КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

УДК 517.23

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

УМОВИ РІВНОВАГИ МІЖ ВИЖИВАННЯМ І БАНКРУТСТВОМ

Let ξ_t be a classic risk process or a risk process with stochastic premiums. We establish conditions for balance between ruin and survival in the case of zero initial capital $u = 0$ (ruin probability $q_+ = \Psi(0) = 1/2$, survival probability $p_+ = 1 - q_+ = 1/2$) and determine premium estimates under these conditions.

Пусть ξ_t — классический процесс риска или процесс риска со случайными премиями. Установлены условия равновесия между банкротством и выживанием при нулевом начальном капитале $u = 0$ (вероятность банкротства $q_+ = \Psi(0) = 1/2$, вероятность выживания $p_+ = 1 - q_+ = 1/2$) и определены премиальные оценки при этих условиях.

У монографії [1, с. 47] розглядались принципи оцінювання премій для процесу ризику $\xi_t = P_t - S_t$ (S_t — процес вимог, P_t — компенсаційна преміальна функція на $[0;t]$). Якщо $t = 1$, то для $S = S_1$, $P = P_1$ за функцією розподілу (ф. р.) вимог S на $[0;1]$

$$G_S(x) = \mathbf{P}\{S < x\}, \qquad \mathbf{E}S = \int x dG_S(x), \qquad \sigma^2(S) = \mathbf{D}S < \infty$$

вводяться функціонали для оцінювання компенсаційної премії $P_{(\cdot)} = \mathcal{F}_{(\cdot)}[G_S(x)]$.

Обмежимось першими трьома принципами, що пов'язані з моментами вимог $\mathbf{E}S, \sigma^2(S)$:

1) принцип математичного сподівання,

2) принцип середньоквадратичного відхилення,

3) дисперсійний принцип.

Відповідно з цими принципами компенсаційні оцінки премій визначаються співвідношеннями

$$P_{(a)} = \mathbf{E}S + \alpha_0 \mathbf{E}S = (1 + \alpha_0)\mathbf{E}S,$$

$$P_{(b)} = \mathbf{E}S + \alpha\sigma(S), \qquad \sigma(S) = \sqrt{DS}, \tag{1}$$

$$P_{(c)} = \mathbf{E}S + \beta\sigma^2(S);$$

де α_0, α, β — додатні рівневі параметри оцінок.

Спочатку вияснимо, які значення мають компенсаційні оцінки для C при умові рівноваги $p_+ = q_+ = 1/2$. Ці значення відмічатимемо індексом $*$, оскільки вони в певному сенсі є відправними при оцінюванні за умови $p_+ \neq q_+$.

1. Розглянемо $\xi_t = Ct - S_t$ — класичний резервний процес ризику, де $C > 0$, $S_t = \sum_{k \leq N_t} Y_k$ — процес вимог, N_t — пуассонів процес з інтенсивністю $\lambda > 0$,

$$\mathbf{E}S = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{r!} e^{-r} \lambda^r \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{r} Y_k\right] = \lambda \mathbf{E}Y_1, \qquad \mathbf{E}Y_1 = \mu_1 < \infty,$$
$$\mathbf{D}S = \lambda \mathbf{D}Y_1 = \lambda[\mu_2 - \mu_1^2], \quad \mu_2 = \mathbf{E}Y_1^2 < \infty. \tag{2}$$

Вияснимо питання про зв'язок імовірності банкрутства $q_+ = \Psi(0)$ та імовірності виживання $p_+ = 1 - q_+$ при $u = 0$ з коефіцієнтом страхової надбавки при умові $\mathbf{E}\xi_1 = C - \lambda\mu_1 > 0$

$$\delta = \frac{C - \mathbf{E}S}{\mathbf{E}S} = \frac{C - \lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} > 0, \qquad \mathbf{E}S = \lambda\mu_1 > 0. \tag{3}$$

Значення коефіцієнта страхової надбавки при $p_+ = q_+$ позначимо через δ_*, при $p_+ > q_+$ — через $\delta_> > \delta_*$, а при $p_+ < q_+$ — через $\delta_< < \delta_*$.

На основі встановленого зв'язку між p_+, q_+ та δ можна також оцінювати преміальне значення для C.

