\varepsilon\big)dxdt+
$$

$$
+\,\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\kappa_2(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt-
$$

$$
-\int\limits_{\Omega_0} v_\varepsilon(x,T)\varphi_0(x,T)dx-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}} v_\varepsilon(x,T)\varphi_i(x,T)dx-
$$

$$
-\,2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\nabla_x v_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi_0 dx\,dt-2\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}\nabla_{\tilde{x}}v_\varepsilon\cdot\nabla_{\tilde{x}}\varphi_i dx\,dt+
$$

$$
+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big(\varphi_0(x,T)\big)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}\big(\varphi_i(x,T)\big)^2\,dx+
$$

$$
+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x\varphi_0|^2\,dx\,dt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}|\nabla_{\tilde{x}}\varphi_i|^2\,dx\,dt+
$$

$$
+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\kappa_0(\varphi_0)\varphi_0-\kappa_0(v_\varepsilon)\,\varphi_0-\kappa_0(\varphi_0)v_\varepsilon\big)dx\,dt+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(i)}}\big(\kappa_0(\varphi_i)\varphi_i-\kappa_0(v_\varepsilon)\,\varphi_i-\kappa_0(\varphi_i)v_\varepsilon\big)dx\,dt+
$$

$$
+\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\big(\kappa_1(\varphi_1)\varphi_1-\kappa_1(v_\varepsilon)\varphi_1-\kappa_1(\varphi_1)v_\varepsilon\big)d\sigma_x\,dt+
$$

$$
+\,\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\big(\kappa_2(\varphi_2)\varphi_2-\kappa_2(v_\varepsilon)\varphi_2-\kappa_2(\varphi_2)v_\varepsilon\big)d\sigma_x\,dt\ge 0.
$$

Перейдемо в цій нерівності до границі при $\varepsilon\to 0$. Границя перших двох рядків визначається з рівності (28), а границі решти доданків знайдемо, використавши оператори продовження нулем і співвідношення (20) та (22). В результаті отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big(v^+(x,T)-\varphi_0(x,T)\big)^2dx+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{D_i}h_i\big(v_i^-(x,T)-\varphi_i(x,T)\big)^2dx+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x v^+-\nabla_x\varphi_0|^2dxdt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{D_i}h_i|\nabla_{\tilde{x}}v_i^- -\nabla_{\tilde{x}}\varphi_i|^2dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\zeta_0-\kappa_0(\varphi_0)\big)\big(v^+-\varphi_0\big)\,dx\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{D_i}\big(\zeta_i-h_i\kappa_0(\varphi_i)\big)\big(v_i^- -\varphi_i\big)dxdt+$$

$$+2\,\delta_{\alpha,1}\int\limits_0^T\int\limits_{D_1}\big(h_1^{-1}\mu_1-\kappa_1(\varphi_1)\big)\big(v_1^- -\varphi_1\big)dxdt+$$

$$+2\int\limits_0^T\int\limits_{D_2}\big(h_2^{-1}\mu_2-\kappa_2(\varphi_2)\big)\big(v_2^- -\varphi_2\big)dxdt\geq 0.$$

Поклавши в останній нерівності $\varphi_0=v^+-\lambda\psi_0(x,t)$, $\varphi_i=v_i^- -\lambda\psi_i(x,t)$, $i=1,2$, де $\lambda>0$ — довільне число, $\mathbf{v}=(\psi_0,\psi_1,\psi_2)$ — довільна функція з W, будемо мати

$$\lambda\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\psi_0^2dx+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2}\int\limits_{D_i}h_i\psi_i^2dx+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x\psi_0|^2dxdt+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{D_i}h_i|\nabla_{\tilde{x}}\psi_i|^2dx\,dt\right)+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\zeta_0-\kappa_0(v^+-\lambda\psi_0)\big)\psi_0dxdt+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{D_i}\big(\zeta_i-h_i\kappa_0(v_i^- -\lambda\psi_i)\big)\psi_i\,dxdt+$$

$$+2\,\delta_{\alpha,1}\int\limits_0^T\int\limits_{D_1}\big(h_1^{-1}\mu_1-\kappa_1(v_1^- -\lambda\psi_1)\big)\,\psi_1\,dxdt+$$

$$+2\int\limits_0^T\int\limits_{D_2}\big(h_2^{-1}\mu_2-\kappa_2(v_2^- -\lambda\psi_2)\big)\,\psi_2\,dxdt\geq 0.$$

