УДК 517.98+515.164.17

Ю. В. Богданский (Ин-т прикл. систем. анализа Нац. техн. ун-та Украины „КПИ”, Киев)

БАНАХОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО

We propose a version of the Gauss – Ostrogradskii formula for a Banach manifold with uniform atlas.

Запропоновано варіант формули Гаусса – Остроградського на банаховому многовиді з рівномірним атласом.

В работах [1 – 7] рассмотрены различные варианты обобщения классической формулы Гаусса – Остроградского в бесконечномерных линейных пространствах и в пространстве конфигураций. В данной работе предлагается вариант формулы Гаусса – Остроградского на банаховых многообразиях, снабженных атласом специального класса. Полученный результат, насколько известно автору, является новым и в случае банахова пространства, и в случае конечномерных многообразий с произвольной борелевской мерой. Работа является принципиально улучшенным вариантом ранее опубликованной статьи [8].

1. Банаховы многообразия с ограниченной структурой. Пусть M — банахово многообразие класса C^2 с модельным пространством E (хаусдорфово, вещественное).

Определение 1. *Атлас* $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *на* M *назовем „ограниченным”, если существует число* $K > 0$ *такое, что отображения склейки* $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *для каждой пары карт атласа удовлетворяют условию* $(x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \Rightarrow \big(\|F'_{\beta\alpha}(x)\| \leqslant K; \|F_{\beta\alpha},,(x)\| \leqslant K\big)$.

Два ограниченных атласа Ω и Ω' на M назовем „*эквивалентными*”, если $\Omega \cup \Omega'$ также является ограниченным атласом на M.

Если на M задан класс эквивалентных ограниченных атласов, то будем говорить, что на M задана „*ограниченная структура* (*класса* C^2)”.

Пусть (M_1, Ω_1), (M_2, Ω_2) — два банаховых многообразия M_1, M_2 класса C^2 с модельными пространствами E_1, E_2 и ограниченными атласами Ω_1, Ω_2 соответственно.

Определение 2. *Морфизм* $f\colon M_1 \to M_2$ *назовем „ограниченным”, если для него существует* $C > 0$ *такое, что для любой пары карт* $(U, \varphi) \in \Omega_1$, $(V, \psi) \in \Omega_2$ *выполнено условие* $(p \in U, f(p) \in V) \Rightarrow \big(\big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p))\big\| \leqslant C; \big\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})''(\varphi(p))\big\| \leqslant C\big)$. *Очевидным образом определен ограниченный изоморфизм* (M_1, Ω_1) *и* (M_2, Ω_2).

При замене ограниченных атласов Ω_1 и Ω_2 на эквивалентные $\tilde\Omega_1$ и $\tilde\Omega_2$ соответственно, определяющее свойство ограниченного морфизма сохраняется. Можно говорить о *категории банаховых* C^2*-многообразий с ограниченной структурой* (класса C^2). Аналогично для любого $p \geqslant 1$ вводятся C^p-многообразия с ограниченной структурой и соответствующая категория.

Задание ограниченного атласа на M позволяет ввести на M метрику. Опишем схему построения метрики.

Для кусочно-гладкой кривой $[t_1; t_2] \ni t \mapsto x(t) \in M$ рассматриваем всевозможные разбиения Δ: $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = t_2$ отрезка параметра, при которых каждая кривая $\Gamma_k = \{x(t) \mid \tau_{k-1} \leqslant t \leqslant \tau_k\}$ лежит в области определения одной из карт φ_k исходного атласа. Каждому такому разбиению Δ сопоставляем число $l(\Gamma;\Delta) = \sum_{k=1}^{m} l(\Gamma_k)_{\varphi_k}$ $\Bigg($здесь $l(\Gamma_k)_\varphi$ — длина представления кривой Γ_k в карте φ: $l(\Gamma_k)_\varphi = \displaystyle\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \|(x_\varphi)'(\tau)\| d\tau$; $x_\varphi(\tau) = \varphi(x(\tau))\Bigg)$. Ограниченность атласа приводит к корректному определению длины кривой Γ: $L(\Gamma) = \sup_\Delta \{l(\Gamma;\Delta)\}$.

Для связного многообразия M расстояние между точками $x, y \in M$ вводим как точную нижнюю грань длин всевозможных кусочно-гладких кривых, соединяющих эти точки. Полученная метрика согласована с исходной топологией.

***Замечание* 1.** Ограниченность атласа позволяет ввести в касательном пространстве T_pM к многообразию M норму, эквивалентную норме модельного пространства. Для $\xi \in T_pM$ положим $|||\xi|||_p = \sup_\alpha \|\xi_{\varphi_\alpha}\|$, где $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — полный набор карт, для которых $p \in U_\alpha$, $\xi_\varphi \in E$ — представление касательного вектора ξ в карте φ. При этом имеет место свойство „*равномерного топологического изоморфизма*" пространств T_pM и модельного пространства E: $\|\xi_\varphi\| \leqslant |||\xi|||_p \leqslant K\|\xi_\varphi\|$, где K — постоянная из определения ограниченного атласа, φ — карта в точке $p \in M$. Из определения ограниченного морфизма $f\colon (M_1, \Omega_1) \to (M_2, \Omega_2)$ следует, что он является липшицевым отображением по отношению к введенной выше метрике.