Як і в [2], для зручності замість резервного процесу ризику $\xi_{t,u} = u + \xi_t$ введемо надлишковий процес вимог

$$\zeta_t = S_t - Ct, \qquad \zeta_0 = 0, \qquad C > 0, \qquad m = \mathbf{E}\zeta_1 = \lambda\mu_1 - C < 0. \tag{4}$$

При умові (3) (тобто при $m < 0$) абсолютний максимум $\zeta^+ = \sup_{0 \le t < \infty} \zeta_t$ має невироджений розподіл, що визначає ймовірність банкрутства

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\}, \quad u \ge 0, \qquad \Psi(0) = q_+, \quad p_+ = 1 - q_+. \tag{5}$$

Зв'язок між δ та p_+, q_+ встановлено (див. [2, с. 372]) у наступній теоремі.

Теорема 1. *При умові* (3) *для процесу* (4) *має місце співвідношення*

$$\delta = \frac{C - \lambda\mu_1}{\lambda\mu_1} = \frac{p_+}{q_+}, \quad p_+ + q_+ = 1. \tag{6}$$

За умови рівноваги між виживанням та банкрутством ($p_+ = q_+$ *— аналог „чесної гри"*) *з* (6) *випливає, що оцінку інтенсивності надходження премій визначає значення* C_* *у співвідношенні*

$$\delta = \delta_* = \frac{C - \mathbf{E}S}{\mathbf{E}S} = 1 \Rightarrow C = C_* = 2\mathbf{E}S = 2\lambda\mu_1, \qquad P^*(t) = C_* t. \tag{7}$$

Надійніша (*за „чесну гру"*) *робота страхової компанії досягається при збільшенні* C, *тобто при* $\delta_> > \delta_* = 1$. *Тоді*

$$C_> = (1 + \delta_>)\mathbf{E}S, \qquad C > C_* = 2\mathbf{E}S, \quad p_+ > q_+, \qquad P(t) = C_> t. \tag{8}$$

Якщо $\delta = \delta_< < 1$, *то*

$$C_< = (1 + \delta_<)\mathbf{E}S, \qquad C_< < C_* = 2\mathbf{E}S, \quad p_+ < q_+, \qquad P(t) = C_< t. \tag{9}$$

Порівнянням оцінок (1) *з оцінкою для* C *з* (3) *в термінах* δ *встановлюється наближена залежність між коефіцієнтами страхової надбавки* δ *та рівневими параметрами* α, β:

$$\text{a)} \quad \alpha_0 = \delta, \qquad \text{b)} \quad \delta \sim \frac{\alpha\sigma(S)}{\mathbf{E}S}, \qquad \text{c)} \quad \delta \sim \frac{\beta\sigma^2(S)}{\mathbf{E}S}. \tag{10}$$

За умови рівноваги для цих параметрів мають місце співвідношення

$$\begin{gathered} \text{a)} \quad \alpha_0^* = \delta_* = 1, \qquad \text{b)} \quad \alpha_* \sim \frac{\mathbf{E}S}{\sigma(S)}, \qquad \text{c)} \quad \beta_* \sim \frac{\mathbf{E}S}{\sigma^{-2}(S)}, \\ P^*_{(a)} = 2\mathbf{E}S, \qquad P^*_{(b)} = \mathbf{E}S + \alpha_*\sigma(S), \qquad P^*_{(c)} = \mathbf{E}S + \beta_*\sigma^2(S). \end{gathered} \tag{11}$$

У випадку $p_+ \neq q_+$ $(\delta \neq 1)$, $\alpha = \delta\alpha_*$, $\beta = \delta\beta_*$

$$\begin{aligned} &P_{(a)} < P^*_{(a)} = 2\mathbf{E}S, \qquad P_{(b)} < P^*_{(b)}, \qquad P_{(c)} < P^*_{(c)} \qquad \text{при} \quad p_+ < q_+, \\ &P_{(a)} > P^*_{(a)}, \qquad P_{(b)} > P^*_{(b)}, \qquad P_{(c)} > P^*_{(c)} \qquad \text{при} \quad p_+ > q_+. \end{aligned} \tag{12}$$

Доведення. Справедливість співвідношення (6) випливає з таких міркувань. Для напівнеперервного знизу процесу ζ_t в таблиці II (див. [2, с. 536]) зібрано значення основних ризикових характеристик, що випливають із результатів § 3.1 та 5.1 в [2]. Зокрема, там наведено співвідношення для q_+ і p_+

$$q_+ = \lambda\mu_1 C^{-1}, \qquad p_+ = (C - \lambda\mu_1)C^{-1},$$

після підстановки яких у (3) легко одержати (6), а з (6) випливає (7).

