УДК 512.542

В. Ф. Велесницкий, В. Н. Семенчук (Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Л. А. ШЕМЕТКОВА

This work is devoted to the investigation of the structure of superradical formations.

Статтю присвячено вивченню будови надрадикальних формацій.

Классический результат Фиттинга состоит в том, что класс нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ замкнут относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп. Формации Фиттинга, т. е. формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно взятия субнормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, начали рассматривать с развитием теории формаций.

В 1970 году Хоукс поставил проблему об описании разрешимых наследственных формаций Фиттинга. В работе [1] Хоукс дал описание метанильпотентных наследственных формаций Фиттинга. Брайс и Косси [2] в 1972 году доказали, что любая разрешимая наследственная формация Фиттинга является насыщенной. В работах [3, 4] В. Н. Семенчуком получено полное описание разрешимых наследственных формаций Фиттинга. Оказалось, что любую разрешимую наследственную формацию Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно получить из формаций всех разрешимых π-групп (для различных множеств π простых чисел) с помощью операций произведения и пересечения формаций.

Развивая подход Хоукса, Л. А. Шеметков в Коуровской тетради [5] поставил следующую проблему.

Проблема 1. *Классифицировать наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что любая группа $G = AB$, где A и B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы, принадлежит $\mathfrak{F}$.*

В настоящее время такие формации называют сверхрадикальными формациями.

Полное решение данной проблемы в классе конечных разрешимых групп было получено В. Н. Семенчуком в работе [6].

В настоящей работе получено полное решение проблемы для произвольных непустых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, у которых минимальные не $\mathfrak{F}$-группы разрешимы.

Все группы в работе конечны. В дальнейшем нам потребуются следующие определения и обозначения.

Обозначим через π некоторое множество простых чисел, через $\mathfrak{S}_\pi$ класс всех π-групп, через $\mathfrak{S}$ класс всех разрешимых групп.

Если $\mathfrak{F}$ — класс групп и G — группа, то корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация — класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация называется насыщенной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ множество всех простых чисел p, для которых в $\mathfrak{F}$ имеется неединичная p-группа.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу H группы G называют $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Несколько другое понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности введено Кегелем. Фактически оно объединяет понятие субнормальности и $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Подгруппу H называют *$\mathfrak{F}$-субнормальной в смысле Кегеля* или *$\mathfrak{F}$-достижимой*, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{X}$-сверхрадикальной, если любая группа $G \in \mathfrak{X}$ такая, что $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, то $\mathfrak{X}$-сверхрадикальная формация является сверхрадикальной.

$G_{\mathfrak{S}}$ — произведение всех нормальных $\mathfrak{S}$-подгрупп (разрешимых подгрупп) группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется композиционной, если из $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G*;

2) *если H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа K для любой подгруппы K группы G.*

Доказательство. 1. Пусть H — подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Поскольку $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, подгруппа $H/G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы $G/G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда, согласно определению $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы, следует, что существует максимальная цепь

$$G/G^{\mathfrak{F}} = H_0/G^{\mathfrak{F}} \supset H_1/G^{\mathfrak{F}} \supset \ldots \supset H_n/G^{\mathfrak{F}} = H/G^{\mathfrak{F}}$$

такая, что $(H_{i-1}/G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i/G^{\mathfrak{F}}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, а это значит, что H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

2. Пусть H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть K — некоторая подгруппа из G. Рассмотрим цепь подгрупп

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \ldots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Поскольку $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ и формация $\mathfrak{F}$ наследственна, из $H_{i-1}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}.$$

Теперь в силу изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^{\mathfrak{F}}/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \simeq H_{i-1} \cap K/H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K/(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Итак, $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i \cap K$. Отсюда, по определению, $H \cap K$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы K.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, H и N — подгруппы группы G, причем N нормальна в G. Тогда*:

1) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N*;

2) *если $N \subseteq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G тогда и только тогда, когда H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда, по определению, существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$.