Определение 3. *Векторное поле класса C^1 на многообразии с ограниченным атласом (M, Ω) назовем „ограниченным", если существует число $C > 0$, ограничивающее сверху главную часть $\mathbf{X}_\varphi$ каждого локального представления векторного поля $\mathbf{X}$ вместе с его производной: $\forall (U, \varphi) \in \Omega$ $\forall x \in \varphi(U)$: $\|\mathbf{X}_\varphi(x)\| \leqslant C$, $\|\mathbf{X}'_\varphi(x)\| \leqslant C$. Данное свойство не изменится при переходе к эквивалентному атласу. Множество ограниченных векторных полей класса C^1 обозначим $C^1_b(M)$.*

Условимся говорить, что функция $u\colon M \to \mathbb{R}$ является функцией класса C^p_b, $p = 0, 1, 2$; $C^0_b = C_b$, если u — функция класса C^p и существует такое число L, что для любой точки $p \in M$ и карты (U, φ) в точке p выполнены неравенства $\left\|u^{(k)}_\varphi(\varphi(p))\right\| \leqslant L$ для $0 \leqslant k \leqslant p$, где $u_\varphi = u \circ \varphi^{-1}$ — представление u в карте φ. Ясно, что множество векторных полей $C^1_b(M)$ (а также множества функций классов C^p_b, $p = 0, 1, 2$) не изменится при замене ограниченного атласа на эквивалентный, а потому корректно определено заданием на M ограниченной структуры.

Определение 4. *Ограниченный атлас Ω назовем „равномерным", если существует такое $r > 0$, что для любой точки $p \in M$ существует такая карта $(U, \varphi) \in \Omega$, что $\varphi(U)$ содержит шар в E с центром $\varphi(p)$ радиуса r* [9, 10].

В случае, когда многообразие M имеет ограниченную структуру и среди эквивалентных атласов, задающих эту структуру, есть, по крайней мере, один равномерный атлас, структуру будем называть *равномерной*. Нетрудно проверить, что структуры ограниченно изоморфных многообразий одновременно равномерны или нет.

В случае равномерного атласа поток $\Phi(t, x)$ ограниченного векторного поля $\mathbf{X} \in C^1_b(M)$ определен на $\mathbb{R} \times M$ [9, с. 96]. Следовательно, данное свойство имеет место на многообразии с равномерной структурой.

Можно доказать, что в случае равномерного атласа многообразие M оказывается полным метрическим пространством по введенной выше метрике, а потому оно полно по метрике, порожденной любым ограниченным атласом, эквивалентным равномерному.

***Замечание* 2.** Примеры банаховых многообразий класса C^2 с равномерным атласом можно получить как поверхности S совместного уровня системы функций $\{F_1(\cdot), \ldots, F_m(\cdot)\}$ класса C^2, определенных на банаховом пространстве, таких, для которых семейство $\{F_1'(\cdot), \ldots, F_m'(\cdot)\}$ имеет постоянный ранг на S и функции F_k равномерно ограничены на S вместе с вторыми производными. Соответствующий равномерный атлас на S строится на основании теоремы о неявной функции.

Если (M_1, Ω_1), (M_2, Ω_2) — банаховы многообразия с ограниченными атласами и модельными пространствами E_1 и E_2, то на $M_1 \times M_2$ определен атлас $\Omega_1 \times \Omega_2 := \big\{(U \times V, \varphi \times \psi) \mid (U, \varphi) \in \Omega_1; (V, \psi) \in \Omega_2\big\}$. Получим многообразие с ограниченным атласом $(M_1 \times M_2, \Omega_1 \times \Omega_2)$ и с модельным пространством $E_1 \dot{+} E_2$. Замена ограниченных атласов на эквивалентные $\Omega_1 \sim \tilde{\Omega}_1$, $\Omega_2 \sim \tilde{\Omega}_2$ приводит к эквивалентному атласу $\tilde{\Omega}_1 \times \tilde{\Omega}_2 \sim \Omega_1 \times \Omega_2$ на $M_1 \times M_2$. В частности, для (M, Ω) соответствующую ограниченную структуру на $M \times (a; b)$ задаем атласом $\Omega \times \mathrm{id} :=$ $:= \big\{(U_\alpha \times (a; b), \varphi_\alpha \times \mathrm{id} \mid (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega\big\}$.

Пусть M — многообразие с ограниченной структурой.

Определение 5. *Подмножество $S \subset M$ назовем вложенным подмногообразием в M коразмерности 1, если существуют многообразие N ограниченной структуры, модельным пространством которого является подпространство E_1 в E коразмерности 1, $t_0 > 0$ и ограниченный изоморфизм $g\colon N \times (-t_0; t_0) \to U \subset M$ на открытое подмногообразие U в M, при котором $g(N \times \{0\}) = S$.*

Мотивация данного определения такова: в конечномерной дифференциальной геометрии данное определение для компактных вложенных подмногообразий коразмерности 1 равносильно классическому.

2. Строго трансверсальные векторные поля. Пусть на многообразии M с ограниченным атласом Ω и модельным пространством E задана область G, граница которой $S = \partial G$ является вложенным в M подмногообразием коразмерности 1, и $g\colon N \times (-t_0; t_0) \to M$ — соответствующий изоморфизм, существование которого обусловлено определением 5.