Безпосереднім порівнянням усіх розглянутих в (1) та (3) оцінок встановлюються співвідношення (8) – (12).

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що забезпечення надійнішої роботи страхових компаній шляхом збільшення δ при незмінних $\mathbf{E}S$, $\mathbf{E}S^2$ не впливає на α_*, β_*, а отже, рівневі параметри α, β збільшуються пропорційно δ.

Результати для класичного випадку (див. ζ_t в (4)) ввійшли до монографії [4, с. 246], а також [2, с. 372]. Там після теореми 6.11 було вияснено залежність між p_+, q_+, δ, а також їх зв'язок з імовірністю обмеженості тотального часу перебування надлишкового процесу вимог у ризиковій („червоній”) зоні $y > 0$.

По-іншому виглядає умова рівноваги між виживанням та банкрутством для процесів ризику з випадковими преміями.

2. Нехай ζ_t — майже напівнеперервний знизу процес з випадковими преміями

$$\zeta_t = S_t - C(t), \qquad S(t) = \sum_{k \le N_1(t)} Y_k, \qquad C(t) = \sum_{k \le N_2(t)} X_k \neq Ct, \tag{13}$$

де $N_{1,2}(t)$ — пуассонові процеси з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0$, X_k – $\exp(b)$ — показниково розподілені, $0 < Y_k$, $k > 0$, — довільно розподілені. Має місце дещо відмінне від теореми 1 твердження, в якому розглядається лише оцінка а).

Теорема 2. *Нехай* ζ_t *(див.* (13)) — *надлишковий процес вимог з коефіцієнтом страхової надбавки*

$$\delta = \frac{\mathbf{E}C(1) - \mathbf{E}S}{\mathbf{E}S} = \frac{|m|}{\mathbf{E}S} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 b\mu_1}{\lambda_1 b\mu_1} > 0, \quad m = \mathbf{E}\zeta_1 < 0, \qquad \mathbf{E}S = \lambda_1\mu_1, \tag{14}$$

де

$$\mu_1 = \mathbf{E}Y_1, \qquad \mu_2 = \mathbf{E}Y_1^2, \qquad \mathbf{E}X_1 = b^{-1}, \qquad b\mu_1 = \frac{\mathbf{E}Y_1}{\mathbf{E}X_1} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \qquad \mathbf{E}C(1) = \lambda_2 b^{-1}. \tag{15}$$

Тоді має місце співвідношення зв'язку між α_0, δ *та* p_+, q_+

$$\alpha_0 = \delta = \frac{q - pb\mu_1}{pb\mu_1} = \frac{p_+}{q - p_+} = \frac{p_+}{q_+ - p}, \qquad p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad q = 1 - p. \tag{16}$$

1. *У випадку* $\lambda_2 > \lambda_1$ $(q > p)$ *можлива рівновага* $(p_+ = q_+)$, *в умовах якої*

$$\delta = \delta_* = \frac{1}{1-2p} = \frac{1}{q-p} > 1 \qquad (q > p, \ \ \alpha_0^* = \delta_*). \tag{17}$$

Для оцінки преміального середнього має місце співвідношення

$$\mathbf{E}C_*(1) = \frac{2q}{q-p}\mathbf{E}S, \qquad 1 + \delta_* = \frac{2q}{q-p} > 2. \tag{18}$$

2. *При умові* $\lambda_1 \geq \lambda_2$ $(p \geq q)$ *згідно з* (15) $b\mu_1 < 1$, *а згідно з* (16) *виконується нерівність*

$$q - p_+ > 0 \Rightarrow p_+ < q \leq \frac{1}{2}. \tag{19}$$

З (19) *випливає, що при* $\lambda_2 \leq \lambda_1$ *умова рівноваги неможлива, бо при цій умові завжди* $q_+ > \dfrac{1}{2}$.