Перейдемо до границі при $\lambda\to 0$, врахувавши неперервність функцій κ_0, κ_1 та κ_2:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\zeta_0-\kappa_0(v^+)\big)\psi_0dxdt+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^T\int\limits_{D_i}\big(\zeta_i-h_i\kappa_0(v_i^-)\big)\psi_i\,dxdt+$$

$$+2\,\delta_{\alpha,1}\int\limits_0^T\int\limits_{D_1}\left(h_1^{-1}\mu_1-\kappa_1(v_1^-)\right)\,\psi_1\,dxdt+$$

$$+2\int\limits_0^T\int\limits_{D_2}\left(h_2^{-1}\mu_2-\kappa_2(v_2^-)\right)\,\psi_2\,dxdt\geq 0.$$

Поклавши $\psi_i := -\psi_i,\ i = 0,1,2$, переконаємося, що в останній нерівності насправді має місце рівність. Оскільки $\mathbf{v} = (\psi_0,\psi_1,\psi_2)$ — довільна функція з W, то робимо висновок, що $\zeta_0 = \kappa_0(v^+)$ майже скрізь в $\Omega_0\times(0,T)$, $\zeta_1+2\delta_{\alpha,1}h_1^{-1}\mu_1 = h_1\kappa_0(v_1^-)+2\delta_{\alpha,1}\kappa_1(v_1^-)$ майже скрізь в $D_1\times(0,T)$, $\zeta_2+2h_2^{-1}\mu_2 = h_2\kappa_0(v_2^-)+2\kappa_2(v_2^-)$ майже скрізь в $D_2\times(0,T)$.

Таким чином, з останніх співвідношень та з (27) випливає, що багатозначна листова функція $\mathbf{U_0}$, визначена формулою (8), дійсно є слабким розв'язком задачі (9). На підставі умов (5) такий розв'язок єдиний.

Оскільки всі наведені вище міркування мають місце для довільної підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яка вибиралася на початку доведення, то внаслідок єдиності розв'язку усередненої задачі (9) справедливі границі (7).

Теорему доведено.

6. Доведення теореми 2. Випадок $\boldsymbol{\alpha < 1}$. Як і в першому пункті доведення теореми 1, з оцінки (18) отримаємо, що існує підпослідовність $\{\varepsilon'\}\subset\{\varepsilon\}$ (яку ми знову позначимо через $\{\varepsilon\}$) така, що мають місце границі (22).

З нерівності (19) знаходимо

$$\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon^2 d\sigma_x dt\leq C_1\varepsilon^{1-\alpha}. \tag{29}$$

Тоді на підставі (14) з урахуванням (18) та (29) маємо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon^2 dx\,dt\leq C_2\varepsilon^{\vartheta}, \tag{30}$$

де $\vartheta=\min(1,1-\alpha)>0$. Таким чином,

$$\widetilde{v_\varepsilon}^{(1)}\xrightarrow{s}0\quad\text{сильно в}\quad L^2\big(D_1\times(0,T)\big)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Як і в пункті 5.2 доведення теореми 1, можна показати, що $\gamma_j^{(1)}=0$ в $D_1\times(0,T)$, $\gamma_j^{(2)}=h_2\partial_{x_j}v_2^-$ в $D_2\times(0,T)$, $j=1,3$, $\gamma_2^{(i)}=0$ в $D_i\times(0,T)$, $i=1,2$.

Повторюючи міркування з пункту 5.3 доведення теореми 1 та враховуючи знайдені вище границі, отримуємо

$$v^+|_{Q_0}=v_2^-|_{Q_0}=0\quad\text{в сенсі сліду для майже всіх}\quad t\in(0,T). \tag{31}$$

Розглянемо простори Соболєва функцій, слід яких дорівнює нулю на бічній поверхні Q_0 циліндра Ω_0: $H^1(\Omega_0, Q_0) = \{v \in H^1(\Omega_0) \colon v|_{Q_0} = 0\}$, $H^1(D_2, Q_0) = \{v \in H^1(D_2) \colon v|_{Q_0} = 0\}$. Для довільних $\varphi_0 \in H^1(\Omega_0, Q_0)$, $\varphi_2 \in H^1(D_2, Q_0)$ та $\eta \in C^1([0,T])$ визначимо функцію

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \varphi_0(x)\eta(t), & (x,t) \in \Omega_0 \times (0,T), \\ 0, & (x,t) \in G_\varepsilon^{(1)} \times (0,T), \\ \varphi_2(x)\eta(t), & (x,t) \in G_\varepsilon^{(2)} \times (0,T). \end{cases}$$