Пусть $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$. Для каждой точки $p \in S$ касательное пространство T_pM наделено предложенной выше нормой, в которой оно топологически изоморфно E. T_pS — подпространство в T_pM коразмерности 1 и в T_pM определено расстояние $d(\mathbf{Z}(p), T_pS)$ вектора $\mathbf{Z}(p)$ до подпространства T_pS.

Определение 6. *Назовем векторное поле $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ строго трансверсальным к S, если существует $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $p \in S$ $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) \geqslant \delta$.*

***Замечание* 3.** Нетрудно установить, что условие строгой трансверсальности поля $\mathbf{Z}$ к S не изменится при замене атласа Ω на эквивалентный, а потому определяется ограниченной структурой на M.

Пусть поле $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ строго трансверсально к S. Для каждой точки $(x, t) \in N \times (-t_0; t_0)$ ограниченный изоморфизм g индуцирует топологический изоморфизм $dg(x, t)\colon T_{(x,t)}(N \times$ $\times (-t_0; t_0)) \to T_{g(x,t)}M$, а потому векторное поле $\mathbf{W}$ на $N \times (-t_0; t_0)$, g-связанное с полем $\mathbf{Z}$, наследует свойство строгой трансверсальности: $\mathbf{W}$ строго трансверсально к $N \times \{0\}$.

Векторное поле $\mathbf{W}$ представимо в виде

$$\mathbf{W}(x, t) = \mathbf{Q}(x, t) + \alpha(x, t)\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Q}(x,t) \in T_{(x,t)}(N \times \{t\})$ для всех $x \in N$, $t \in (-t_0; t_0)$, α — гладкая функция на $N \times (-t_0; t_0)$. Из свойства равномерного топологического изоморфизма касательных пространств $T_{(x,t)}(N \times \times (-t_0; t_0))$ и строгой трансверсальности $\mathbf{W}$ к $N \times \{0\}$ следует существование такого $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in N$ имеет место неравенство $|\alpha(x,0)| \geqslant \varepsilon$. Отметим, что в силу непрерывности функция $\alpha(x,0)$ имеет на N постоянный знак. Поскольку поле $\mathbf{W} \in C_b^1(N \times (-t_0; t_0))$, функция $\alpha(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по t равномерно относительно $x \in N$:

$$\exists C > 0 \quad \forall t_1, t_2 \in (-t_0, t_0) \quad \forall x \in N\colon \qquad |\alpha(x,t_1) - \alpha(x,t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|. \tag{2}$$

Для корректности последующих построений следует предполагать, что (локальный) поток поля $\mathbf{Z}$ удовлетворяет условию: существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \bar{G}$, $|t| < \delta$ определено $\Phi_t x$. Строго трансверсальное к S векторное поле $\mathbf{Z}$, имеющее указанное свойство, может быть построено следующим образом с использованием определяющего S ограниченного изоморфизма $g\colon N \times (-t_0; t_0) \to U \subset M$. Пусть функция $a(x,t)$ — гладкая функция класса C_b^1 на $N \times (-t_0; t_0)$, для которой $\inf_{x \in S} |a(x,0)| > 0$ и $a(x,t) = 0$ при $|t| > \dfrac{\delta}{2}$. Тогда поле $\mathbf{Z}$ на M строим как g-связанное с полем $\mathbf{W}(x,t) = a(x,t)\dfrac{\partial}{\partial t}$, доопределенное нулем вне U. Можно вместо поля $a(x,t)\dfrac{\partial}{\partial t}$ брать поле $\mathbf{W}(x,t) = \mathbf{Q}(x,t) + a(x,t)\dfrac{\partial}{\partial t}$ $(\mathbf{Q}(x,t) \in T_{(x,t)}(N \times \{t\}))$, но в предположении, что многообразие N имеет равномерную структуру.

С целью упрощения последующего изложения допускаем, что M имеет равномерную структуру, а потому все поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ являются полными.

Потоки Φ_t векторного поля $\mathbf{Z}$ и Ψ_t поля $\mathbf{W}$ связаны при достаточно малых t соотношением $\Phi_t(p) = \Phi_t(g(y)) = g(\Psi_t(y))$. Пусть, для определенности, $\alpha(x,0) \geqslant \varepsilon > 0$ для $x \in N$ (случай $\alpha(x,0) \leqslant -\varepsilon$ исследуется аналогично), $t \in (0; t_0)$. Тогда при $t < \dfrac{\varepsilon}{2C}$ в силу (2) для всех $x \in N$ выполнено неравенство $\alpha(x,t) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, а потому имеет место вложение

$$\bigcup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \Psi_\tau(N \times \{0\}) \supset N \times \left[0; \frac{\varepsilon}{2}t\right]. \tag{3}$$

В силу оценки $\alpha(x,t) \leqslant C_1$, имеющей место вследствие ограниченности поля $\mathbf{W}$, при $t \in \in \left[0; \dfrac{t_0}{C_1}\right)$ имеет место вложение

$$\bigcup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \Psi_\tau(N \times \{0\}) \subset N \times [0; C_1 t]. \tag{4}$$

Пусть ρ_1, ρ_2 — метрики на многообразиях $N \times (-t_0; t_0)$ и M соответственно, порожденные соответствующими ограниченными атласами. Тогда существуют постоянные K_1, K_2, K_3 такие, что для всех $x \in N$, $t_1, t_2 \in (-t_0; t_0)$ выполнены неравенства

$$|t_1 - t_2| \leqslant \rho_1((x,t_1),(x,t_2)) \leqslant K_1|t_1 - t_2| \tag{5}$$

(нормы в модельном пространстве E_1 многообразия N и в пространстве $E = E_1 \dot{+} \mathbb{R}$ связываем соотношением $\|(x,t)\|_E = \|x\|_{E_1} + |t|$), а для всех $y_1, y_2 \in N \times (-t_0; t_0)$ выполнены неравенства

$$\rho_2(g(y_1), g(y_2)) \leqslant K_2 \rho_1(y_1, y_2), \tag{6}$$

$$\rho_1(y_1, y_2) \leqslant K_3\rho_2(g(y_1), g(y_2)) \tag{7}$$

(в силу липшицевости отображений g и g^{-1}).