Доведення. Для майже неперервних знизу процесів у згадуваній вище таблиці II із [2] зібрано також значення основних ризикових характеристик, одержаних у § 3.2, 5.2 [2]. Зокрема, в таблиці наведено значення

$$q_+ = p(1 + b\mu_1), \qquad p_+ = q - pb\mu_1. \tag{20}$$

Після підстановки (20) у (14) отримуємо (16). Оцінка (18) випливає з (14) і (17).

Щоб при $\lambda_2 > \lambda_1$, $m = \mathbf{E}\zeta_1 < 0$ забезпечити надійніші умови за „чесну гру” $(p_+ = q_+)$, достатньо збільшити λ_2, щоб збільшити $\delta > \delta_* = \dfrac{1}{q-p}$. Тоді збільшиться середнє

$$\mathbf{E}C(1) > \mathbf{E}C_*(1) = \frac{2q}{q-p}\mathbf{E}S. \tag{21}$$

Слід зазначити, що на практиці інтенсивність λ_1 повернення виплат застрахованим особам у нещасних випадках значно менша за інтенсивність оформлення страхових контрактів, тобто λ_2 значно перевищує λ_1. Тому можна вважати, що другий випадок $\lambda_1 \geq \lambda_2$ майже неможливий.

Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що при $m < 0$ у будь-якому випадку $(q_+ < p_+$ чи $q_+ \geq p_+)$ для обох процесів (4) і (13) при зростанні початкового капіталу $u > 0$ $\Psi(u)$ монотонно спадає. Зокрема, для процесу (4) згідно з наближенням Реньї (див. [2], таблиця V)

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} \sim \Psi_R(u) = q_+ e^{-\frac{2\delta\mu_1 u}{\mu_2(1+\delta)}}, \qquad q_+ = \frac{\lambda\mu_1}{C}, \quad u \to \infty. \tag{22}$$

При цьому збільшення δ в (22) прискорює спадання $\Psi_R(u)$ при $u \to \infty$.

Формулу, подібну до наближення Реньї для класичного процесу ризику (4), можна одержати і для процесу з випадковими преміями (13), якщо за наближення до ζ_t в (13) вибрати процес із задачі (20.2) в [3] з довільним $b > 0$:

$\zeta_0(t) = S_0(t) - C(t)$, $\mathbf{E}C(1) = \lambda_2 b^{-1}$ ($S_0(t)$ є „наближенням” $S(t)$),

$S_0(t) = \sum_{k \leq N_0(t)} Y_k^0$, $Y_k^0 - \exp(a)$, $N_0(t)$ — пуассонів процес з інтенсивністю λ_0.

Як і в прикладі 3.13 із [2], при умові $\mathbf{E}S_0(1)^k = \mathbf{E}S(1)^k$, $k = 1, 2$, та $m = \mathbf{E}\zeta_1 = \lambda_1\mu_1 - \lambda_2 b^{-1} < 0$ встановлюється зв'язок між параметрами ζ_t та $\zeta_0(t)$ в термінах перших двох моментів

$$\begin{cases}\lambda_1\mu_1 = \dfrac{\lambda_0}{a},\\ \lambda_1\mu_2 = \dfrac{2\lambda_0}{a^2},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_0 = a\lambda_1\mu_1,\\ \lambda_1\mu_2 = \dfrac{2\lambda_1\mu_1}{a},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \dfrac{2\mu_1}{\mu_2}, \ \ \lambda_0+\lambda_2 = \dfrac{2\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2}{\mu_2},\\ \lambda_0 = \dfrac{2\lambda_1\mu_1^2}{\mu_2}.\end{cases}$$