Очевидно, що $\psi \in W_\varepsilon$. Підставимо ψ в тотожність для розв'язку (23):

$$\int\limits_{\Omega_0} (v_\varepsilon \varphi_0 \eta)|_{t=T} dx + \int\limits_{D_2} (\widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} \varphi_2 \eta)|_{t=T} dx - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} v_\varepsilon \varphi_0 \eta' dx dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_{D_2} \widetilde{v_\varepsilon}^{(2)} \varphi_2 \eta' dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} \big(\nabla_x v_\varepsilon \cdot \nabla_x \varphi_0 + \kappa_0(v_\varepsilon)\varphi_0\big) \eta dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \left(\int\limits_{D_2} \big(\widetilde{\nabla_x v_\varepsilon}^{(2)} \cdot \nabla_x \varphi_2 + \widetilde{\kappa_0(v_\varepsilon)}^{(2)} \varphi_2\big) dx + \varepsilon \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \kappa_2(v_\varepsilon)\varphi_2 d\sigma_x \right) \eta dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left(\int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon \varphi_0 dx + \int\limits_{D_2} \chi_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon \varphi_2 dx + \varepsilon^\beta \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} g_\varepsilon \varphi_2 d\sigma_x \right) \eta dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm \varphi_0 \eta d\tilde{x} dt.$$

Переходячи до границі в цій тотожності при $\varepsilon \to 0$ з урахуванням (2)–(4), (20) та (22), знаходимо

$$\int\limits_{\Omega_0} (v^+ \varphi_0 \eta)|_{t=T} dx + \int\limits_{D_2} (h_2 v_2^- \varphi_2 \eta)|_{t=T} dx - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} v^+ \varphi_0 \eta' dx dt -$$

$$- \int\limits_0^T \int\limits_{D_2} h_2 v_2^- \varphi_2 \eta' dx dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} \big(\nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi_0 + \zeta_0 \varphi_0\big) \eta dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{D_2} (\nabla_{\tilde{x}} v_2^- \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi_2 + \zeta_2 \varphi_2 + 2h_2^{-1} \mu_2 \varphi_2) \eta dx dt =$$

$$= \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f_0 \varphi_0 dx + \int_{D_2} h_2 f_0 \varphi_2 dx + 2\delta_{\beta,1} \int_{D_2} g_0 \varphi_2 dx \right) \eta dt +$$

$$+ \int_0^T \int_{S^\pm} q_0^\pm \varphi_0 \eta d\tilde{x} dt.$$

Оскільки мають місце співвідношення (31), то остання тотожність еквівалентна наступним двом тотожностям:

$$\int_{\Omega_0} (v^+ \varphi_0 \eta)|_{t=T} dx - \int_0^T \int_{\Omega_0} v^+ \varphi_0 \eta' dx dt +$$

$$+ \int_0^T \int_{\Omega_0} \big(\nabla_x v^+ \cdot \nabla_x \varphi_0 + \zeta_0 \varphi_0\big) \eta dx dt =$$

$$= \int_0^T \left(\int_{\Omega_0} f_0 \varphi_0 dx + \int_{S^\pm} q_0^\pm \varphi_0 d\tilde{x} \right) \eta dt \tag{32}$$

для всіх $\varphi_0 \in H^1(\Omega_0, Q_0)$, $\eta \in C^1([0,1])$ та

$$\int_{D_2} (h_2 v_2^- \varphi_2 \eta)|_{t=T} dx - \int_0^T \int_{D_2} h_2 v_2^- \varphi_2 \eta' dx dt +$$

$$+ \int_0^T \int_{D_2} (h_2 \nabla_{\tilde{x}} v_2^- \cdot \nabla_{\tilde{x}} \varphi_2 + \zeta_2 \varphi_2 + 2\, h_2^{-1} \mu_2 \varphi_2) \eta dx dt =$$

$$= \int_0^T \int_{D_2} (h_2 f_0 + 2\delta_{\beta,1} g_0) \varphi_2 \eta dx dt \tag{33}$$

для всіх $\varphi_2 \in H^1(D_2, Q_0), \eta \in C^1([0,T])$.