Обозначим через A_δ δ-окрестность множества A в соответствующей метрике. Тогда из (3), (5) при $t \in \left(0, \min\left(t_0, \dfrac{\varepsilon}{2C}\right)\right)$ следует вложение

$$\bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \Psi_\tau(N\times\{0\}) \supset (N\times\{0\})_{\varepsilon t/2} \cap (N\times[0;t_0)), \tag{8}$$

а из (4), (5) также при достаточно малых $t > 0$ получаем вложение

$$\bigcup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \Psi_\tau(N\times\{0\}) \subset (N\times\{0\})_{K_1C_1t} \cap (N\times[0;t_0)). \tag{9}$$

Определение 7. *Будем говорить, что* $\mathbf{Z}$ *— внешнее поле по отношению к* G, *если поток* Φ_t *поля* $\mathbf{Z}$ *при* $t>0$ *удовлетворяет условию* $\Phi_tG \supset G$.

Пусть $\mathbf{Z}$ — внешнее поле по отношению к G. Тогда при достаточно малых $t > 0$ имеют место равенства $\Phi_t(G)\setminus G = \bigcup_{0\leqslant\tau<t}\Phi_t(S) = g\left(\bigcup_{0\leqslant\tau<t}\Psi_t(N\times\{0\})\right)$. Потому в силу (6) и (9) получим $\Phi_t(G)\setminus G\subset S_{K_2K_1C_1t}\setminus G$, а в силу (7) и (8) — $\Phi_t(G)\setminus G\supset S_{\varepsilon t/(2K_3)}\setminus G$. Тем самым доказано следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть на* M *фиксирован ограниченный атлас,* $\mathbf{Z}\in C_b^1(M)$ *— внешнее поле по отношению к* G *и строго трансверсальное к* S. *Тогда существуют числа* $a, b, \delta > 0$, *для которых при* $t\in(0;\delta)$ *имеют место вложения*

$$S_{at}\setminus G\subset \Phi_t(G)\setminus G\subset S_{bt}\setminus G. \tag{10}$$

***Замечание* 4.** В условиях предложения 1 для $t<0$ имеют место вложения, аналогичные (10): существуют $a, b, \delta > 0$, для которых при $t\in(-\delta;0)$ справедливы вложения $G\setminus S_{-at}\subset$ $\subset G\setminus\Phi_t(G)\subset G\setminus S_{-bt}$.

3. Исследование согласования меры и области. Пусть M — банахово многообразие с равномерной структурой и μ — конечная борелевская мера на M (не обязательно неотрицательная). Пусть $\mathbf{Z}\in C_b^1(M)$ и $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{Z}}$ — поток поля $\mathbf{Z}$. Дифференцируемость μ относительно поля $\mathbf{Z}$ (в сильном смысле) предполагает существование для каждого борелевского множества $A\subset M$ предела $\vartheta(A) = \lim_{t\to0}\dfrac{1}{t}(\mu(\Phi_tA)-\mu(A))$, откуда следует, что $\vartheta = d_{\mathbf{Z}}\mu$ является борелевской мерой, абсолютно непрерывной относительно μ. При этом $\rho_\mu = \rho_\mu^{\mathbf{Z}} = \dfrac{d\vartheta}{d\mu}$ называется логарифмической производной меры μ относительно поля $\mathbf{Z}$ или дивергенцией поля $\mathbf{Z}$ (относительно меры μ).

Определение 8. *Условимся говорить, что мера* μ *согласована с областью* G, *если существует векторное поле* $\mathbf{Z}\in C_b^1(M)$, *строго трансверсальное к* $S=\partial G$ *и такое, что* μ *дифференцируема вдоль* $\mathbf{Z}$.

При этом не теряя общности можно считать, что соответствующее поле $\mathbf{Z}$ является внешним по отношению к G (в противном случае следует заменить $\mathbf{Z}$ на $-\mathbf{Z}$).

В силу предложения 1 и замечания 4 для векторного поля $\mathbf{Z}\in C_b^1(M)$, внешнего по отношению к G и строго трансверсального к $S=\partial G$, существует $C>0$ (зависящее от выбора ограниченного атласа) такое, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место вложение

$$S_\varepsilon \subset \Phi_{C\varepsilon}(G) \setminus \Phi_{-C\varepsilon}(G). \tag{11}$$

Условие дифференцируемости μ относительно $\mathbf{Z}$ приводит к равенству

$$\mu(\Phi_t G) - \mu(G) = O(t), \quad t \to 0. \tag{12}$$

Поэтому в случае согласованности меры μ с областью G получим равенство

$$\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0 \tag{13}$$

(для неотрицательных мер (13) непосредственно следует из (11) и (12), а для произвольных мер следует использовать тот факт, что положительная и отрицательная части меры μ также сильно дифференцируемы вдоль поля $\mathbf{Z}$).

