УДК 517.925.44

**В. М. Евтухов, О. Р. Шлепаков** (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова)

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО И БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

We obtain asymptotic representations for one class of solutions of systems of ordinary differential equations more general than systems of the Emden – Fowler type.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь більш загального типу, ніж системи типу Емдена – Фаулера.

**1. Постановка задачи и вспомогательные обозначения.** Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}), \quad i = \overline{1,n}\,^1, \tag{1.1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = \overline{1,n}$, $p_i \colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty^2$, $\varphi_i \colon \Delta(Y_i^0) \to ]0;+\infty[$, $i = \overline{1,n}$ $\big(\Delta(Y_i^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки $Y_i^0 \in \{0, \pm\infty\}\big)$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i'(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \Delta(Y_i^0), \qquad \lim_{\substack{z \to Y_i^0 \\ z \in \Delta(Y_i^0)}} \varphi_i(z) = \Phi_i^0, \qquad \Phi_i^0 \in \{0, +\infty\},$$
$$\lim_{\substack{z \to Y_i^0 \\ z \in \Delta(Y_i^0)}} \frac{\varphi_i''(z)\varphi_i(z)}{\big[\varphi_i'(z)\big]^2} = \gamma_i, \tag{1.2}$$

где $\prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i) \neq 1$.

Такая система уравнений в случае, когда $\varphi_i(y_i) = |y_i|^{\sigma_i}$, $i = \overline{1,n}$, называется системой типа Эмдена – Фаулера. Асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для ее неколеблющихся решений были установлены в [1 – 5] при $n = 2$.

В данной работе рассматриваются случаи, когда функции $\varphi_i(y_i)$, $i = \overline{1,n}$, являются не только близкими к степенным, как в работах [11 – 15], но и случаи, когда функции $\varphi_i(y_i)$, $i = \overline{1,n}$, могут иметь экспоненциальную скорость изменения, т. е. могут быть быстро меняющимися функциями [6]. В работах [7 – 9] рассматриваются некоторые виды дифференциальных уравнений, содержащие в правой части такие функции, и для них находятся асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ для неколеблющихся решений.

[1] Здесь и далее для всех функций и параметров с индексом $n+1$ будем полагать их взаимно однозначное соответствие с соответствующими величинами с индексом 1.

[2] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1.1), заданное на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решением, если функции $u_i(t)=\varphi_i\big(y_i(t)\big)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} u_i(t)=\Phi_i^0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{u_i(t)u_{i+1}'(t)}{u_i'(t)u_{i+1}(t)}=\Lambda_i, \quad i=\overline{1,n-1}. \tag{1.3}$$

Целью работы является установление необходимых и достаточных условий существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы дифференциальных уравнений (1.1), а также асимптотических при $t\uparrow\omega$ формул для таких решений в случае, когда $\Lambda_i$, $i=\overline{1,n-1}$, — отличные от нуля вещественные постоянные.

Введем некоторые необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения.

Поскольку $\varphi_i(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции и $\varphi_i'(z)\neq 0$ при $z\in\in\Delta(Y_i^0)$, они монотонны, а значит и обратимы, и мы можем корректно определить следующую величину:

$$\rho_i=\mathrm{sign}\varphi_i'(z) \quad \text{при} \quad z\in\Delta(Y_i^0), \quad i=\overline{1,n}.$$

Далее, заметим, что определение $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решения не дает прямой связи между первой и $n$-й компонентами этого решения, фигурирующими в $n$-м уравнении системы (1.1). Но при выполнении условий $\Lambda_i\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i=\overline{1,n-1}$, в силу (1.3) имеем

$$\Lambda_n=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{u_n(t)u_1'(t)}{u_n'(t)u_1(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{u_n(t)u_{n-1}'(t)}{u_n'(t)u_{n-1}(t)}\frac{u_{n-1}(t)u_{n-2}'(t)}{u_{n-1}'(t)u_{n-2}(t)}\cdots\frac{u_2(t)u_1'(t)}{u_2'(t)u_1(t)}\right]=\frac{1}{\Lambda_1\ldots\Lambda_{n-1}}.$$

Отсюда следует, что $\prod_{i=1}^n\Lambda_i=1$, и поэтому согласно условию $\prod_{i=1}^n(1-\gamma_i)\neq 1$ хотя бы для одного значения $i\in\{1,\ldots,n\}$ выражение $1-\Lambda_i-\gamma_i$ отлично от нуля. Пусть

$$\mathfrak{I}=\{i\in\{1,\ldots,n\}\colon 1-\Lambda_i-\gamma_i\neq 0\}, \qquad \bar{\mathfrak{I}}=\{1,\ldots,n\}\backslash\mathfrak{I}$$

и $l$ — минимальный элемент множества $\mathfrak{I}$.

Учитывая выбор $l$, вводим вспомогательные функции $I_i$ и отличные от нуля постоянные $\beta_i$, $i=1,\ldots,n$, полагая

$$I_i(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{A_i}^t p_i(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i\in\mathfrak{I},\\[2ex] \displaystyle\int_{A_i}^t I_l(\tau)p_i(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i\in\bar{\mathfrak{I}},\end{cases}$$

$$\beta_i=\begin{cases}1-\Lambda_i-\gamma_i, & \text{если} \quad i\in\mathfrak{I},\\[1ex] \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l\ldots\Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i\in\{l+1,\ldots,n\}\backslash\mathfrak{I},\\[2ex] \dfrac{\beta_l}{\Lambda_l\ldots\Lambda_n\Lambda_1\ldots\Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i\in\{1,\ldots,l-1\}\backslash\mathfrak{I},\end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i$ принадлежит $\{\omega, a\}$ и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл $I_i$ стремился либо к нулю, либо к $\infty$ при $t \uparrow \omega$.

Кроме того, введем числа

$$A_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } A_i = a, \\ -1, & \text{если } A_i = \omega \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

позволяющие определять знаки функций $I_i$, $i = 1, \ldots, n$, на промежутке $]a, \omega[$.

**2. Основные результаты.**

**Теорема 2.1.** *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$, *и* $l = \min \mathfrak{I}$. *Тогда для существования* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$*-решений системы дифференциальных уравнений* (1.1) *необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$\prod_{i=1}^{n} \left( (1 - \gamma_i) \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j + \nu \right) - \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \Lambda_j = 0 \tag{2.1}$$

*не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы для каждого* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)} = \Lambda_i \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \tag{2.2}$$

*и выполнялись знаковые условия*

$$A_i^* \beta_i > 0 \quad \text{при} \quad \Phi_i^0 = +\infty, \qquad A_i^* \beta_i < 0 \quad \text{при} \quad \Phi_i^0 = 0, \tag{2.3}$$

$$\operatorname{sign} [\alpha_i A_i^* \beta_i] = \rho_i. \tag{2.4}$$

*Более того, каждое такое решение допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{\varphi_i\big(y_i(t)\big)}{\varphi'_i\big(y_i(t)\big)\varphi_{i+1}\big(y_{i+1}(t)\big)} = \alpha_i \beta_i I_i(t) \big[1 + o(1)\big], \quad \text{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\varphi_i\big(y_i(t)\big)}{\varphi'_i\big(y_i(t)\big)\varphi_{i+1}\big(y_{i+1}(t)\big)} = \alpha_i \beta_i \frac{I_i(t)}{I_l(t)} \big[1 + o(1)\big], \quad \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \tag{2.6}$$

*причем существует* $k$*-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди корней алгебраического уравнения* (2.1) *имеется* $k$ *корней* (*с учетом кратных*), *знаки действительных частей которых противоположны знаку числа* $A_l^* \beta_l$.