Множина функцій $\{\varphi_0 \eta \colon \varphi_0 \in H^1(\Omega_0, Q_0), \eta \in C^1([0,1])\}$ щільна у просторі $W_0 = \{v \in L^2\big(0,T; H^1(\Omega_0, Q_0)\big) \colon v' \in L^2\big(0,T; (H^1(\Omega_0, Q_0))^*\big)\}$, а множина $\{\varphi_2 \eta \colon \varphi_0 \in H^1(D_2, Q_0), \eta \in C^1([0,1])\}$ щільна у просторі $W_2 = \{v \in L^2\big(0,T; \widetilde{H}^1(D_2, Q_0)\big) \colon v' \in L^2\big(0,T; (\widetilde{H}^1(D_2, Q_0))^*\big)\}$, де $\widetilde{H}^1(D_2, Q_0) = \{v \in L^2(D_2) \colon \exists \partial_{x_j} v \in L^2(D_2),\ j = 1,3,\ v|_{r=d_0} = 0\}$ — анізотропний простір Соболєва. Цей факт означає, що v^+ є узагальненим розв'язком задачі

$$\begin{gathered} \partial_t v^+ - \Delta v^+ + \zeta_0 = f_0 \quad \text{в} \quad \Omega_0 \times (0,T), \\ v^+ = 0 \quad \text{на} \quad Q_0 \times (0,T), \quad \partial_\nu v^+ = q_0^\pm \quad \text{на} \quad S^\pm \times (0,T), \quad v^+\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0, \end{gathered} \tag{34}$$

з поки що невідомою функцією ζ_0, а v_2^- — узагальненим розв'язком задачі

$$h_2\partial_t v_2^- - \mathrm{div}_{\tilde{x}}(h_2\nabla_{\tilde{x}} v_2^-) + \zeta_2 + 2h_2^{-1}\mu_2 = h_2 f_0 + 2\,\delta_{\beta,1} g_0 \quad \text{в} \quad D_2 \times (0,T), \tag{35}$$

$$v_2^- = 0 \quad \text{на} \quad Q_0 \times (0,T), \quad \partial_\nu v_2^- = 0 \quad \text{на} \quad Q_2 \times (0,T), \quad v_2^-\big|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_2,$$

з невідомими поки що функціями ζ_2 та μ_2.

Знайдемо функції ζ_0, ζ_2, та μ_2 за допомогою метода Браудера – Мінті. В інтегральну тотожність (23) підставимо як тестову функцію розв'язок v_ε:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^2(x,T)dx + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\left(|\nabla_x v_\varepsilon|^2 + \kappa_0(v_\varepsilon)v_\varepsilon\right)dxdt +$$

$$+\varepsilon^\alpha \int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}} \kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt + \varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \kappa_2(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt =$$

$$= \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\, v_\varepsilon dx + \varepsilon^\beta\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon} g_\varepsilon v_\varepsilon\, d\sigma_x + \int\limits_{S^\pm} q_\varepsilon^\pm v_\varepsilon\, d\tilde{x}\right)dt.$$

З умов (2) – (4) та (22) випливає, що границя правої частини попередньої рівності при $\varepsilon \to 0$ дорівнює

$$\widetilde{I}_1 := \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_0} f_0 v^+ dx + \int\limits_{D_2} h_2 f_0 v_2^-\; dx 2\,\delta_{\beta,1} + \int\limits_{D_2} g_0 v_2^- dx + \int\limits_{S^\pm} q_0^\pm v^+ d\tilde{x}\right)dt,$$

а беручи до уваги тотожності (32) та (33) з тестовими функціями v^+ та v_2^-, маємо

$$\widetilde{I}_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}(v^+)^2|_{t=T}dx +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\left(|\nabla_x v^+|^2 + \zeta_0 v^+\right)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{D_2} h_2\;(v_2^-)^2|_{t=T}dx +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{D_2}(h_2|\nabla_{\tilde{x}} v_2^-|^2 + \zeta_2 v_2^- + 2h_2^{-1}\mu_2 v_2^-)dxdt. \tag{36}$$

Виберемо довільні $\varphi_0 \in W_0$ та $\varphi_2 \in W_2$. З очевидної нерівності

