УДК 517.9

М. Н. Феллер (УкрНИИ «Ресурс», Киев)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДИВЕРГЕНТНОЙ ЧАСТЬЮ И С ЛАПЛАСИАНОМ ЛЕВИ

We propose an algorithm for the solution of the boundary-value problem $U(0,x) = u_0$, $U(t,0) = u_1$ and the external boundary-value problem $U(0,x) = v_0$, $U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1$, $\lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = v_2$ for the nonlinear hyperbolic equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x)$$

with divergent part and infinite-dimensional Lévy Laplacian Δ_L.

Для нелінійного гіперболічного рівняння з дивергентною частиною та з нескінченновимірним лапласіаном Леві Δ_L

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x)$$

запропоновано алгоритм розв'язку крайової задачі $U(0,x) = u_0$, $U(t,0) = u_1$ та крайової зовнішньої задачі $U(0,x) = v_0$, $U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1$, $\lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = v_2$.

1. Введение. Теории линейных гиперболических уравнений с лапласианом Леви посвящены работы [1 – 3]. В то же время публикации по теории нелинейных гиперболических уравнений с лапласианом Леви отсутствуют.

В настоящей статье приведены алгоритм решения краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с дивергентной частью и с лапласианом Леви

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x), \quad t > 0, \quad x \in H,$$

$$U(0,x) = u_0, \qquad U(t,0) = u_1,$$

и алгоритм решения краевой внешней задачи для нелинейного гиперболического уравнения с дивергентной частью и с лапласианом Леви

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0,x) = v_0, \qquad U(t,x)\Big|_{\Gamma} = v_1, \qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = v_2.$$

Здесь $\Gamma\bigcup\Omega' = \{x \in H\colon Q(x) \geq R^2\}$, а функция $Q(x)$ такова, что $\Delta_L Q(x) = \gamma$ (γ — положительная постоянная).

2. Предварительные сведения. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан ввел П. Леви [4]. Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0, лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (F''(x_0)f_k, f_k)_H, \tag{1}$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H.

Приведем свойство лапласиана Леви (1), полученное в [4], которое понадобится в дальнейшем (см. также [5]).

Пусть функция

$$F(x) = f\Big(S_1(x), \ldots, S_m(x)\Big),$$

где $f(s_1, \ldots, s_m)$ — непрерывно дифференцируемая функция в области значений $\{S_1(x), \ldots$ $\ldots, S_m(x)\} \subset \mathbf{R^m}$. Пусть $S_k(x)$ — равномерно непрерывные, сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L S_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, существует. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial s_k}\Big|_{s_k = S_k(x)} \Delta_L S_k(x). \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{C}$ шиловский класс функций — совокупность функций вида

$$F(x) = f\left((a_1, x)_H, \ldots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right),$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — некоторые элементы пространства H, $f(\xi_1, \ldots, \xi_m, \zeta)$ — функция $m+1$ переменных, определенная и непрерывная в области $\mathbf{R^{m+1}}$.

Обозначим через $\mathfrak{C}^*$ подмножество функций из $\mathfrak{C}$, непрерывно дифференцируемых по аргументу $\dfrac{\|x\|_H^2}{2}$. Тогда для $F(x) \in \mathfrak{C}^*$ имеет место формула [6]

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f((a_1, x)_H, \ldots, (a_m, x)_H, \zeta)}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta = \frac{\|x\|_H^2}{2}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{C}^\star$ подмножество функций из $\mathfrak{C}^*$, зависящих лишь от $\dfrac{\|x\||_H^2}{2}$. Тогда

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta = \frac{\|x\|_H^2}{2}} \tag{3}$$

для $F(x) \in \mathfrak{C}^\star$.

Лапласиан Леви в шиловском классе функций не зависит от выбора базиса.

Обозначим через Ω ограниченную область в гильбертовом пространстве H (т. е. ограниченное открытое множество в H), через $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ область в пространстве H с поверхностью Γ.

Определим область Ω с поверхностью Γ следующим образом:

$$\Omega = \{x \in H : 0 \le Q(x) < R^2\}, \qquad \Gamma = \{x \in H : Q(x) = R^2\},$$

где $Q(x)$ — дважды сильно дифференцируемая функция такая, что $\Delta_L Q(x) = \gamma$, γ — постоянное положительное не равное нулю число. Такие области и такие поверхности называют фундаментальными.