***Замечание* 2.1.** Уравнение в (2.1) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\prod_{i=1}^{n} |1 - \gamma_i| > 1$.

***Доказательство.*** Не ограничивая общности, будем считать, что $l = 1$. Общий случай сводится к этому путем переобозначения всех функций, переменных и постоянных следующим образом (показана замена индексов):

$$l \to 1, \quad \ldots, \quad n \to n - l + 1, \quad 1 \to n - l + 2, \ldots, \quad l - 1 \to n.$$

При $l=1$ формулы, определяющие отличные от нуля постоянные $\beta_i$ и функции $I_i$, $i=\overline{1,n}$, примут вид

$$\beta_i=\begin{cases}1-\Lambda_i-\gamma_i, & \text{если} \quad i\in\mathfrak{I},\\ \dfrac{\beta_1}{\Lambda_1\dots\Lambda_{i-1}}, & \text{если} \quad i\in\bar{\mathfrak{I}},\end{cases} \qquad I_i(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{A_i}^{t}p_i(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i\in\mathfrak{I},\\ \displaystyle\int_{A_i}^{t}I_1(\tau)p_i(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad i\in\bar{\mathfrak{I}}.\end{cases}$$

Учитывая (1.3) и правило выбора пределов интегрирования $A_i$, $i=\overline{1,n}$, заметим, что при $t\in]a,\omega[$

$$\operatorname{sign}I_i(t)=\begin{cases}A_i^*, & \text{если} \quad i\in\mathfrak{I},\\ A_i^*A_1^*, & \text{если} \quad i\in\bar{\mathfrak{I}}.\end{cases} \tag{2.7}$$

*Необходимость.* Пусть $y_i\colon[t_0,\omega[\to\Delta(Y_i^0)$, $i=\overline{1,n}$, — произвольное $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\dots,\Lambda_{n-1})$-решение системы дифференциальных уравнений (1.1). Обозначим $u_i(t)=\varphi_i\big(y_i(t)\big)$. Тогда уравнения системы (1.1) примут вид

$$\frac{u_i'(t)}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}=\alpha_ip_i(t), \qquad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\in[t_0,\omega[. \tag{2.8}$$

Интегрируя каждое из этих соотношений при $i\in\mathfrak{I}$ на промежутке от $B_i$ до $t$, где $B_i=\omega$, если $A_i=\omega$, и $B_i=t_0$, если $A_i=a$, получаем

$$\int_{B_i}^{t}\frac{u_i'(\tau)d\tau}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(\tau)\big)\Big)u_{i+1}(\tau)}=\alpha_iI_i(t)\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.9}$$

Сравним выражение $\dfrac{u_i(t)}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}$ с интегралом, стоящим в левой части (2.9). По правилу Лопиталя в форме Штольца имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{u_i(t)}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}}{\displaystyle\int_{B_i}^{t}\frac{u_i'(\tau)d\tau}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(\tau)\big)\Big)u_{i+1}(\tau)}}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{u_i'(t)}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}-\dfrac{u_i(t)u_{i+1}'(t)}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}^2(t)}-\dfrac{u_i(t)\varphi_i''\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_i'(t)}{u_{i+1}(t)\varphi_i'^3\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)}}{\dfrac{u_i'(t)}{\varphi_i'\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}}=$$

$$= 1 - \lim_{t\uparrow\omega}\frac{u_i(t)u'_{i+1}(t)}{u'_i(t)u_{i+1}(t)} - \lim_{t\uparrow\omega}\frac{u_i(t)\varphi''_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)}{\varphi_i'^2\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)} = 1 - \Lambda_i - \gamma_i = \beta_i \neq 0 \quad \text{при} \quad i \in \Im.$$

Отметим корректность применения этого правила как в данной ситуации, так и в последующих. Вначале заметим, что производная выражения $\dfrac{u_i(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}$, как и само данное выражение, сохраняет знак в окрестности $\omega$. Следовательно, у него существует конечный или бесконечный предел при $t \uparrow \omega$. Если предел знаменателя при $t \uparrow \omega$ равен $\infty$, то правило применимо. Если предел знаменателя при $t \uparrow \omega$ равен 0, то интеграл $I_i(t)$ стремится к 0 при $t \uparrow \omega$, т. е. интеграл $\displaystyle\int_a^\omega p_i(t)dt$ сходится. В данном случае легко проверяется, что $\dfrac{u_i(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}$ стремится к 0 при $t \uparrow \omega$. Тогда мы получаем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и правило также применимо.

В силу этого предельного соотношения из (2.9) получаем следующие асимптотические представления:

$$\frac{u_i(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)} = \alpha_i\beta_i I_i(t)\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.10}$$

Переходя от $u_i(t)$ к $y_i(t)$, имеем асимптотическое представление (2.5). Из (2.10) и (2.8), кроме того, следует, что

$$\frac{u'_i(t)}{u_i(t)} = \frac{I'_i(t)}{\beta_i I_i(t)}\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.11}$$

Каждое из соотношений (2.8), в котором $i \in \bar{\Im}$, умножим на $I_1(t)$ и проинтегрируем на промежутке от $B_i$ до $t$, где $B_i$ выбираются таким же образом, как и выше. В результате получим

$$\int\limits_{B_i}^{t}\frac{u'_i(\tau)I_1(\tau)d\tau}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(\tau)\big)\Big)u_{i+1}(\tau)} = \alpha_i I_i(t)\big[1 + o(1)\big], \quad i \in \bar{\Im}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.12}$$

В силу правила Лопиталя в форме Штольца

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{u_i(t)I_1(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}}{\displaystyle\int_{B_i}^{t}\frac{u'_i(\tau)I_1(\tau)d\tau}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(\tau)\big)\Big)u_{i+1}(\tau)}} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left\{\frac{\dfrac{u'_i(t)I_1(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)} + \dfrac{u_i(t)I'_1(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}}{\dfrac{u'_i(t)I_1(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}} - \right.$$

$$
\left. - \frac{\dfrac{u_i(t)u'_{i+1}(t)I_1(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}^2(t)} + \dfrac{u_i(t)I_1(t)\varphi''_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u'_i(t)}{u_{i+1}(t)\varphi'^3_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)}}{\dfrac{u'_i(t)I_1(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)}} \right\} =
$$

$$
= 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)I'_1(t)}{u'_i(t)I_1(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)u'_{i+1}(t)}{u'_i(t)u_{i+1}(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)\varphi''_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)}{\varphi'^2_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)} =
$$

$$
= 1 - \Lambda_i - \gamma_i + \beta_1 \lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_i(t)u'_1(t)}{u'_i(t)u_1(t)} =
$$

$$
= \beta_1 \lim_{t\uparrow\omega} \left[ \frac{u_i(t)u'_{i-1}(t)}{u'_i(t)u_{i-1}(t)} \cdot \ldots \cdot \frac{u_2(t)u'_1(t)}{u'_2(t)u_1(t)} \right] = \frac{\beta_1}{\Lambda_1 \ldots \Lambda_{i-1}} = \beta_i \neq 0 \quad \text{при} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}.
$$

Отсюда и из (2.12) получаем асимптотическое представление

$$
\frac{u_i(t)}{\varphi'_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(u_i(t)\big)\Big)u_{i+1}(t)} = \alpha_i\beta_i \frac{I_i(t)}{I_1(t)}\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.13}
$$

Переходя от $u_i(t)$ к $y_i(t)$, имеем асимптотическое представление $(2.6)$. Кроме того, из (2.13) и (2.8) следует, что асимптотические представления (2.11) имеют место и при $i \in \bar{\mathfrak{I}}$.