Рассмотрим цепь подгрупп

$$G = H_0N \supseteq H_1N \supseteq \ldots \supseteq H_mN = HN.$$

Поскольку $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$, то

$$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}}N = (H_i)^{\mathfrak{F}}N.$$

Отсюда следует, что

$$(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N \subseteq H_iN.$$

Итак, $(H_{i-1}N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда, по определению, HN — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Из свойств корадикала группы имеем

$$(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} = (H_{i-1})^{\mathfrak{F}}N/N.$$

Поэтому $(H_{i-1}N/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_iN/N$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Значит, HN/N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G/N.

Утверждение 2 леммы следует из утверждения 1 и свойств корадикала группы.

Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а любая ее собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$. Множество всех таких групп будем обозначать $M(\mathfrak{F})$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая неединичная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Известно, что $\Phi(G) \subset F(G)$. Тогда существует такая p-группа N из $F(G)$, что $N \notin \Phi(G)$. Следовательно, найдется такая максимальная подгруппа M, что $G = NM$. Так как M — собственная подгруппа группы G и G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $M \in \mathfrak{F}$.

Рассмотрим фактор-группу G/N:

$$G/N = MN/N \simeq M/M \cap N \in \mathfrak{F}.$$

Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа.

Лемма доказана.

В следующих леммах содержатся известные результаты о сплетениях групп.

Лемма 4 [8]. *Пусть* $W = Z_{p^{n-1}} \wr Z_p$ *и* B — *база сплетения,* $p \in \mathbb{P}$, $p \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) W *содержит субнормальную подгруппу, изоморфную* Z_{p^n};
2) *если* $M = [B, Z_p]$, $N = MZ_p$ *и* $\omega \in N \setminus M$, *то* $\omega^p = 1$;
3) $W = BN$, *где* B *и* N — *нормальные подгруппы* W *экспоненты* p^{n-1}, $n \geq 2$.

Лемма 5 [8]. *Пусть* N — *нормальная подгруппа группы* G. *Тогда существует мономорфизм*

$$\mu \colon G \to W = N \wr (G/N)$$

такой, что $B\mu(G) = W$ *и* $B \cap \mu(G) = \mu(N)$, *где* B — *база сплетения* W.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая наследственная* $\mathfrak{S}$-*сверхрадикальная формация. Тогда* $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.

Доказательство. Вначале докажем, что любая примарная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является циклической. Пусть $G \in M(\mathfrak{F})$ и G — p-группа. Если G не циклическая, то в G найдутся две различные максимальные подгруппы M_1 и M_2. Ясно, что они нормальны в G и $G/M_i \in \mathfrak{F}$, $M_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_i$. По лемме 1 M_1, M_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Поскольку $G = M_1M_2$ и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Покажем, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим противное и пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \setminus \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ — наследственная формация, то G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Покажем, что G — примарная группа. Пусть $|\pi(G)| > 1$. Поскольку G нильпотентна, то $G = A \times B$. Очевидно, что $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G \simeq G/A \cap B \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, G — p-группа. Вначале было показано, что G — циклическая p-группа. Пусть $|G| = p^n$, где n — некоторое фиксированное натуральное число.

Если $n = 1$, то G — группа простого порядка p. Поскольку $G \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $\pi(\mathfrak{F})$ — характеристика формации $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть $n > 1$. Рассмотрим группу $W = Z_{p^{n-1}} \wr Z_p$. Тогда $W = [B]Z_p$, где B — база сплетения. По лемме 4 W содержит подгруппу P, изоморфную G. Так как $P \in M(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, W не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Согласно лемме 4 $W = BN$, где B и N — нормальные подгруппы группы W экспоненты p^{n-1}. Заметим, что $B \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $W/B \in \mathfrak{F}$ и $W/N \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $W^{\mathfrak{F}} \subseteq B \cap N$. Согласно лемме 1 B и N — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы W. Так как $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $W \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Лемма доказана.

Напомним, что минимальную ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Если группа Шмидта $H = [H_p]H_q$, где $|H_q| = q$, принадлежит $\mathfrak{F}$, то формация $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = [G_p]G_q$, где G_q — циклическая группа.*

Доказательство. Вначале по индукции докажем, что любая группа $G = [G_p]G_q$, где $|G_q| = q$, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Предположим, что G имеет нормальную подгруппу K, индекс которой в G есть степень простого числа p. Очевидно, что $K = [K_p]K_q$, где $|K_q| = q$. По индукции $K \in \mathfrak{F}$. По условию группа $H = [H_p]H_q \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $p, q \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По лемме 6 $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $G/K \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. По лемме 1 K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Аналогично можно показать, что G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Очевидно, что $G = G_pK$. Так как K, G_p принадлежат $\mathfrak{F}$, из $\mathfrak{S}$-сверхрадикальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому можно считать, что $G' = G_p \neq 1$. Тогда в G найдется нормальная p-подгруппа T такая, что $G/T \simeq H$.