Пусть $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in C_b^1(M)$ и $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1$ касается S. Фиксируем на M ограниченный атлас Ω и пусть ρ — соответствующая метрика. В силу леммы 1 из [8] существует $C > 0$ такое, что для каждого $x \in G$ имеет место неравенство

$$\rho(\Phi_t^{\mathbf{Z}_2} x, \Phi_t^{\mathbf{Z}_1} \Phi_t^{\mathbf{Y}} x) \leqslant Ct^2 \tag{14}$$

(здесь $\Phi_t^{\mathbf{Z}}$ — поток поля $\mathbf{Z}$). Поскольку $\Phi_t^{\mathbf{Y}} G = G$ при всех $t \in \mathbb{R}$, из (14) следует вложение

$$\Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G \subset (\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G)_{Ct^2}. \tag{15}$$

По аналогии с леммой 1 из [8] доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{X}$ — векторное поле класса C^1 в области D банахова пространства E и существует число $M > 0$ такое, что $\|\mathbf{X}'(\cdot)\|$ ограничена в D числом M. Тогда для всех $x, y \in D$ имеет место неравенство $\|\Phi_t^{\mathbf{X}} x - \Phi_t^{\mathbf{X}} y\| \leqslant e^{M|t|}\|x - y\|$ для тех достаточно малых t, для которых определена левая часть данного неравенства.*

Из леммы следует, что для любого поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ существуют такие числа C_1, $\delta > 0$, что для всех $x, y \in M$, $|t| < \delta$ имеет место неравенство $\rho(\Phi_t x, \Phi_t y) \leqslant C_1 \rho(x, y)$. Потому при малых t ($|t| < \delta$) имеют место вложения

$$\Phi_t(S_\varepsilon) \subset (\Phi_t S)_{C_1 \varepsilon}, \qquad \Phi_t(S_\varepsilon) \supset (\Phi_t S)_{\varepsilon / C_1}. \tag{16}$$

Для любого диффеоморфизма φ многообразия M границей области $\varphi(G)$ является $\varphi(S)$, поэтому $(\varphi(G))_\varepsilon \setminus \varphi(G) \subset (\varphi(S))_\varepsilon$. В частности, $(\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G)_\varepsilon \setminus \Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G \subset (\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} S)_\varepsilon$. Потому при $|t| < \delta$ из (15), (16) следует $\Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G \setminus \Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G \subset (\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} S)_{Ct^2} \subset \Phi_t^{\mathbf{Z}_1}(S_{CC_1 t^2})$. Аналогичное вложение получаем, меняя местами $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$. Потому существуют константы $C, \delta > 0$ такие, что для всех $t \in (-\delta; \delta)$ имеет место вложение

$$\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G \Delta \Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G \subset \Phi_t^{\mathbf{Z}_1}(S_{Ct^2}) \cup \Phi_t^{\mathbf{Z}_2}(S_{Ct^2}). \tag{17}$$

Пусть мера μ дифференцируема вдоль обоих векторных полей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, Φ_t^k — поток поля $\mathbf{Z}_k$, $k = 1, 2$, $\mu_t^k(A) = \mu(\Phi_t^k A)$. Из равномерной счетной аддитивности семейств мер $\dfrac{1}{t}(\mu_t^k - \mu_t)$, $k = 1, 2$, и монотонной сходимости $S_{Ct^2} \searrow S$, $|t| \searrow 0$ следуют равенства

$$\mu_t^k(S_{Ct^2} \setminus S) - \mu(S_{Ct^2} \setminus S) = o(t), \quad t \to 0. \tag{18}$$

Поскольку $\mu(S_{Ct^2}) = O(t^2)$ (см. (13)), из (18) следует равенство

$$\mu(\Phi_t^k(S_{Ct^2})) = o(t), \quad t \to 0. \tag{19}$$

Если μ — неотрицательная мера, то из (17), (19) следует $\mu(\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G \Delta \Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G) = o(t)$, $t \to 0$. Для незнакопостоянной борелевской меры с помощью разложения Жордана получаем равенство

$$|\mu|(\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G \Delta \Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G) = o(t), \quad t \to 0. \tag{20}$$

Тем самым получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть G — область на многообразии с равномерной структурой, $S = \partial G$ — вложенное в M многообразие коразмерности 1, $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in C_b^1(M)$ — строго трансверсальные к S векторные поля, поле $\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2$ касается S. Пусть борелевская мера μ дифференцируема вдоль полей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$. Тогда имеет место равенство* (20).

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *справедливо равенство*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mu(\Phi_t^1 G) - \mu(\Phi_t^2 G)) = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Равенство (21) следует из неравенства

$$|\mu(\Phi_t^1 G) - \mu(\Phi_t^2 G)| \leqslant |\mu|(\Phi_t^1 G \Delta \Phi_t^2 G).$$

4. Поверхностные меры первого типа. Пусть M — банахово многообразие с равномерной структурой, S — вложенное в M подмногообразие коразмерности 1 и $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ — векторное поле на M, строго трансверсальное к S.