Поскольку соотношения (2.11) имеют место при $i = \overline{1,n}$ и рассматриваемое решение удовлетворяет последнему предельному соотношению из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решения, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняются условия (2.2). Кроме того, проинтегрировав (2.11) на отрезке $[B_i, t[$, получим

$$
u_i(t) = |I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i} + o(1)}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,
$$

откуда с учетом условия $\lim_{t\uparrow\omega} u_i(t) = \Phi_i^0$ из определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решения и определения числа $A_i^*$ следуют знаковые условия (2.3).

Справедливость знаковых условий (2.4) непосредственно следует из (2.10), (2.13), если учесть знаки функций $u_i$ и $I_i$, $i = \overline{1,n}$, на промежутке $[t_0, \omega[$.

*Достаточность.* Предположим, что $\Lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $1 - \Lambda_1 - \gamma_1 \neq 0$ $(l = 1)$ и наряду с условиями (2.2) – (2.4) алгебраическое уравнение (2.1) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае система дифференциальных уравнений (1.1) имеет хотя бы одно $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решение, допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.5), $(2.6)$, и выясним вопрос о количестве таких решений.

Сначала для всех $i = \overline{1,n}$ рассмотрим функцию $\varphi'_i\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)$ и покажем, что она является правильно меняющейся функцией порядка $\gamma_i$ при $z \to \Phi_i^0$. Действительно,

$$
\lim_{z\to\Phi_i^0} \frac{z\left[\varphi'_i\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)\right]'}{\varphi'_i\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)} = \lim_{z\to\Phi_i^0} \frac{z\varphi''_i\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)}{\left[\varphi'_i\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)\right]^2} = \lim_{\substack{u\to Y_i \\ u\in\Delta(Y_i^0)}} \frac{\varphi''_i(u)\varphi_i(u)}{\left[\varphi'_i(u)\right]^2} = \gamma_i,
$$

тогда функция $\varphi_i'\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)$ представима в виде

$$\varphi_i'\left(\varphi_i^{-1}(z)\right) = |z|^{\gamma_i}\theta_i(z), \tag{2.14}$$

где $\theta_i(z)$ — медленно меняющаяся функция при $z \to \Phi_i^0$ такая, что $\lim_{z\to\Phi_i^0} \dfrac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = 0$.

Теперь из (2.14) получаем соотношение

$$\varphi_i'(z) = \big|\varphi_i(z)\big|^{\gamma_i}\theta_i\big(\varphi_i(z)\big), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.15}$$

Рассматривая систему соотношений вида

$$\frac{\varphi_i(y_i)}{\varphi_i'(y_i)\varphi_{i+1}(y_{i+1})} = Q_i(t)[1+v_i], \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.16}$$

в которой

$$Q_i(t) = \begin{cases} \alpha_i\beta_i I_i(t), & \text{если} \quad i \in \Im, \\ \alpha_i\beta_i\, \dfrac{I_i(t)}{I_1(t)}, & \text{если} \quad i \in \overline{\Im}, \end{cases}$$

устанавливаем, что она однозначно определяет заданные на множестве $D_0 = [t_0, \omega[\times V_0$, где $t_0 \in [a,\omega[$ и $V_0 = \{\bar v \equiv (v_1,\dots,v_n)\colon\ |v_i| \le 1/2,\ i = \overline{1,n}$, непрерывно дифференцируемые неявные функции $y_i = Y_i(t,\bar v)$, $i = \overline{1,n}$, вида

$$U_i(t,\bar v) = \varphi_i\big(Y_i(t,\bar v)\big) = \big|I_1(t)\big|^{\frac{1}{\beta_1}L_i + z_i(t,\bar v)}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.17}$$

где

$$L_1 = 1, \qquad L_i = \prod_{j=1}^{i-1}\Lambda_j, \quad i = \overline{2,n},$$

а функции $z_i$, $i = \overline{1,n}$, таковы, что

$$\big|z_i(t,\bar v)\big| \le \frac{1}{2|\beta_1|}\,|L_i|\,, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad (t,\bar v) \in D_0$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t,\bar v) = 0 \qquad \text{равномерно по} \qquad \bar v \in V_0.$$

Для этого, полагая в (2.16)

$$\varphi_i\big(y_i(t)\big) = \big|I_1(t)\big|^{\frac{1}{\beta_1}L_i + z_i}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.18}$$

получаем с учетом (2.15) систему соотношений вида

$$\big|I_1(t)\big|^{\frac{1-\gamma_i}{\beta_1}L_i + (1-\gamma_i)z_i - \frac{1}{\beta_1}L_{i+1} - z_{i+1}} = Q_i(t)\,\theta_i\left(\big|I_1(t)\big|^{\frac{1}{\beta_1}L_i + z_i}\right)(1+v_i), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.19}$$

В силу условий (2.2)

$$\ln\bigl|I_i(t)\bigr| \sim \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}\Lambda_{i-1}\ln\bigl|I_{i-1}(t)\bigr| \sim \ldots \sim \frac{\beta_i}{\beta_1}L_i\ln\bigl|I_1(t)\bigr|, \quad i=\overline{2,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

и поэтому

$$\bigl|I_i(t)\bigr| = \bigl|I_1(t)\bigr|^{\frac{\beta_i}{\beta_1}L_i+u_i(t)}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.20}$$

где $u_i\colon ]a,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$, $i=\overline{2,n}$, — непрерывные функции, стремящиеся к нулю при $t\uparrow\omega$. Отсюда с учетом условий (2.3) следует, что $\lim_{t\uparrow\omega}\mu_i\bigl|I_1(t)\bigr|^{\frac{1}{\beta_1}L_i} = \Phi_i^0$, $i=\overline{1,n}$. Следовательно, система соотношений (2.19) определена на множестве $\Omega_0=[t_1,\omega[\times Z_0\times V_0$, где $t_1$ — некоторое число из промежутка $[a,\omega[$ и $Z_0=\Bigl\{\bar z\equiv(z_1,\ldots,z_n)\colon |z_i|\le\dfrac{1}{2|\beta_1|}|L_i|, i=\overline{1,n}\Bigr\}$.

Из (2.19) с использованием (2.20) имеем

$$(1-\gamma_i)z_i - z_{i+1} = u_i(t) + \frac{\ln\left[|\beta_i|\,\left|\theta_i\Bigl(\bigl|I_1(t)\bigr|^{\frac{1}{\beta_1}L_i+z_i}\Bigr)\right|(1+v_i)\right]}{\ln|I_1(t)|}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Частично разрешая эту систему относительно $z_1,\ldots,z_n$ (как линейную неоднородную), получаем

$$z_i = a_i(t)+b_i(t,\bar v)+Z_i(t,\bar z), \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.21}$$

где

$$a_i(t)=\left(\prod_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1\right)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{i-1}\left(u_k(t)\prod_{j=k+1}^{i-1}(1-\gamma_j)\right)+\right.$$
$$\left.+\prod_{j=1}^{i-1}(1-\gamma_j)\sum_{k=i}^{n}\left(u_k(t)\prod_{j=k+1}^{n}(1-\gamma_j)\right)\right],$$

$$b_i(t,\bar v)=\left(\prod_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1\right)^{-1}\ln^{-1}|I_1(t)|\left[\sum_{k=1}^{i-1}\left(\ln\bigl(|\beta_k|(1+v_k)\bigr)\prod_{j=k+1}^{i-1}(1-\gamma_j)\right)+\right.$$
$$\left.+\prod_{j=1}^{i-1}(1-\gamma_j)\sum_{k=i}^{n}\left(\ln\bigl(|\beta_k|(1+v_k)\bigr)\prod_{j=k+1}^{n}(1-\gamma_j)\right)\right],$$

$$Z_i(t,\bar z)=\left(\prod_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1\right)^{-1}\ln^{-1}|I_1(t)|\left[\sum_{k=1}^{i-1}\left(\ln\left|\theta_k\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}L_k+z_k}\right)\right|\prod_{j=k+1}^{i-1}(1-\gamma_j)\right)+\right.$$
$$\left.+\prod_{j=1}^{i-1}(1-\gamma_j)\sum_{k=i}^{n}\left(\ln\left|\theta_k\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}L_k+z_k}\right)\right|\prod_{j=k+1}^{n}(1-\gamma_j)\right)\right], \quad i=\overline{1,n}\,[3].$$

---

[3] Здесь и ниже считаем, что $\prod_{j=i+1}^{i}=1$, $\sum_{j=i+1}^{i}=0$.