Рівняння Лундберга для $\zeta_0(t)$ при $\mathbf{E}\zeta_0(1) < 0$ зводиться до рівняння

$$\frac{\lambda_0}{a-r} = \frac{\lambda_2}{b+r} \Rightarrow \rho_+^0 = \frac{ab|m|}{\lambda_0+\lambda_2} = \frac{2\mu_1|m|b}{\mu_2(\lambda_0+\lambda_2)} = \frac{2\mu_1|m|b}{2\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2},$$
$$p_+^0 = \frac{\rho_+^0}{a} = \frac{b|m|}{\lambda_0+\lambda_2}, \qquad q_+^0 = 1 - \frac{b|m|}{\lambda_0+\lambda_2} = \frac{\lambda_0+b\lambda_1\mu_1}{\lambda_0+\lambda_2} = \frac{\lambda_1\mu_1(2\mu_1+\mu_2 b)}{2\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2}. \tag{23}$$

Єдиний додатний корінь рівняння Лундберга $r = \rho_+^0$ згідно з (3.105) в [2] при $m < 0$ визначає розподіл ζ_0^+ (а отже, і відповідне наближення $\Psi_0(u)$)

$$\Psi(u) \sim \Psi_0(u) = \mathbf{P}\{\zeta_0^+ > u\} = q_+^0 e^{-\rho_+^0 u}, \quad u > 0. \tag{24}$$

Значення q_+^0 та ρ_+^0 згідно з (23) виражаються в термінах моментів „наближуваного” процесу ζ_t, отже, при достатньо великих u має місце таке твердження.

Пропозиція. *Якщо за „наближення” до* ζ_t *в* (13) *вибрати вищевказаний процес* $\zeta_0(t)$, *то справджується співвідношення* (24) *з* q_+^0, ρ_+^0 *в* (23). *Після заміни у* $\Psi_0(u)$ q_+^0 *на* $q_+ = \Psi(0) = p(1+b\mu_1)$ *з* (24) *випливає наближення*

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} \sim \Psi_R^0(u) = q_+\, e^{-\frac{2\mu_1|m|b}{2\lambda_1\mu_1^2+\lambda_2\mu_2}}, \quad u \to \infty,$$

яке є аналогом наближення Реньї (22), *а наближення* (24) — *аналогом наближення* $\Psi_0(u)$ *в таблиці* V *із* [2] *для процесу* (4) *з* $C = 1$.

Отже, наближення Реньї (22) для процесу (13) з випадковими преміями від наближення Реньї для процесу (4) (див. $\Psi_R(y)$ у табл. V в [2]) відрізняються лише показником експоненти і для q_+ залежність від $\delta = \rho$ складніша, ніж у класичному випадку, коли $q_+ = \dfrac{1}{1+\rho}$.

Щоб проаналізувати всі випадки ($p_+ = q_+$, $p_+ \neq q_+$) при знаходженні оцінки для C, розглянемо простий приклад.

Приклад. Нехай ζ_t — неперервний знизу процес із прикладу 2.3 в [2] (або із задачі 20.3 в [3]) з позначенням параметрів у (4): $C = 1$, $\mathbf{E}e^{i\alpha Y_1} = \dfrac{c}{c-i\alpha}$, $c > 0$, $\lambda > 0$. Тоді

$$\zeta_t = \sum_{k \le N(t)} Y_k - t, \qquad \delta = \frac{1-\lambda c^{-1}}{\lambda c^{-1}} = \frac{c-\lambda}{\lambda} > 0 \qquad \left(m = E\zeta_1 = \frac{\lambda}{c} - 1 < 0\right).$$

При $m < 0$ ζ^+ має невироджений розподіл з генератрисою

$$\mathbf{E}e^{-v\zeta^+} = \frac{p_+(c+v)}{cp_+ + v} = p_+ + q_+\frac{cp_+}{cp_+ + v}, \quad q_+ = \lambda e^{-1},$$

після обернення якої по v визначається ймовірність банкрутства при початковому капіталі $u > 0$:

$$\Psi(u) = \mathbf{P}\{\zeta^+ > u\} = q_+ e^{-cp_+ u}, \quad u > 0. \tag{25}$$

Для порівняння всіх трьох випадків ($\delta_< < 1$, $\delta_* = 1$, $\delta_> > 1$) детальніші обчислення проведемо при $c = 1$ для $u \leq 1$:

1) $\delta_* = 1, \lambda = \dfrac{1}{2}$, $q_+ = \Psi_*(0) = \dfrac{1}{2}$, згідно з (25)

$$\Psi_*(u) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}u}, \quad u \geq 0; \qquad \Psi_*(1) = \frac{1}{2}e^{-0{,}5} \approx 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3 < \frac{1}{2};$$

2) $\delta = 2$, $\lambda = \dfrac{1}{3}$, $q_+ = \Psi(0) = \dfrac{1}{3}$, згідно з (25)

$$\Psi(u) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}u}, \quad u \geq 0; \qquad \Psi(1) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}15 < \Psi_*(1) < \frac{1}{2};$$

3) $\delta' = \dfrac{1}{4} < 1$; $\lambda = \dfrac{4}{5}$, $q_+ = \Psi(0) = \dfrac{4}{5}$, згідно з (25)

$$\Psi(u) = \frac{4}{5}e^{-\frac{1}{5}u}, \quad u \geq 0; \qquad \Psi(1) = \frac{4}{5}e^{-0{,}2} \approx \frac{3{,}24}{5} \approx 0{,}65 > \frac{1}{2}.$$

Отже, при обмежених значеннях початкового капіталу $u \leq 1$ в усіх випадках $1-3$ ймовірності банкрутства монотонно спадають при зростанні u, але у першому і другому випадках для $u = 1$ $\Psi_*(1) = \dfrac{1}{2}\Psi_*(0) < \dfrac{1}{2}$, $\Psi(1) \approx \dfrac{1}{3}\Psi_*(0) < \dfrac{1}{2}$, а в третьому випадку $\Psi(1) \approx 0{,}65 > \dfrac{1}{2}$. Це означає, що в третьому випадку ймовірність виживання ще не досягає значення рівноваги $\dfrac{1}{2}$ при $u = 1$ і лише при $u \approx 2{,}35$ можлива рівновага між банкрутством і виживанням: $\Psi(2{,}35) \approx \dfrac{1}{2}$. Зауважимо, що в умовах наведеного прикладу

$$\mathbf{E}S = \lambda c^{-1}, \qquad \sigma^2(s) = \lambda c^{-2}, \qquad q_+ = \lambda\mu_1 = \lambda c^{-1}.$$

За умови рівноваги $q_+ = \lambda c^{-1} = \dfrac{1}{2}$, $\lambda = \dfrac{c}{2}$. Тоді згідно з (11)

$$P^*_{(a)} = 2\frac{\lambda}{c} = 1, \qquad P^*_{(b)} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2c}), \qquad P^*_{(c)} = \frac{1}{2}(1 + 2c) \quad \left(\alpha_* = \sqrt{\frac{c}{2}}, \ \beta_* = c\right).$$

При збільшенні коефіцієнта премій $C = 1$ (заміні 1 на $C > 1$) страхова надбавка збільшиться: $\delta_> = \dfrac{cC - \lambda}{\lambda} > 1$. Тоді згідно з (12) пропорційно збільшиться значення рівневих параметрів $\alpha = \delta_> \alpha_*$, $\beta = \delta_> \beta_*$.

Висновок. Для обох процесів ризику (4) та (13) при порівняно малих значеннях початкового капіталу u для зменшення ризику гарантовніше вибирати $\alpha_0 = \delta > \delta_* = 1$ для (4) ($\delta > \delta_* = \dfrac{1}{q-p}$ для (13), $q > p$). Для процесу (13) при $\lambda_1 < \lambda_2$ забезпечується надійніша робота страхової компанії, якщо (див. (21)) $\lambda_2 > \dfrac{2q\mathbf{E}S}{b(q-p)}$. Припущення $\lambda_1 < \lambda_2$ є цілком природним і практично виправданим.

1. *Bühlmann H.* Mathematical methods in risk theory. – Berlin: Springer Verlag, 1970. – 196 p.
2. *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2011. – **88**. – 544 с.
3. *Gusak D. V., Kukush A. G., Kulik A. M., Mishura Yu., Pilipenko A. Yu.* Theory of stochastic processes. With applications to financial mathematics and risk theory. – New York etc.: Springer, 2010. – 376 p.
4. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **65**. – 459 с.

Одержано 28.12.11,
після доопрацювання — 03.04.12