Пусть f — непрерывная ограниченная функция на S. Тогда на M существуют непрерывная ограниченная функция $\hat{f}$ и $\delta > 0$ такие, что при $t \in (-\delta; \delta)$, $x \in S$ выполнено равенство $\hat{f}(\Phi_t x) = f(x)$, где Φ_t — поток поля Z.

Для проверки данного утверждения достаточно перейти на многообразие $N \times (-t_0; t_0)$, ограниченно изоморфное открытому в M подмногообразию U, содержащему S. Соответствующая функция $h = (g|_{N \times \{0\}})^* f$ ограничена и непрерывна на $N \times \{0\}$: g-связанное с $\mathbf{Z}$ векторное поле $\mathbf{W}$ строго трансверсально к $N \times \{0\}$. Проведенные выше рассуждения (см. п. 2) доказывают существование такого $\delta > 0$, что при $|t| \leqslant 2\delta$, $x \in N \times \{0\}$ траектория $\Psi_t x$ векторного поля $\mathbf{W}$ находится внутри $N \times (-t_0; t_0)$.

Пусть $q(t)$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, для которой $q(t) = 1$ при $|t| \leqslant \delta$, $q(t) = 0$ при $|t| \geqslant 2\delta$. Определим функцию $\hat{h}(y)$ на $N \times (-t_0; t_0)$ условием: если $y = \Psi_t(x)$, где $x \in N \times \{0\}$; $|t| < 2\delta$, то $\hat{h}(y) = h(x) \cdot q(t)$ и $\hat{h}(y) = 0$ — в противном случае. Тогда $\hat{h}$ — ограниченная непрерывная функция на $N \times (-t_0; t_0)$ и, окончательно, искомой функцией $\hat{f}$ является продолженная нулем вне U функция $(g^{-1})^* \hat{h}$.

Проверка непрерывности построенной выше функции $\hat{h}$ опирается на теорему об обратной функции. Пусть $0 < \varepsilon < 2\delta$. Для любой точки $x \in N$ производная A_x отображения $F\colon N \times \times (-\varepsilon; \varepsilon) \ni \langle x, t \rangle \mapsto \Psi_t(\langle x, 0 \rangle) \in N \times (-t_0; t_0)$ в точке $\langle x, 0 \rangle$ является линейным оператором в

$T_x = T_{\langle x,0\rangle}(N\times(-t_0;t_0))$, действующим по правилу $A_x\colon T_x \xrightarrow{j} E_1 \dotplus \mathbb{R} \ni \langle \xi, a\rangle \mapsto j^{-1}\circ i(\xi) + {}$ $+ a\cdot \mathbf{W}(x,0) \in T_x$, где j — топологический изоморфизм, а i — каноническое вложение E_1 в E.

Если поле $\mathbf{W}$ трансверсально к $N\times\{0\}$, то для каждого $x\in N$ оператор A_x является топологическим изоморфизмом и, в силу теоремы об обратной функции, для каждой точки $x \in N$ существует окрестность точки $\langle x, 0\rangle \in N\times(-t_0;t_0)$, в которой функция $\hat{h}$ непрерывна.

Строгая трансверсальность к $N\times\{0\}$ поля $\mathbf{W}$ приводит к равномерной ограниченности на S норм операторов A_x^{-1}, откуда из анализа доказательства теоремы об обратной функции (см., например, [11, с. 62–64]) следует существование $\varepsilon > 0$, для которого определенное выше отображение F является гомеоморфизмом. Теперь уменьшая, если необходимо, значение $\delta > 0$, приходим к непрерывности $\hat{h}$ на $N\times(-t_0;t_0)$.

Следует отметить, что полученное отображение $f \mapsto \hat{f}$ является линейным по построению.

Лемма 2. *Пусть борелевская мера μ дифференцируема вдоль векторного поля $\mathbf{Z} \in$ $\in C_b^1(M)$, u — функция на M класса C_b, постоянная на траекториях векторного поля $\mathbf{Z}$ вблизи поверхности S ($u(\Phi_t x) = u(x)$ для $x\in S$; $|t|<\delta$). Тогда существует $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\Phi_t G} u d\mu$ и имеет место равенство $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\Phi_t G} u d\mu = \int_G u\rho_\mu d\mu$.*

Доказательство. Положим $\mu_t(A) = \mu(\Phi_t A)$. Тогда $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_{\Phi_t G} u d\mu - \int_G u d\mu\right) =$ $= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_G u d\mu_t - \int_G u d\mu\right) = \int_G u\rho_\mu d\mu$.

Пусть G — область в M, граница S которой является вложенным подмногообразием коразмерности 1; f — непрерывная ограниченная функция на S; векторное поле $\mathbf{Z}\in C_b^1(M)$ строго трансверсально к S и мера μ дифференцируема вдоль $\mathbf{Z}$. Пусть $\hat{f}$ — ограниченная непрерывная на M функция, построенная по функции f указанной выше процедурой. Тогда в силу леммы 2 корректно определено число:

$$I_{\mathbf{Z}}(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G}\hat{f} d\mu = \int\limits_G \hat{f}\cdot\rho_\mu d\mu. \tag{22}$$

$I_{\mathbf{Z}}$ является линейным функционалом на пространстве $C_b(S)$ ограниченных непрерывных функций на S; если $f_n \in C_b(S)$ и $f_n \searrow 0$, то $\hat{f}_n\cdot\rho_\mu^{\mathbf{Z}} \to 0 \pmod{\mu}$, $|\hat{f}_n\cdot\rho_\mu^{\mathbf{Z}}| \leqslant C|\rho_\mu^{\mathbf{Z}}| \in L_1(M;\mu)$, а потому в силу теоремы Лебега $I_{\mathbf{Z}}(f_n)\to 0$ и, как следует из схемы Даниэля, $I_{\mathbf{Z}}$ порождено на S борелевской мерой $\sigma_{\mathbf{Z}}$ (см., например, [12, с. 150]): $I_{\mathbf{Z}}(f) = \int\limits_S f d\sigma_{\mathbf{Z}}$.