Пусть также $\lim_{\|x\|_H \to \infty} Q(x) = \infty$.

Обозначим через Ω' множество точек $x \in H$, внешних по отношению к $\overline{\Omega}$:

$$\Omega' = \{x \in H\colon\ Q(x) > R^2\}.$$

Примеры:

1. Шар $\overline{\Omega} = \{x \in H\colon \|x\|_H^2 \le R^2\}$,

$$\Omega' = \{x \in H\colon\ \|x\|_H^2 > R^2\}, \qquad \Gamma = \{x \in H\colon \|x\|_H^2 = R^2\}.$$

2. Эллипсоид $\overline{\Omega} = \{x \in H : (Bx, x)_H \le R^2\}$, где $B = \gamma E + A$, $\quad E$ — единичный оператор, а A — вполне непрерывный оператор в H,

$$\Omega' = \{x \in H :\ (Bx, x)_H > R^2\}, \qquad \Gamma = \{x \in H :\ (Bx, x)_H = R^2\}.$$

Введем функцию

$$S(x) = \frac{Q(x) - R^2}{\gamma}.$$

Функция $S(x)$ обладает такими свойствами:

$$S(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega', \qquad S(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \qquad \Delta_L S(x) = 1.$$

3. Краевая задача. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x), \quad t > 0, \quad x \in H, \tag{4}$$

$$U(0,x) = u_0, \qquad U(t,0) = u_1, \tag{5}$$

где $U(t,x)$ — функция на $[0,\infty) \times H$, $k(\xi)$ — заданная функция на $\mathbf{R^1}$, числа u_0, u_1 заданы.

Теорема 1. *Пусть $k(\xi)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R^1}$. Тогда решение задачи* (4), (5) *имеет вид*

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}}\right), \tag{6}$$

где $\varphi(z)$ — решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения с дивергентной главной частью

$$\frac{d}{dz}\left[k(\varphi(z))\frac{d\varphi(z)}{dz}\right] = -2z\frac{d\varphi(z)}{dz}, \tag{7}$$

$$\varphi(0) = u_0, \qquad \varphi(z)\Big|_{z=\infty} = u_1. \tag{8}$$

Решение задачи (4), (5) *существует* (*существует и единственно*), *если существует* (*существует и единственно*) *решение задачи* (7), (8).

Решение $U(t,x) \in C^1([0,\infty)) \times \mathfrak{C}^{\star}$.

Доказательство. Согласно формуле (3) в классе функций $C^1([0,\infty)) \times \mathfrak{C}^{\star}$ уравнение (4) и условия (5) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k\left(u(t,\varsigma)\right)\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t}\right] = \frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \varsigma}\bigg|_{\varsigma=\frac{\|x\|_H^2}{2}}, \tag{9}$$

$$u(0,\varsigma) = u_0, \qquad u(t,0) = u_1. \tag{10}$$

Уравнение (9) не изменяется при замене переменных $\bar{t} = ct$, $\bar{\varsigma} = c^2\varsigma$ при любых t, ς, c.

Действительно, поскольку $\dfrac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t} = c\dfrac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \bar{t}}$, $\dfrac{\partial u(\bar{t},\bar{\varsigma})}{\partial \varsigma} = c^2\dfrac{\partial u(\bar{t},\bar{\varsigma})}{\partial \bar{\varsigma}}$, из (9) имеем $c\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[k(u(t,\varsigma))c\dfrac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \bar{t}}\right] = c^2\dfrac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \varsigma}$, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[k(u(t,\varsigma))\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \bar{t}}\right] = \frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \bar{\varsigma}}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left[k(u(\bar{t},\bar{\varsigma}))\frac{\partial u(\bar{t},\bar{\varsigma})}{\partial \bar{t}}\right] = \frac{\partial u(\bar{t},\bar{\varsigma})}{\partial \bar{\varsigma}},$$

ибо равенство (9) выполняется для любых t, ς.

Не изменяются и условия (10).