Здесь

$$\lim_{t\uparrow\omega} b_i(t,\bar v)=0, \quad i=\overline{1,n}, \qquad \text{равномерно по} \quad \bar v\in V_0 \tag{2.22}$$

и в силу свойств медленно меняющихся функций (см. [4])

$$\lim_{t\uparrow\omega} Z_i(t,\bar z)=0, \quad i=\overline{1,n}, \qquad \text{равномерно по} \quad \bar z\in Z_0. \tag{2.23}$$

Поскольку $u_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, стремятся к 0 при $t\uparrow\omega$, то и

$$\lim_{t\uparrow\omega} a_i(t)=0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{2.24}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial Z_i(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_m}=\varrho_{im}\frac{|I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}L_m+z_m}\theta_m'\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}L_m+z_m}\right)}{\theta_m\left(|I_1(t)|^{\frac{1}{\beta_1}L_m+z_m}\right)}, \quad i,m=\overline{1,n},$$

где

$$\varrho_{im}=\begin{cases}\left(\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1\right)^{-1}\prod\limits_{j=m+1}^{i-1}(1-\gamma_j) & \text{при} \quad 2\le i\le n, \quad 1\le m<i,\\[2ex] \left(\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1\right)^{-1}\prod\limits_{j=1}^{i-1}(1-\gamma_j)\prod\limits_{j=m+1}^{n}(1-\gamma_j) & \text{при} \quad 1\le i\le n, \quad i\le m\le n.\end{cases}$$

Отсюда с учетом условий $\lim_{z\to\Phi_i^0}\dfrac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)}=0$, $i=\overline{1,n}$, которым удовлетворяют медленно меняющиеся функции $\theta_i$, $i=\overline{1,n}$, следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\partial Z_i(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_m}=0, \quad i,m=\overline{1,n}, \qquad \text{равномерно по} \qquad \bar z\in Z_0.$$

В силу приведенных выше предельных соотношений существует число $t_0\in[t_1,\omega[$ такое, что на множестве $[t_0,\omega[\times Z_0\times V_0$ выполняются неравенства

$$\big|a_i(t)+b_i(t,\bar v)+Z_i(t,\bar z)\big|\le\frac{\beta_0}{n}, \quad i=\overline{1,n}, \qquad \text{где} \qquad \beta_0=\frac{1}{2|\beta_1|}\min\big\{|L_1|,\ldots,|L_n|\big\}, \tag{2.25}$$

и условия Липшица

$$\big|Z_i(t,\bar z^1)-Z_i(t,\bar z^2)\big|\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\big|z_k^1-z_k^2\big|, \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.26}$$

при $t\in[t_0,\omega[$ и любых $\bar z^1$, $\bar z^2\in Z_0$.

Выбрав таким образом число $t_0$, обозначим через $\mathbf{B}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega=[t_0,\omega[\times V_0$ вектор-функций $z=(z_i)_{i=1}^n\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|z\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |z_i(t,\bar{v})| \colon (t,\bar{v}) \in \Omega\right\}.$$

Выделим из него подмножество $\mathbf{B}_0$ тех функций из $\mathbf{B}$, для которых $\|z\| \le \beta_0$, и рассмотрим на $\mathbf{B}_0$, выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0,1)$, оператор $\Phi = (\Phi_i)_{i=1}^n$, определенный соотношениями

$$\Phi_i(z)(t,\bar{v}) = z_i(t,\bar{v}) - \nu\Big[z_i(t,\bar{v}) - a_i(t) - b_i(t,\bar{v}) - Z_i\big(t, z_1(t,\bar{v}),\ldots,z_n(t,\bar{v})\big)\Big], \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.27}$$

Для любого $z \in \mathbf{B}_0$ в силу условий (2.25) имеем

$$\big|\Phi_i(z)(t,\bar{v})\big| \le (1-\nu)\big|z_i(t,\bar{v})\big| + \frac{\nu\beta_0}{n}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad (t,\bar{v}) \in \Omega.$$

Поэтому на множестве $\Omega$

$$\sum_{i=1}^{n}\big|\Phi_i(z)(t,\bar{v})\big| \le (1-\nu)\sum_{i=1}^{n}\big|z_i(t,\bar{v})\big| + \nu\beta_0 \le (1-\nu)\|z\| + \nu\beta_0 \le (1-\nu)\beta_0 + \nu\beta_0 = \beta_0.$$

Отсюда следует, что $\|\Phi(z)\| \le \beta_0$, т. е. $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$.

Пусть теперь $z$, $\tilde{z} \in \mathbf{B}_0$. Тогда в силу (2.26) при $(t,\bar{v}) \in \Omega$

$$\Big|\Phi_i(z)(t,\bar{v}) - \Phi_i(\tilde{z})(t,\bar{v})| \le (1-\nu)|z_i(t,\bar{v}) - \tilde{z}_i(t,\bar{v})\Big| +$$

$$+\nu\Big|Z_i\big(t, z_1(t,\bar{v}),\ldots,z_n(t,\bar{v})\big) - Z_i(t,\tilde{z}_1(t,\bar{v}),\ldots,\tilde{z}_n(t,\bar{v})\Big| \le$$

$$\le (1-\nu)\big|z_i(t,\bar{v}) - \tilde{z}_i(t,\bar{v})\big| + \frac{\nu}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\big|z_k(t,\bar{v}) - \tilde{z}_k(t,\bar{v})\big|, \quad i = \overline{1,n}.$$

Значит, на множестве $\Omega$

$$\sum_{k=1}^{n}\big|\Phi_k(z)(t,\bar{v}) - \Phi_k(\tilde{z})(t,\bar{v})\big| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\big|z_k(t,\bar{v}) - \tilde{z}_k(t,\bar{v})\big| \le \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\|z - \tilde{z}\|,$$

откуда следует, что

$$\|\Phi(z) - \Phi(\tilde{z})\| \le \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\|z - \tilde{z}\|.$$

Тем самым показано, что оператор $\Phi$ отображает множество $\mathbf{B}_0$ в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная вектор-функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (2.27) эта непрерывная на множестве $\Omega$ вектор-функция является единственным решением системы (2.21), удовлетворяющим условию

$\|z\| \le \beta_0$. Из (2.21) с учетом этого условия и (2.22) – (2.24) следует, что компоненты данного решения стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $\bar{v} \in V_0$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $\Omega$ непосредственно следует из известной локальной теоремы о существовании неявных функций, определяемых системой соотношений. В силу замены (2.18) полученной вектор-функции $z = (z_i)_{i=1}^n$ соответствует вектор-функция $(Y_i)_{i=1}^n$ с компонентами вида (2.17), которая является решением системы (2.16).