Условимся называть меры $\sigma_{\mathbf{Z}}$ поверхностными мерами 1-го типа.

Предложение 2. *Пусть векторные поля $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in C_b^1(M)$ строго трансверсальны к S и $\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2$ касается S. Пусть мера μ дифференцируема вдоль обоих полей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$. Тогда $\sigma_{\mathbf{Z}_1} = \sigma_{\mathbf{Z}_2}$.*

Доказательство. Достаточно доказать равенство $\int\limits_S f d\sigma_{\mathbf{Z}_1} = \int\limits_S f d\sigma_{\mathbf{Z}_2}$ для ограниченных равномерно непрерывных на S функций f. Для ограниченных и непрерывных на M функций h имеет место неравенство $\left|\int_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G} h d\mu - \int_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G} h d\mu\right| \leqslant \sup_M |h||\mu|(\Phi_t^{\mathbf{Z}_1} G \Delta \Phi_t^{\mathbf{Z}_2} G)$, откуда в силу теоремы 1 следует равенство

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G} hd\mu - \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_2}G} hd\mu\right) = 0. \tag{23}$$

Если f равномерно непрерывна и ограничена на S, то ее продолжение $\hat{f}$, постоянное на траекториях строго трансверсального к S поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$, также равномерно непрерывно и ограничено в некоторой окрестности S_ε поверхности S. Если $\hat{f}_1$ и $\hat{f}_2$ — два таких продолжения (постоянные вдоль траекторий полей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ соответственно), то $\sup_{x\in S_\varepsilon}\left|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При этом $\left|\int_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G\Delta G}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)d\mu\right| \leqslant |\mu|(\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G\Delta G)\sup_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G\Delta G}\left|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\right|$. А поскольку $|\mu|(\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G\Delta G) = O(t)$, $t \to 0$, приходим к равенству $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)d\mu = 0$. Последнее равенство в сочетании с (23) доказывает предложение.

***Замечание* 5.** 1. Если u равномерно непрерывна и ограничена в окрестности S, то, как следует из предыдущих выкладок, $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\Phi_t^{\mathbf{Z}}G} ud\mu = \int_S u|_S d\sigma_{\mathbf{Z}}$ (как и ранее, предполагаем, что μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$, строго трансверсального к S).

2. Если μ неотрицательна и $\mathbf{Z}$ — внешнее поле по отношению к G, то, как следует из (22), мера $\sigma_{\mathbf{Z}}$ также неотрицательна.

Определение 9. *Дифференцируемую* 1*-форму* ω *класса* C^1 *на многообразии* M *с ограниченным атласом* Ω *назовем формой класса* C_b^1 (*или* „*ограниченной*”), *если существует такое* $C > 0$, *что для любой карты* (U, φ) *и для каждого* $x \in U$ *для представления формы* ω *в карте* φ *имеют место оценки* $\|\omega_\varphi(\varphi(x))\| \leqslant C$, $\|\omega'_\varphi(\varphi(x))\| \leqslant C$.

Ясно, что при ограниченном изоморфизме f многообразий M_1 и M_2 дифференциальные 1-формы ω на M_2 и $f^*\omega$ на M_1 ограничены или нет одновременно.

Пусть $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ строго трансверсально к S и ω — дифференциальная 1-форма на M класса C_b^1, для которой выполнены условия

$$\forall x \in S\colon \quad \operatorname{Ker}\omega(x) = T_xS; \qquad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in S\colon \quad \omega(\mathbf{Z})(x) > \delta. \tag{24}$$

***Замечание* 6.** Поясним существование формы ω, удовлетворяющей условиям (24). Пусть $g\colon N \times (-t_0; t_0) \to g(N \times (-t_0; t_0)) = U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий S. Пусть $\mathbf{W}$ — g-связанное с $\mathbf{Z}$ векторное поле на $N \times (-t_0; t_0)$. Оно строго трансверсально к $N \times \{0\}$ и представимо в виде (1), где $\alpha(x, 0) \geqslant \varepsilon > 0$ или $\alpha(x, 0) \leqslant -\varepsilon < 0$ для всех $x \in N$. Дифференциальную 1-форму γ на $N \times (-t_0; t_0)$ задаем условием: представление γ в карте $\varphi \times \mathrm{id}$ имеет вид $\gamma_{\varphi\times\mathrm{id}}(y, t) = \beta(t)dt$, где $\beta(t)$ — гладкая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\beta(t) = 1$, $|t| \leqslant \frac{1}{3}t_0$; $\beta(t) = 0$, $|t| \geqslant \frac{2}{3}t_0$. Теперь ω получаем продолжением на M нулем 1-формы $(g^{-1})^*\gamma$, определенной на U.