Сравнивая два последних равенства, получаем $u(t,\varsigma) = u(\bar{t},\bar{\varsigma})$, т. е.

$$u(t,\varsigma) = u(ct, c^2\varsigma).$$

Полагая $c = \dfrac{1}{2\sqrt{\varsigma}}$, находим

$$u(t,\varsigma) = u\left(\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}, \frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\varsigma}}\right) = \varphi(z) \qquad \left(z = \frac{t}{2\sqrt{\varsigma}},\ \zeta = \frac{\|x\|_H^2}{2}\right), \tag{11}$$

т. е. $u(t,\varsigma)$ зависит только от аргумента $z = \dfrac{t}{2\sqrt{\varsigma}}$.

Из (11) имеем

$$\frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\varsigma}}\frac{d\varphi(z)}{dz}, \qquad \frac{\partial u(t,\varsigma)}{\partial \varsigma} = -\frac{z}{2\varsigma}\frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9) и условия (10), получаем для функции $\varphi(z)$ обыкновенное дифференциальное уравнение (7) и условия (8).

Таким образом, решение задачи (4), (5) имеет вид (6), поскольку согласно (11)

$$U(t,x) = u(t,\varsigma)\Big|_{\varsigma=\frac{\|x\|_H^2}{2}} = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}}\right),$$

где $\varphi(z)$ — решение задачи (7), (8).

Из (6) следует, что $U(t,x) \in C^1([0,\infty)) \times \mathfrak{C}^\star$.

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Для волнового уравнения с лапласианом Леви (т. е. при $k(\xi)=1$) из теоремы 1 следует, что решение задачи*

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t,x) = 0, \quad t>0, \quad x\in H,$$

$$U(0,x) = u_0, \qquad U(t,0) = u_1$$

имеет вид

$$U(t,x) = (u_1-u_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-\xi^2} d\xi + u_0.$$

Действительно, в случае $k(\xi)=1$ задача (7), (8) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} = -2z\frac{d\varphi(z)}{dz},$$

$$\varphi(z) = u_0, \qquad \varphi(z)\Bigg|_{z=\infty} = u_1.$$

Ее решение

$$\varphi(z) = (u_1-u_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\varsigma^2} d\varsigma + u_0.$$

Согласно теореме 1

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2}}\right) = (u_1-u_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/2\sqrt{\frac{\|x\|_H^2}{2}}} e^{-\xi^2} d\xi + u_0.$$

4. Краевая задача (внешняя). Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k(U(t,x))\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right] = \Delta_L U(t,x), \quad t>0, \quad x\in\Omega', \tag{12}$$

$$U(0,x)=v_0,\qquad U(t,x)\Big|_{\Gamma}=v_1,\qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty}U(t,x)=v_2, \tag{13}$$

где $U(t,x)$ — функция на $[0,\infty)\times\Omega'$, $k(\xi)$ — заданная функция на $\mathbf{R^1}$, числа v_0, v_1 заданы, $v_2=v_0$.

Здесь $\Gamma\bigcup\Omega'=\{x\in H\colon Q(x)\geq R^2\}$, $Q(x)$ — дважды сильно дифференцируемая функция, такая, что $\Delta_L Q(x)=\gamma$ (γ — положительная постоянная).

Теорема 2. *Пусть $k(\xi)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R^1}$. Тогда решение задачи* (12), (13) *имеет вид*

$$U(t,x)=\varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}\right), \tag{14}$$

где $S(x)=\dfrac{Q(x)-R^2}{\gamma}$, а $\varphi(w)$ — решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения с дивергентной главной частью

$$\frac{d}{dw}\left[k(\varphi(w))\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]=-2w\frac{d\varphi(w)}{dw}, \tag{15}$$

$$\varphi(0)=v_0,\quad \varphi(w)\Bigg|_{w=\infty}=v_1. \tag{16}$$

Решение задачи (12), (13) *существует* (*существует и единственно*), *если существует* (*существует и единственно*) *решение задачи* (15), (16).

В частности, если $\overline{\Omega}$ — шар, то $\Gamma\bigcup\Omega'=\{x\in H\colon \|x\|_H^2\geq R^2\}$, $S(x)=\dfrac{\|x\|_H^2-R^2}{2}$, а $U(t,x)\in C^1([0,\infty))\times\mathfrak{C}^\star$.