Теперь, применяя к системе дифференциальных уравнений (1.1) преобразование

$$y_i(t) = Y_i\big(t, v_1(x), \ldots, v_n(x)\big) =$$

$$= \varphi_i^{-1}\Big(U_i\big(t, v_1(x), \ldots, v_n(x)\big)\Big), \quad i = \overline{1,n}, \quad x = A_1^* \ln|I_1(t)|, \tag{2.28}$$

и учитывая, что вектор-функция $(Y_i(t, v_1(x), \ldots, v_n(x))_{i=1}^n$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $\big(v_1(x), \ldots, v_n(x)\big) \in$ $\in V_0$ является решением системы уравнений

$$\frac{\varphi_i\big(y_i(t)\big)}{\varphi_i'\big(y_i(t)\big)\varphi_{i+1}\big(y_{i+1}(t)\big)} = Q_i(t)\big[1 + v_i(x)\big], \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.29}$$

получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$v_i' = \frac{A_1^*}{\beta_1}\left[h_i(x)\xi_i(x, v_1, \ldots, v_n) - h_{i+1}(x)\frac{1+v_i}{1+v_{i+1}} - g_i(x)(1+v_i)\right], \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.30}$$

в которой

$$h_i(x) = h_i\big(x(t)\big) = \frac{\beta_1}{\beta_i}\frac{I_i'(t)I_1(t)}{I_i(t)I_1'(t)},$$

$$g_i\big(x(t)\big) = \begin{cases} \beta_1 \dfrac{I_i'(t)I_1(t)}{I_i(t)I_1'(t)}, & \text{если} \quad i \in \mathfrak{I}, \\ \beta_1\left(\dfrac{I_i'(t)I_1(t)}{I_i(t)I_1'(t)} - 1\right), & \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}}, \end{cases}$$

$$\xi_i(x, v_1, \ldots, v_n) = \xi(x(t), v_1, \ldots, v_n) =$$

$$= 1 - \frac{\varphi_i\Big(\varphi_i^{-1}\big(U_i(t, v_1, \ldots, v_n)\big)\Big)\varphi_i''\left(\varphi_i^{-1}\left(U_i(t, v_1, \ldots, v_n)\right)\right)}{\big[\varphi_i'\left(\varphi_i^{-1}\left(U_i(t, v_1, \ldots, v_n)\right)\right)\big]^2}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Здесь в силу условий (2.2) для $i = \overline{1,n}$

$$\lim_{x\to+\infty} h_i(x) = \lim_{t\uparrow\omega} h_i\big(x(t)\big) = L_i, \qquad \lim_{x\to+\infty} g_i(x) = \lim_{t\uparrow\omega} g_i\big(x(t)\big) = (1 - \Lambda_i - \gamma_i)\,L_i. \tag{2.31}$$

Поскольку в силу (2.3) и (2.17) $\lim_{t\uparrow\omega} U_i(t, v_1, \ldots, v_n) = \Phi_i^0$, $i = \overline{1,n}$, равномерно по $(v_1, \ldots, v_n) \in$ $\in V_0$ и выполняются условия (1.2), имеет место представление

$$\xi_i(x, v_1, \ldots, v_n) = 1 - \gamma_i + R_{i1}(x, v_1, \ldots, v_n), \quad i = \overline{1,n},$$

где

$$R_i(x, v_1, \ldots, v_n) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \longrightarrow +\infty \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in V_0. \qquad (2.32)$$

Учитывая эти представления и представления

$$\frac{1+v_i}{1+v_{i+1}} = 1 + v_i - v_{i+1} + R_{i2}(v_1, \ldots, v_n), \quad i = \overline{1,n},$$

в которых функции $R_{i2}$, $i = \overline{1,n}$, таковы, что

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n| \to 0} \frac{\partial R_{i2}(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_k} = 0, \quad i,k = \overline{1,n}, \qquad (2.33)$$

записываем систему дифференциальных уравнений (2.30) в виде

$$v_i' = \frac{A_1^*}{\beta_1}\Big[f_i(x) + p_{ii}(x)v_i + p_{ii+1}(x)v_{i+1} + V_{i1}(x, v_1, \ldots, v_n) + V_{i2}(x, v_1, \ldots, v_n)\Big], \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2.34)$$

где

$$f_i(x) = (1-\gamma_i)h_i(x) - h_{i+1}(x) - g_i(x),$$

$$p_{ii}(x) = -h_{i+1}(x) - g_i(x), \qquad p_{ii+1}(x) = h_{i+1}(x),$$

$$V_{i1}(x, v_1, \ldots, v_n) = h_i(x)R_{i1}(x, v_1, \ldots, v_n),$$

$$V_{i2}(x, v_1, \ldots, v_n) = -h_{i+1}(x)R_{i2}(x, v_1, \ldots, v_n), \quad i = \overline{1,n}.$$

В этой системе в силу условий (2.28)–(2.30)

$$\lim_{x \to +\infty} f_i(x) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\lim_{x \to +\infty} V_{i1}(x, v_1, \ldots, v_n) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \ldots, v_n) \in V_0,$$

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n| \to 0} \frac{V_{i2}(x, v_1, \ldots, v_n)}{|v_1| + \ldots + |v_n|} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_0, \omega[$$

и матрица $P(x) = \big(p_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^n$ из коэффициентов при $v_k$, $k = \overline{1,n}$, стоящих в правых частях в квадратных скобках, такова, что

$$P_0 = \lim_{x \to +\infty} P(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} -(1-\gamma_1)L_1 & L_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\gamma_2)L_2 & L_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1-\gamma_{n-1})L_{n-1} & L_n \\ L_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(1-\gamma_n)L_n \end{pmatrix}.$$

При этом заметим, что характеристическое уравнение $\det[P_0 - \nu E_n] = 0$, где $E_n$ — единичная матрица $n$-го порядка, может быть записано в виде (2.1) и поэтому не имеет корней с нулевой действительной частью. Значит, для системы дифференциальных уравнений (2.34) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [7]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (2.34) имеет хотя бы одно решение $\{v_i\}_{i=1}^n\colon [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ $\big(x_1 \geq x_0 = A_1^* \ln |I_1(t_0)|\big)$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, причем таких решений существует $k$-параметрическое семейство, если среди корней характеристического уравнения (2.1) имеется $k$ корней (с учетом кратных), действительные части которых имеют знак, противоположный знаку числа $A_1^*\beta_1$. Каждому такому решению системы (2.34) в силу замены (2.28) и системы соотношений (2.29), которой удовлетворяют функции $Y_i\Big(t, v_1\big(x(t)\big), \ldots, v_n\big(x(t)\big)\Big)$, $i = \overline{1,n}$, соответствуют решения $(y_1, \ldots, y_n)$ системы дифференциальных уравнений (1.1), допускающие асимптотические представления

$$\frac{\varphi_i\big(y_i(t)\big)}{\varphi_i'\big(y_i(t)\big)\varphi_{i+1}\big(y_{i+1}(t)\big)} = Q_i(t)\big[1 + o(1)\big], \quad i = \overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Остается лишь убедиться в том, что любое из указанных выше решений системы дифференциальных уравнений (1.1) является $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением.

Поскольку каждому из них соответствует решение $(v_1(x), \ldots, v_n(x))$ системы (2.34), стремящееся к нулю при $x \to +\infty$, в силу установленных ранее свойств функций $U_i(t, v_1, \ldots, v_n)$, $i = \overline{1,n}$, первое из условий (1.3) заведомо выполнено. Кроме того, для данных решений системы (1.1) обозначим $u_i(t) = \varphi_i\big(y_i(t)\big)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда с учетом (2.29) и (2.2) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{u_{i+1}'(t)u_i(t)}{u_{i+1}(t)u_i'(t)} = \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_{i+1}'(t)I_i(t)}{I_{i+1}(t)I_i'(t)} = \Lambda_i.$$

Значит, выполняется второе из условий (1.3) определения $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$-решения.