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\left(v_\varepsilon(x,T) - \varphi_0(x,T)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}\left(v_\varepsilon(x,T) - \varphi_2(x,T)\right)^2 dx +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x v_\varepsilon - \nabla_x\varphi_0|^2 dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}|\nabla_{\tilde{x}} v_\varepsilon - \nabla_{\tilde{x}}\varphi_2|^2\, dxdt +$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\kappa_0(v_\varepsilon)-\kappa_0(\varphi_0)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_0\big)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}\big(\kappa_0(v_\varepsilon)-\kappa_0(\varphi_2)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_2\big)dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}}\big(\kappa_0(v_\varepsilon)-\kappa_0(0)\big)v_\varepsilon dxdt+\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\big(\kappa_2(v_\varepsilon)-\kappa_2(\varphi_2)\big)\big(v_\varepsilon-\varphi_2\big)d\sigma_x dt\geq 0$$

$\big($тут враховано умову (5)$\big)$ отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon}v_\varepsilon^2(x,T)\,dx+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\big(|\nabla_x v_\varepsilon|^2+\kappa_0(v_\varepsilon)v_\varepsilon\big)dxdt+$$

$$+\varepsilon^\alpha\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(1)}}\kappa_1(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}}\kappa_2(v_\varepsilon)v_\varepsilon d\sigma_x dt-$$

$$-\int\limits_{\Omega_0}v_\varepsilon(x,T)\varphi_0(x,T)dx-\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}v_\varepsilon(x,T)\varphi_2(x,T)dx-$$

$$-2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\nabla_x v_\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi_0 dx\,dt-2\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}\nabla_{\tilde{x}}v_\varepsilon\cdot\nabla_{\tilde{x}}\varphi_2 dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\big(\varphi_0(x,T)\big)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}\big(\varphi_2(x,T)\big)^2\,dx+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}|\nabla_x\varphi_0|^2\,dx\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}}|\nabla_{\tilde{x}}\varphi_2|^2\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_0}\big(\kappa_0(\varphi_0)\varphi_0-\kappa_0(v_\varepsilon)\,\varphi_0-\kappa_0(\varphi_0)v_\varepsilon\big)dx\,dt-$$

$$-\kappa_0(0)\int_0^T\int_{G_\varepsilon^{(1)}} v_\varepsilon dxdt + \int_0^T\int_{G_\varepsilon^{(2)}} \big(\kappa_0(\varphi_2)\varphi_2 - \kappa_0(v_\varepsilon)\,\varphi_2 - \kappa_0(\varphi_2)v_\varepsilon\big)dx\,dt +$$

$$+\varepsilon\int_0^T\int_{\Upsilon_\varepsilon^{(2)}} \big(\kappa_2(\varphi_2)\varphi_2 - \kappa_2(v_\varepsilon)\varphi_2 - \kappa_2(\varphi_2)v_\varepsilon\big)d\sigma_x\,dt \geq 0.$$

Перейдемо в цій нерівності до границі при $\varepsilon \to 0$. Границя перших двох рядків визначається з рівності (36), а границі решти доданків знайдемо, використавши оператори продовження нулем і співвідношення (20) та (22). В результаті одержимо

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \big(v^+(x,T) - \varphi_0(x,T)\big)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{D_2} h_2\big(v_2^-(x,T) - \varphi_2(x,T)\big)^2 dx +$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_0} |\nabla_x v^+ - \nabla_x\varphi_0|^2 dxdt + \int_0^T\int_{D_2} h_2|\nabla_{\tilde{x}} v_2^- - \nabla_{\tilde{x}}\varphi_2|^2 dx\,dt +$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_0} \big(\zeta_0 - \kappa_0(\varphi_0)\big)\big(v^+ - \varphi_0\big)\,dx\,dt +$$

$$+\int_0^T\int_{D_2} \big(\zeta_2 - h_2\kappa_0(\varphi_2)\big)\big(v_2^- - \varphi_2\big)dxdt +$$

$$+2\int_0^T\int_{D_2} \big(h_2^{-1}\mu_2 - \kappa_2(\varphi_2)\big)\big(v_2^- - \varphi_2\big)dxdt \geq 0.$$

Далі, поклавши в останній нерівності $\varphi_0 = v^+ - \lambda\psi_0,\ \varphi_2 = v_2^- - \lambda\psi_2$, де $\lambda > 0$ — довільне число, ψ_0, ψ_2 — довільні функції з W_0 та з W_2 відповідно, як в останній частині пункту 5.5 доведення теореми 1, виводимо

$$\begin{aligned} &\zeta_0 = \kappa_0(v^+) && \text{майже скрізь в}\quad \Omega_0 \times (0,T), \\ &\zeta_2 + 2h_2^{-1}\mu_2 = h_2\kappa_0(v_2^-) + 2\kappa_2(v_2^-) && \text{майже скрізь в}\quad D_2 \times (0,T). \end{aligned} \tag{37}$$

Таким чином, із першого співвідношення в (37) та з (32) випливає, що функція v^+ є слабким розв'язком задачі (11), а з другого співвідношення в (37) та з (33) випливає, що функція v_2^- — слабкий розв'язок задачі (12). На підставі умов (5) кожна з задач має єдиний розв'язок.