Если $T = 1$, то $G \simeq H \in \mathfrak{F}$. Пусть $T \neq 1$. Поскольку $G/T \in \mathfrak{F}$, то G_qT/T и G_p/T — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы G/T по лемме 2. По лемме 2 G_qT и G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальные погруппы группы G. Так как $|G_qT| < |G|$, по индукции $G_qT \in \mathfrak{F}$. Аналогично $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $G_qTG_p = G$ и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $G = [G_p]G_q$, где G_q — циклическая группа и $|G_p| = q^t$. Доказательство проведем индукцией по t. Если $t = 1$, то, как показано выше, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $t > 1$ и R — нормальная подгруппа группы G такая, что $|G\colon R| = q$. По лемме 5 существует мономорфизм $\mu\colon G \to E = R \wr A$, где $A \simeq Z_q$. Пусть B — база сплетения. Очевидно, что E — p-замкнутая группа. По индукции $E_pA \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что E_pA — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы E и B — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа E. Так как $E = E_pAB$, из $\mathfrak{S}$-сверхрадикальности $\mathfrak{F}$ следует, что $E \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим подгруппу $W = E_p\mu(G)$ группы E. Поскольку $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $W \in \mathfrak{F}$. Это значит, что $G \in \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Лемма 8 [9]**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная разрешимая наследственная формация, f — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова, когда $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $h(p) = \varnothing$ для любого простого числа $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.*

В следующих теоремах получено решение проблемы для произвольных непустых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, у которых минимальные не $\mathfrak{F}$-группы разрешимы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация. Тогда любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.*

Доказательство. Пусть G — произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. По лемме 3 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа.

Покажем, что $|\pi(G)| \leq 2$. Предположим противное, т. е. $|\pi(G)| > 2$. Тогда найдутся, по крайней мере, три попарно различных простых числа p, q, r, принадлежащих $\pi(G)$. Поскольку G — разрешимая группа, в G найдутся максимальные подгруппы M_1 и M_2, индексами которых являются числа q и r соответственно. Так как G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $M_1 \in \mathfrak{F}$ и $M_2 \in \mathfrak{F}$. Поскольку $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа, где $p \neq q$, $q \neq r$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_1$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M_2$. По лемме 1 M_1 и M_2 — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Согласно теореме Оре любые две максимальные подгруппы в G либо сопряжены, либо перестановочны. Отсюда следует, что $G = M_1M_2$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $|\pi(G)| \leq 2$.

Пусть $|\pi(G)| = 1$. Покажем, что G — группа простого порядка p, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Действительно, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, из леммы 6 следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Так как G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, то $|G| = p$.

Рассмотрим случай $|\pi(G)| = 2$. Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$, $p \neq q$. Согласно лемме 3 $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Предположим противное, т. е. $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$. Рассмотрим подгруппы $G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes G_q$ и G_p. Поскольку они являются собственными подгруппами группы G, то $G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes G_q \in \mathfrak{F}$ и $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes G_q$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$, по лемме 1 они являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами группы G. Вследствие того, что $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{S}$-сверхрадикальна и $G = (G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes G_q)G_p$, $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Таким образом, G — бипримарная p-замкнутая группа, а также согласно лемме 6 группа G ненильпотентна.

Итак, $G = [G^{\mathfrak{F}}]G_q$. Покажем, что G — группа Шмидта. Допустим противное. Пусть G — не группа Шмидта. Тогда G ненильпотентна, но каждая ненильпотентная группа содержит группу Шмидта H. Отсюда следует, что $H/\Phi(H)$ — группа Шмидта, $\big|H/\Phi(H)\big| = p^{\alpha}q$. Так как $H \subset G$, то $H \in \mathfrak{F}$, а значит, $H/\Phi(H) \in \mathfrak{F}$, но по лемме 7 $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Любая непустая наследственная сверхрадикальная формация* $\mathfrak{F}$, *у которой* $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$, *является композиционной.*

Доказательство. Согласно теореме 1 и требованию $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$ любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа — группа Шмидта либо группа простого порядка. Следовательно, $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова. Тогда, как показано в работе [10], $\mathfrak{F}$ — композиционная формация.