Теорема доказана.

Теперь укажем условия, при которых асимптотические представления (2.5), (2.6) могут быть записаны в более простом виде.

Обозначим $\psi_i(z) = \varphi_i'\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)$. Как показано ранее, $\psi_i(z)$ — правильно меняющаяся функция порядка $\gamma_i$ и для нее справедливо представление (2.14).

**Определение 2.1** [14]. *Будем говорить, что функция $\psi_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяет условию $S$, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l\colon \Delta(\Phi_i^0) \longrightarrow ]0, +\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z\to\Phi_i^0 \\ z\in\Delta(\Phi_i^0)}} \frac{zl'(z)}{l(z)} = 0,$$

*имеет место асимптотическое соотношение*

$$\theta_i(zl(z)) = \theta_i(z)\big[1 + o(1)\big] \qquad \textit{при} \qquad z \to \Phi_i^0 \quad \big(z \in \Delta\big(\Phi_i^0\big)\big). \tag{2.35}$$

Условию $S$ заведомо удовлетворяют функции $\psi_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых функция $\theta_i$ имеет конечный предел при $z \to Y_i^0$, а также функции вида

$$\psi_i(z) = |z|^\sigma |\ln z|^{\gamma_1}, \qquad \psi_i(z) = |z|^\sigma |\ln z|^{\gamma_1} |\ln|\ln z||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1$, $\gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

***Замечание* 2.2** [15]. Если функция $\psi_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, удовлетворяет условию $S$, а функция $u_i\colon [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta(\Phi_i^0)$ непрерывно дифференцируема и такая, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} u_i(t) = \Phi_i^0, \qquad \frac{u_i'(t)}{u_i(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\,[r+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где $r$ — отличная от нуля вещественная постоянная, $\xi$ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности $\omega$ вещественная функция, для которой $\xi'(t)\neq 0$, то

$$\theta_i\big(u_i(t)\big) = \theta_i\big(|\xi(t)|^r\big)\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

так как в данном случае

$$u_i(t) = z(t)l\big(z(t)\big), \qquad z(t) = \mu_0|\xi(t)|^r,$$

и

$$\lim_{\substack{z\to\Phi_0\\ z\in\Delta(\Phi_0)}} \frac{z\,l'(z)}{l(z)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{z(t)\,l'\big(z(t)\big)}{l\big(z(t)\big)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{z(t)\left(\dfrac{y_i(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\dfrac{y_i(t)}{z(t)}\right)z'(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\xi(t)y_i'(t)}{r\xi'(t)y_i(t)}-1\right] = 0.$$

**Теорема 2.2.** *Пусть* $\Lambda_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i=\overline{1,n-1}$, $l=\min\Im$ *и все функции* $\psi_i(z) = \varphi_i'\left(\varphi_i^{-1}(z)\right)$, $i=\overline{1,n}$, *удовлетворяют условию* $S$. *Тогда каждое* $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$*-решение* (*в случае их существования*) *системы дифференциальных уравнений* (1.1) *допускает при* $t\uparrow\omega$ *асимптотические представления*

$$\varphi_i\left(y_i(t)\right) = \prod_{k=1}^{n}\left|Q_k(t)\theta_k\left(|I_k(t)|^{\frac{1}{\beta_k}}\right)\right|^{\delta_{ik}}\big[1+o(1)\big], \quad i=\overline{1,n}, \tag{2.36}$$

*где*

$$Q_k(t) = \begin{cases} \alpha_k\beta_k I_k(t), & \text{если} \ \ k\in\Im,\\ \alpha_k\beta_k\dfrac{I_k(t)}{I_l(t)}, & \text{если} \ \ k\in\overline{\Im},\end{cases}$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{j=k+1}^{i-1}(1-\gamma_j)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1} & \text{при} \ \ k=\overline{1,i-1},\\[4ex] \dfrac{\prod\limits_{j=k+1}^{n}(1-\gamma_j)\prod\limits_{j=1}^{i-1}(1-\gamma_j)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\gamma_j)-1} & \text{при} \ \ k=\overline{i,n}.\end{cases}$$

***Доказательство.*** При установлении теоремы 2.1 было показано, что для существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{n-1})$-решений системы дифференциальных уравнений (1.1) необходимо, чтобы выполнялись условия (2.2) – (2.4) и каждое такое решение допускало при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (2.5), (2.6). Кроме того, было получено для таких решений асимптотическое соотношение (2.11). В силу этого соотношения и замечания 2.2

$$\theta_i(u_i(t)) = \theta_i\left(|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}}\right)\big[1+o(1)\big], \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где $u_i(t)=\varphi_i(y_i(t))$.

Поэтому асимптотические представления (2.5), (2.6) можно записать в виде

$$\frac{[u_i(t)]^{1-\gamma_i}}{u_{i+1}(t)} = Q_i(t)\theta_i\left(|I_i(t)|^{\frac{1}{\beta_i}}\right)\big[1+o(1)\big], \quad i=\overline{1,n}, \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Разрешая эту систему алгебраических уравнений относительно $u_1,\ldots,u_n$, получаем асимптотические представления (2.36).

Теорема доказана.

***Замечание* 2.3.** Если для какого-то $i\in\{1,\ldots,n\}$ $\gamma_{i-1}=1$, то $\delta_{ik}=0$ при $k\neq i-1$ и $\delta_{i,i-1}=-1$. Тогда асимптотическое представление (2.36) можно представить в виде

$$\varphi_i(y_i(t)) = \left|Q_{i-1}(t)\theta_{i-1}\left(|I_{i-1}(t)|^{\frac{1}{\beta_{i-1}}}\right)\right|^{-1}\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

**3. Приложения основных результатов.** Прежде чем перейти к некоторым приложениям данных результатов, отметим некоторые свойства функций $\varphi_i(z)$, вытекающие из их определения.

***Замечание* 3.1.** Если функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяет условиям (1.2) и $\gamma_i\neq 1$, то функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta(Y_i^0)}}\frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i = \frac{1}{1-\gamma_i}. \tag{3.1}$$

***Замечание* 3.2.** Если функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяет условиям (1.2) и $\gamma_i=1$, то функция $\varphi_i(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta(Y_i^0)}}\frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \infty. \tag{3.2}$$

Доказательство замечаний 3.1, 3.2 можно найти, например, в [7 – 16].

Рассмотрим уравнение (1.1) в случае, когда $\gamma_i\neq 1$ при $i=\overline{1,n}$. Тогда обозначим $\sigma_i = \dfrac{1}{1-\gamma_i}$. Отметим, что соотношению $\prod_{i=1}^n(1-\gamma_i)\neq 1$ соответствует соотношение $\prod_{i=1}^n\sigma_i\neq 1$.

Кроме того, тогда из соотношения (3.1) следует

$$\frac{\varphi_i'\big(y_i(t)\big)}{\varphi_i\big(y_i(t)\big)} = \frac{\sigma_i}{y_i(t)}\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.3}$$

Введем класс решений для системы (1.1) в случае, когда все функции $\varphi_i(z)$ удовлетворяют условию (3.1).

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$, будем называть $P_\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$-решением, если

$$y_i(t) \in \Delta(Y_i^0) \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0,$$
$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y'_{i+1}(t)}{y'_i(t) y_{i+1}(t)} = \lambda_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{3.4}$$

В силу свойств функций $\varphi_i(z)$ и соотношения (3.3) любое $P_\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$-решение системы (1.1) является также и $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением, где $\Lambda_i = \dfrac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i} \lambda_i$.