Доказательство. Согласно формуле (2) при $m=1$ уравнение (12) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k\Bigg(u(t,\eta)\Bigg)\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t}\right]=\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\eta=S(x)}\Delta_L S(x).$$

Но $S(x)=\dfrac{Q(x)-R^2}{\gamma}$ и, значит, $\Delta_L S(x)=\dfrac{\Delta_L Q(x)}{\gamma}=1$. Поэтому имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[k\Bigg(u(t,\eta)\Bigg)\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t}\right]=\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial\eta}\Bigg|_{\eta=S(x)}, \tag{17}$$

$$u(0,\eta)=v_0,\qquad u(t,\eta)\Big|_{\eta=S(x)}=u_1. \tag{18}$$

Уравнение (17) и условия (18) не изменяются при преобразовании переменных $\bar t=ct$, $\bar\eta=c^2\eta$ при любых t, η, c. Поэтому $u(t,\eta)=u(ct,c^2\eta)$. Полагая $c=\dfrac{1}{2\sqrt{\eta}}$, находим

$$u(t,\eta)=\varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}\right)=\varphi(w)\qquad\left(w=\frac{t}{2\sqrt{\eta}},\quad \eta=S(x)\right) \tag{19}$$

$\left(\text{т. е. } u(t,\eta) \text{ зависит только от аргумента } w = \dfrac{t}{2\sqrt{\eta}}\right)$.

Из (19) имеем

$$\frac{\partial u(t,\eta)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}}\frac{d\varphi(w)}{dw}, \qquad \frac{\partial u(t,\eta)}{\partial \eta} = -\frac{w}{2\eta}\frac{d\varphi(w)}{dw}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17) и условия (18), получаем для функции $\varphi(w)$ обыкновенное дифференциальное уравнение (15) и условия (16).

Таким образом, решение задачи (12), (13) имеет вид (14), поскольку согласно (19)

$$U(t,x) = u(t,\eta)\Big|_{\eta=S(x)} = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}\right),$$

где $\varphi(w)$ — решение задачи (15), (16), $S(x) = \dfrac{Q(x)-R^2}{\gamma}$.

В частности, если $\Gamma\bigcup\Omega' = \{x \in H\colon \|x\|_H^2 \geq R^2\}$, то $S(x) = \dfrac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}$, а $U(t,x) \in$ $\in C^1([0,\infty)) \times \mathfrak{C}^\star$.

***Следствие* 2.** *Для волнового уравнения с лапласианом Леви* (*т. е. при* $k(\xi)=1$) *из теоремы* 2 *следует*, *что решение задачи*

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t,x) = 0, \quad t>0, \quad x\in\Omega',$$

$$U(0,x) = v_0, \qquad U(t,0) = v_1, \qquad \lim_{\|x\|_H\to\infty} U(t,x) = v_2, \quad v_2 = v_0,$$

имеет вид

$$U(t,x) = (v_1 - v_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/2\sqrt{S(x)}} e^{-\xi^2} d\xi + v_0,$$

где $S(x) = \dfrac{Q(x)-R^2}{\gamma}$.

Действительно, при $k(\xi)=1$ задача (15), (16) примет вид

$$\frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} = -2w\frac{d\varphi(w)}{dw},$$

$$\varphi(0) = v_0, \qquad \varphi(w)\Big|_{w=\infty} = v_1.$$

Ее решение

$$\varphi(w) = (v_1 - v_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^w e^{-\varsigma^2} d\varsigma + v_0.$$

Согласно теореме 2

$$U(t,x) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}\right) = (v_1 - v_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t/2\sqrt{S(x)}} e^{-\xi^2} d\xi + v_0.$$

1. *Феллер М. Н.* Краевые задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви в классе Гато // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1564 – 1574.
2. *Albeverio S., Belopolskaya Ya. I., Feller M. N.* Boundary problems for the wave equation with the Lévy Laplacian in Shilov’s class // Methods Funct. Anal. and Top. – 2010. – **16**, № 3. – P. 197 – 202.
3. *Альбеверио С. А., Белопольская Я. И., Феллер М. Н.* Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви // Мат. заметки. – 2010. – **87**, вып. 6. – С. 803 – 813.
4. *Lévy P.* Problémes concrets d’analyse fonctionnelle. – Paris: Gauthier-Villars, 1951. – 510 p.
5. *Feller M. N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153 p.
6. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. I // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – **1**, № 2. – С. 81 – 90.

Получено 09.06.11