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{S}$-*сверхрадикальная формация и* $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

2) $\mathfrak{F}$ — *формация Шеметкова.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теоремы 1 и требования $M(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Для этого надо показать, что любая разрешимая группа $G = AB$, где A, B — $\mathfrak{F}$-субнормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы ($\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова), принадлежит $\mathfrak{F}$. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G.

Покажем, что G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Пусть G содержит две разрешимые минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. По лемме 2 AN_i/N_i, BN_i/N_i, $i = 1, 2$, — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G/N_i. Очевидно, что $AN_i/N_i \in \mathfrak{F}$ и

$BN_i/N_i \in \mathfrak{F}$. По индукции $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим противное. Тогда, как и выше, по индукции нетрудно показать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как G разрешима, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}$.

В работе [11] было доказано, что разрешимая наследственная формация Шеметкова является насыщенной. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{S}\cap\mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, G имеет единственную минимальную нормальную p-подгруппу N и $\Phi(G) = 1$. Отсюда следует, что $C_G(N) = N$.

Рассмотрим подгруппы AN и BN. Покажем, что они принадлежат $\mathfrak{F}$. Из того факта, что $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — насыщенная формация и N — p-группа, где $p \in \pi(G)$, то $N \in \mathfrak{F}$. Далее, поскольку $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. По лемме 1 N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Если AN — собственная подгруппа группы G, то, по индукции, $AN \in \mathfrak{F}$. Итак, $G = AN$.

Так как $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$, то $N = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку A — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то $A \subseteq M$, где M — максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа группы G. Теперь из того факта, что $N = G^{\mathfrak{F}}$ содержится в M, следует, что $G = AN \subseteq M$, что невозможно. Итак, $AN \in \mathfrak{F}$. Аналогичным образом получим, что $BN \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ — насыщенная наследственная формация Шеметкова, по лемме 8 она имеет локальный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S})$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Так как $AN \in \mathfrak{F}$ и N — p-группа, по лемме 4.5 из [7] $AN/F_p(AN) \in h(p)$. Поскольку $C_G(N) = N$, нетрудно показать, что $O_{p'}(AN) = 1$. Следовательно, $F_p(AN)$ — p-группа. Так как h — полный экран, то $AN \in h(p)$. Поскольку $h(p)$ — наследственная формация, то $A \in h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Очевидно, что $G = AB \in h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$. Теперь из того факта, что $G/C_G(N) \in h(p)$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Заметим, что если в определении сверхрадикальной формации понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности заменить понятием $\mathfrak{F}$-достижимости, то теоремы 1 – 3 остаются справедливыми.

1. *Hawkes T.* On Fitting formations // Math. Z. – 1970. – **117**. – S. 177 – 182.
2. *Bryce R. A.* Fitting formations of finite soluble groups // Math. Z. – 1972. – **127**, № 3. – S. 217 – 233.
3. *Семенчук В. Н.* Разрешимые тотально локальные формации // Сиб. мат. журн. – 1995. – **36**, № 4. – С. 861 – 872.
4. *Семенчук В. Н.* О разрешимых тотально локальных формациях // Вопросы алгебры. – 1997. – № 11. – С. 109 – 115.
5. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1992. – 172 с.
6. *Семенчук В. Н.* Разрешимые $\mathfrak{F}$-радикальные формации // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 1. – С. 261 – 266.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
8. *Doerk K.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
9. *Семенчук В. Н.* Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: Тр. Ин-та математики АН БССР. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 175 – 181.
10. *Каморников С. Ф.* О двух проблемах Л.А. Шеметкова // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 4. – С. 801 – 812.
11. *Скиба А. Н.* Об одном классе локальных формаций конечных групп // Докл. АН БССР. – 1990. – **34**, № 11. – С. 382 – 385.

Получено 04.05.12