Кроме того, введем $\mu_i$, равное +1 или –1 и определяющее знаки компонент $P_\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$-решения системы (1.1). Отметим, что в силу (3.3) $\operatorname{sign}[\rho_i] = \operatorname{sign}[\sigma_i \mu_i]$.

Тогда теорему 2.1 с учетом соотношения (3.3) можно сформулировать в следующем виде.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \overline{1, n-1}$, *и* $l = \min \mathfrak{I}$. *Тогда для существования* $P_\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$*-решений системы дифференциальных уравнений* (1.1) *необходимо, а если алгебраическое уравнение*

$$\prod_{i=1}^{n} \left( \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j + \nu \right) - \prod_{i=1}^{n} \left( \sigma_i \prod_{j=1}^{i-1} \lambda_j \right) = 0 \tag{3.5}$$

*не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы для каждого* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_i(t) I'_{i+1}(t)}{I'_i(t) I_{i+1}(t)} = \lambda_i \frac{\sigma_{i+1} \beta_{i+1}}{\sigma_i \beta_i}$$

*и выполнялись знаковые условия*

$$A_i^* \beta_i \sigma_i > 0 \quad \textit{при} \quad Y_i^0 = \pm\infty, \qquad A_i^* \beta_i \sigma_i < 0 \quad \textit{при} \quad Y_i^0 = 0,$$
$$\operatorname{sign}[\alpha_i A_i^* \beta_i \sigma_i] = \mu_i.$$

*Более того, каждое такое решение допускает при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}\big(y_{i+1}(t)\big)} = \alpha_i \sigma_i \beta_i I_i(t) \big[1 + o(1)\big], \quad \textit{если} \quad i \in \mathfrak{I},$$
$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}\big(y_{i+1}(t)\big)} = \alpha_i \sigma_i \beta_i \frac{I_i(t)}{I_l(t)} \big[1 + o(1)\big], \quad \textit{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}},$$

*причем существует* $k$*-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди корней алгебраического уравнения* (3.5) *имеется* $k$ *корней* (*с учетом кратных*), *знаки действительных частей которых противоположны знаку числа* $A_l^* \beta_l \sigma_l$.

В заключение рассмотрим дифференциальное уравнение $n$-го порядка

$$u^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(u), \tag{3.6}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $\varphi\colon \Delta(U^0) \to]0; +\infty[$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (1.2), где $\Delta(U^0)$ — некоторая односторонняя окрестность точки $U^0$, $U^0$ равно либо 0, либо $\pm\infty$.

В случае, когда $\gamma \neq 1$, данное уравнение рассмотрено в работе [16], где для него вводились соответствующие классы решений и находились необходимые и достаточные условия для их существования. В данном случае нас будет интересовать это уравнение только в случае, когда $\gamma = 1$, т. е. функция $\varphi(z)$ является быстро меняющейся.

В работах [7, 8] рассматривалось данное уравнение при $n = 2$, в работе [9] — данное уравнение произвольного порядка, но только в случае, когда $\varphi(z) = e^{\sigma z}$.

Решение $u$ уравнения (3.6) будем называть $P_\omega(\Lambda_0)$-решением, где $-\infty \le \Lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varphi\big(u(t)\big) = \Phi^0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} u^{(k)}(t) = U_k^0 = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad \pm\infty, \ k = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi\big(u(t)\big)}{\varphi'\big(u(t)\big)} \frac{u''(t)}{[u'(t)]^2} = \Lambda_0, \tag{3.7}$$

и

$$\text{существует конечный или бесконечный} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\big[u^{(n-1)}(t)\big]^2}{u^{(n)}(t)u^{(n-2)}(t)}. \tag{3.8}$$

Введем числа

$$\mu_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \ U_i^0 = +\infty, \\ & \text{либо } \ U_i^0 = 0 \ \text{ и } \ \Delta(U_i^0) - \text{правая окрестность } \ 0, \\ -1, & \text{если } \ U_i^0 = -\infty, \\ & \text{либо } \ U_i^0 = 0 \ \text{ и } \ \Delta(U_i^0) - \text{левая окрестность } \ 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

определяющие знаки $P_\omega(\lambda_0)$-решения и его производной в некоторой левой окрестности $\omega$.

Теоремы 2.1 и 2.2 позволяют исследовать вопрос о существовании и асимптотике $P_\omega(\Lambda_0)$-решений уравнения (3.6) в случае, когда $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

В самом деле, уравнение (3.6) с помощью замены

$$u^{(i-1)} = y_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.9}$$

сводится к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} y_i' = y_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ y_n' = \alpha_0 \, p(t)\varphi(y_1). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Эта система уравнений является системой вида (1.1), в которой

$$\alpha_i = \operatorname{sign} y_{i+1} = \mu_i^0, \qquad \alpha_n = \alpha_0, \qquad p_i(t) \equiv 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad p_n(t) = p(t),$$
$$\varphi_i(y_i) = |y_i|, \qquad \varphi_1(y_1) = \varphi(y_1), \qquad \rho_1 = \rho, \qquad \rho_i = \mu_{i-1}^0, \quad i = \overline{2, n}, \tag{3.11}$$

где $\rho$ — знак $\varphi'(z)$. Здесь $\varphi_i$, $i = \overline{2, n}$, являются правильно меняющимися функциями порядка один, как при $y_i \to 0$, так и при $y_i \to \pm\infty$, т. е. $\gamma_i = 0$, $i = \overline{2, n}$, и $\gamma_1 = 1$.

Кроме того, из соотношений (3.2) и (3.7) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[u'(t)]^2}{u(t)u''(t)} = 0.$$

Отсюда при выполнении условия (3.8) согласно лемме 10.1 из [16] для любого $P_\omega(\Lambda_0)$-решения уравнения (3.6) следуют предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\big[u^{(i)}(t)\big]^2}{u^{(i-1)}(t)u^{(i+1)}(t)} = \frac{i-1}{i} \neq 0, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Далее отметим, что для функций $w_i(t) = \varphi_i\big(y_i(t)\big)$, $i = \overline{1, n}$, в силу (3.9) и (3.11) имеем

$$\frac{w_1(t)w_2'(t)}{w_1'(t)w_2(t)} = \frac{\varphi\big(u(t)\big)}{\varphi'\big(u(t)\big)} \frac{u''(t)}{[u'(t)]^2},$$

$$\frac{w_i(t)w_{i+1}'(t)}{w_i'(t)w_{i+1}(t)} = \frac{u^{(i-1)}(t)u^{(i+1)}(t)}{\big[u^{(i)}(t)\big]^2}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Поэтому решение $u$ уравнения (3.6) является $P_\omega(\Lambda_0)$-решением тогда и только тогда, когда соответствующее ему в силу замены (3.9) решение $(y_1, \ldots, y_n)$ системы (3.10) является $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением, где

$$\Lambda_1 = \Lambda_0, \qquad \Lambda_i = \frac{i}{i-1}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

При этом $\Lambda_n = \dfrac{1}{\Lambda_1 \ldots \Lambda_{n-1}} = \big[(n-1)\Lambda_0\big]^{-1}$.