Оскільки всі наведені вище міркування мають місце для довільної підпослідовності $\{\varepsilon\}$, яка вибиралася на початку доведення, то внаслідок єдиності розв'язків задач (11) і (12) справедливі границі (10).

Теорему доведено.

1. *Хруслов Е. Я.* О резонансных явлениях в одной задаче дифракции // Теория функций, функцион. анализ и его прил. – 1968. – **10**. – С. 113 – 120.
2. *Котляров В. П., Хруслов Е. Я.* О предельном граничном условии одной задачи Неймана // Теория функций, функцион. анализ и его прил. – 1970. – **10**. – С. 83 – 96.
3. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974.
4. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотическая структура спектра в задаче о гармонических колебаниях ступицы с тяжелыми спицами // Докл. РАН. – 1993. – **333**. – С. 13 – 15.
5. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа „густого гребешка" // Труды сем. им. И. Г. Петровского. – 1996. – **19**. – С. 138 – 174.
6. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Z. Anal. und Anwendungen. – 1999. – **18**, № 4. – S. 953 – 975.
7. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. – 2000. – **12**, № 2. – С. 188 – 238.
8. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of a singularly perturbed parabolic problem in a thick periodic junction of the type 3:2:1 // Ukr. Mat. Zh. – 2000. – **52**, № 11. – P. 1524 – 1534.
9. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей // Труды сем. им. И. Г. Петровского. – 1995. – **18**. – Ч. I. – С. 1 – 78; 2000. – **20**. – Ч. II. – С. 155 – 196.
10. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of a boundary value problem with a nonlinear boundary condition in a thick junction of type 3:2:1 // Math. Models and Meth. Appl. Sci. – 2008. – **31**. – P. 1005 – 1027; http://www.interscience.wiley.com/DOI: 10.1002/mma.951
11. *Blanchard D., Gaudiello A., Mel'nyk T. A.* Boundary homogenization and reduction of dimension in a Kirchhoff-Love plate // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – **39**, № 6. – P. 1764 – 1787.
12. *Blanchard D., Gaudiello A., Griso G.* Junction of a periodic family of elastic rods with 3d plate. Part I // J. math. pures ed appl. – 2007. – **88**, № 9. – Pt I. – P. 1 – 33; Pt II. – P. 149 – 190.
13. *Мельник Т. А., Чечкин Г. А.* Асимптотический анализ краевых задач в густых трехмерных многоуровневых соединениях // Мат. сб. – 2009. – **200**, № 3. – С. 49 – 74.
14. *Mel'nyk T. A.* Eigenmodes and pseudo-eigenmodes of thick multi-level junctions // Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction-2004" (St.Petersburg, June 29 – July 2, 2004). – St.Petersburg, 2004. – P. 51 – 52.
15. *De Maio U., Durante T., Mel'nyk T. A.* Asymptotic approximation for the solution to the Robin problem in a thick multi-level junction // Math. Models and Meth. Appl. Sci. – 2005. – **15**, № 12. – P. 1897 – 1921.
16. *Мельник Т. А., Ващук П. С.* Усреднение краевой задачи со сменным типом граничных условий в густом соединении // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 5. – С. 677 – 685.
17. *Durante T., Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of a parabolic problem in a thick two-level junction // J. Math. Phys., Anal., Geometry. – 2007. – **3**, № 3. – P. 313 – 341.
18. *De Maio U., Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Robin problem for the Poisson equation in a thick multi-structure of type 3:2:2 // Asympt. Anal. – 2005. – **41**. – P. 161 – 177.
19. *D'Apice C., De Maio U., Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of a perturbed parabolic problem in a thick junction of type 3:2:2 // Networks and Heterogeneous Media. – 2007. – **2**, № 2. – P. 255 – 277.
20. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1975.
21. *Мельник Т. А., Сивак Е. А.* Асимптотический анализ параболической полулинейной задачи с нелинейными граничными многофазовыми взаимодействиями в перфорированной области // Проблемы мат. анализа. – 2009. – **43**. – С. 107 – 128.
22. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.
23. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.

Одержано 25.01.11