В силу указанного вида $\Lambda_i$, $i = \overline{1, n}$, постоянные $\beta_i$, $A_i^*$ и функции $I_i$, $i = \overline{1, n}$, из первого пункта определяются следующим образом:

$$\beta_1 = 1 - \Lambda_1 - \gamma_1 = -\Lambda_0, \qquad \beta_i = 1 - \Lambda_i = \frac{1}{1-i}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\beta_n = \begin{cases} 1 - \Lambda_n - \gamma_n = 1 - \big[(n-1)\Lambda_0\big]^{-1}, & \text{если} \quad \Lambda_0 \neq \dfrac{1}{n-1}, \\ \dfrac{\beta_1}{\Lambda_1 \ldots \Lambda_{n-1}} = \dfrac{1}{1-n}, & \text{если} \quad \Lambda_0 = \dfrac{1}{n-1}, \end{cases}$$

$$I_i(t) = \int_{A_i}^{t} d\tau = \pi_\omega(t), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$I_n(t) = \begin{cases} \int\limits_{A_n}^{t} p(\tau)d\tau, & \text{если} \quad \Lambda_0 \neq \dfrac{1}{n-1}, \\ \int\limits_{A_n}^{t} \pi_\omega(\tau)p(\tau)d\tau, & \text{если} \quad \Lambda_0 = \dfrac{1}{n-1}, \end{cases}$$

$$A_i^* = \operatorname{sign} \pi_\omega(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad A_n^* = \begin{cases} \operatorname{sign} \left( \int\limits_{A_n}^{t} p(\tau)\, d\tau \right), & \text{если} \quad \Lambda_0 \neq \dfrac{1}{n-1}, \\ \operatorname{sign} \left( \int\limits_{A_n}^{t} |\pi_\omega(\tau)| p(\tau)\, d\tau \right), & \text{если} \quad \Lambda_0 = \dfrac{1}{n-1}, \end{cases}$$

где каждый из пределов интегрирования $A_i$ принадлежит $\{\omega, a\}$, $i = \overline{1, n}$, и выбран так, чтобы соответствующий ему интеграл $I_i$ стремился либо к нулю, либо к $\infty$ при $t \uparrow \omega$ и

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ \omega - t, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases}$$

При $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ алгебраическое уравнение (2.1) для системы (3.10), а значит и для уравнения (3.6), примет в вид

$$\prod_{i=1}^{n} [(i-1) + \nu] - \Lambda_0^{-1}(n-1)! = 0. \tag{3.12}$$

И, наконец, отметим, что в силу (3.9)

$$\frac{\varphi_1\big(y_1(t)\big)}{\varphi_1'\big(y_1(t)\big)y_2(t)} = \frac{\varphi\big(u(t)\big)}{\varphi'\big(u(t)\big)u'(t)}, \qquad \frac{y_i(t)}{y_{i+1}(t)} = \frac{u^{(i-1)}(t)}{u^{(i)}(t)}, \quad i = \overline{2, n-1},$$

$$\frac{y_n(t)}{\varphi_1\big(y_1(t)\big)} = \frac{u^{(n-1)}(t)}{\varphi\big(u(t)\big)},$$

откуда имеем

$$\frac{u'(t)}{\varphi\big(u(t)\big)} = \frac{y_n(t)}{\varphi_1\big(y_1(t)\big)} \prod_{i=2}^{n-1} \frac{y_i(t)}{y_{i+1}(t)},$$

$$\frac{1}{\varphi'\big(u(t)\big)} = \frac{\varphi_1\big(y_1(t)\big)}{\varphi_1'\big(y_1(t)\big)y_2(t)} \frac{y_n(t)}{\varphi_1\big(y_1(t)\big)} \prod_{i=2}^{n-1} \frac{y_i(t)}{y_{i+1}(t)}.$$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $\Lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Тогда для существования* $P_\omega(\Lambda_0)$*-решений уравнения* (3.6) *необходимо, а если уравнение* (3.12) *не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{\displaystyle\int_{A_n}^{t}p(\tau)\,d\tau}=\frac{1-(n-1)\Lambda_0}{\Lambda_0},\qquad \textit{если}\quad \Lambda_0\neq\frac{1}{n-1},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega^2(t)p(t)}{\displaystyle\int_{A_n}^{t}\pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau}=1,\qquad \textit{если}\quad \Lambda_0=\frac{1}{n-1},$$

$$\mu_1^0\rho<0,\quad \textit{если}\quad \Phi^0=0,\qquad \mu_1^0\rho>0,\quad \textit{если}\quad \Phi^0=\pm\infty,$$

$$\mu_i^0\mu_{i+1}^0<0,\quad \textit{если}\quad U_i^0=0,\qquad \mu_i^0\mu_{i+1}^0>0,\quad \textit{если}\quad U_i^0=\pm\infty,\quad i=\overline{1,n-2},$$

$$\alpha_0\mu_{n-1}^0<0,\quad \textit{если}\quad U_{n-1}^0=0,\qquad \alpha_0\mu_{n-1}^0>0,\quad \textit{если}\quad U_{n-1}^0=\pm\infty,$$

*и неравенства при* $t\in]a,\omega[$

$$\mu_1^0\rho\Lambda_0\pi_\omega(t)<0,$$

$$\mu_{i-1}^0\mu_i^0\pi_\omega(t)<0,\quad i=\overline{2,n-1},$$

$$\alpha_0\mu_{n-1}^0\pi_\omega(t)<0,$$

*причем для каждого такого решения имеет место при* $t\uparrow\omega$ *асимптотическое представление*

$$\frac{u'(t)}{\varphi(u(t))}=\frac{\alpha_0(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\big[\pi_\omega(t)\big]^{n-1}p(t)\big[1+o(1)\big], \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{\varphi'(u(t))}=\frac{\alpha_0(-1)^{n}\Lambda_0}{(n-1)!}\big[\pi_\omega(t)\big]^{n}p(t)\big[1+o(1)\big], \tag{3.14}$$

$$\frac{u^{(i-1)}(t)}{u^{(i)}(t)}=\frac{1}{1-i}\pi_\omega(t)\big[1+o(1)\big],\quad i=\overline{2,n-1}. \tag{3.15}$$

*Более того, при выполнении указанных условий существует $k$-параметрическое семейство таких решений в случае, когда среди корней алгебраического уравнения* (3.12) *имеется $k$ корней* (*с учетом кратных*), *знаки действительных частей которых противоположны знаку числа* $\rho\mu_1^0$.

***Замечание* 3.3.** Если функция $\psi(z)=\varphi'\big(\varphi^{-1}(z)\big)$ удовлетворяет условию $S$, то из представлений (3.13) – (3.15) легко с использованием замечания 2.2 могут быть получены более простые асимптотические представления для $\varphi(u)$.


1. *Мирзов Д. Д.* Об асимптотических свойствах решений одной системы типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 9. – С. 1498 – 1504.
2. *Мирзов Д. Д.* Некоторые асимптотические свойства решений одной системы типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 9. – С. 1519 – 1532.
3. *Мирзов Дж. Д.* Асимптотические свойства решений систем нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Майкоп: Адыгей. книж. изд-во, 1993. – 132 с.
4. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления правильных решений одной двумерной системы дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2002. – № 4. – С. 11 – 17.

5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления правильных решений одной полулинейной двумерной системы дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2002. – № 5. – С. 11 – 17.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
7. *Maric V.* Regular variation and differential equations. – Springer, 2000. – 127 p.
8. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2007. – **43**, № 9. – С. 1311 – 1323.
9. *Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений дифференциального уравнения $n$-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 4. – С. 562 – 573.
10. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52 – 80.
11. *Белозерова М. А.* Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат студ. – 2008. – **29**, № 1. – С. 52 – 62.
12. *Білозерова М. О.* Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, у деякому сенсі близькими до степеневих // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2008. – Вип. 374. – С. 34 – 43.
13. *Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 3 – 15.
14. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 310 – 331.
15. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628 – 650.
16. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.

Получено 10.06.11