Если теперь $\mathbf{X} \in C_b^1(M)$, то функция $f = \dfrac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}$ является функцией класса C_b^1 в окрестности S_ε поверхности S (существует $C > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant C$ для каждого $x \in S_\varepsilon$ и для каждой карты (U,φ) атласа Ω для представления f_φ функции f в карте φ имеет место оценка $\big(x\in U\cap S_\epsilon\big)\Rightarrow\big(\|f'_\varphi(\varphi(x))\|\leqslant C\big)\big)$.

Следующее утверждение доказано в [8] (теорема 2).

Лемма 3. *Если f — функция класса C_b^1 в окрестности границы S области G и $\mathbf{Y}\in$ $\in C_b^1(M)$, то*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\mu(\Phi_t^{f\mathbf{Y}}G)-\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Y}}G}fd\mu\right)=0. \tag{25}$$

Следствие 2. *Пусть f — функция класса C_b^1 в окрестности границы S области G, поле $\mathbf{Y}\in C_b^1(M)$, μ — конечная борелевская мера на M. Тогда для любой функции $u\in L_1(\mu)$ имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\int\limits_{\Phi_t^{f\mathbf{Y}}G}ud\mu-\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Y}}G}fud\mu\right)=0. \tag{26}$$

Доказательство. Достаточно взять новую меру $\vartheta=u\cdot\mu$ и применить лемму 3.

Пусть мера μ дифференцируема относительно векторных полей $\mathbf{X},\mathbf{Z}\in C_b^1(M)$; $\mathbf{Z}$ — строго трансверсально к $S=\partial G$ и 1-форма ω связана с $\mathbf{Z}$ соотношениями (24). Тогда в некоторой окрестности S_ε поверхности S определено поле $\dfrac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}\mathbf{Z}\in C_b^1(S_\varepsilon)$ и $\mathbf{X}-\dfrac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}\mathbf{Z}$ касается S, так как $\omega\left(\mathbf{X}-\dfrac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}\mathbf{Z}\right)=0$. Теперь из (21) и (25) следует существование $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu\Big(\Phi_t^{\frac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}\mathbf{Z}}G\Big)$ и равенства

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}G)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu\Big(\Phi_t^{\frac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}\mathbf{Z}}G\Big)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}}G}\frac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}d\mu=\int\limits_S\frac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}d\sigma_{\mathbf{Z}}.$$

Из последних равенств следует предварительный вариант формулы Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_G\operatorname{div}_\mu\mathbf{X}d\mu=\int\limits_{\partial G}\frac{\omega(\mathbf{X})}{\omega(\mathbf{Z})}d\sigma_{\mathbf{Z}}. \tag{27}$$

5. Поверхностные меры второго типа. Формула Гаусса – Остроградского.

Лемма 4. *Пусть векторные поля $\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2\in C_b^1(M)$ строго трансверсальны к S, мера μ дифференцируема вдоль $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ и ω — дифференциальная 1-форма на M класса C_b^1, для которой $i^*\omega=0$, где i — вложение S в M (т. е. для каждого $x\in S$ $\operatorname{Ker}\omega(x)=T_xS$). Тогда для каждой функции $u\in C_b(S)$ имеет место равенство $\int_S\omega(\mathbf{Z}_1)ud\sigma_{\mathbf{Z}_2}=\int_S\omega(\mathbf{Z}_2)ud\sigma_{\mathbf{Z}_1}$.*

Доказательство. Результат достаточно проверить для равномерно непрерывных и ограниченных функций на S_ε.

Пусть α — дифференциальная 1-форма, связанная с полем $\mathbf{Z}_1$ соотношениями (24). Тогда функция $g=\dfrac{\alpha(\mathbf{Z}_2)}{\alpha(\mathbf{Z}_1)}$ является функцией класса C_b^1 в окрестности S_ε поверхности S; векторное поле $\mathbf{Z}_2 - g\mathbf{Z}_1$ корректно определено в S_ε и является векторным полем класса C_b^1 в S_ε ($\mathbf{Z}_2 - g\mathbf{Z}_1 \in C_b^1(S_\varepsilon)$). Используя замечание 5 и равенства (23), (26), получаем

$$\int\limits_S \omega(\mathbf{Z}_1)ud\sigma_{\mathbf{Z}_2} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_2}G} \omega(\mathbf{Z}_1)ud\mu = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{g\cdot\mathbf{Z}_1}G} \omega(\mathbf{Z}_1)ud\mu =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}_1}G} g\cdot\omega(\mathbf{Z}_1)ud\mu = \int\limits_S \omega(\mathbf{Z}_2)ud\sigma_{\mathbf{Z}_1}.$$

Последнее равенство следует из совпадения значений функций $g\cdot\omega(\mathbf{Z}_1)$ и $\omega(\mathbf{Z}_2)$ на S.

Определение 10. *Пусть ω — дифференциальная 1-форма класса C_b^1, определенная в окрестности S_ε границы S области G и $i^*\omega = 0$, где i — вложение S в M. Пусть для некоторого (а потому и для любого) ограниченного атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x \in S_\varepsilon$ и карты (U, φ) в точке x для представления ω_φ формы ω в этой карте имеет место оценка $\|\omega_\varphi(\varphi(x))\| > \delta$. Такую форму назовем „фундаментальной формой поверхности S".*

***Замечание* 7.** Эквивалентное определение фундаментальной формы: ω — 1-форма класса C_b^1 в S_ε (при некотором $\varepsilon > 0$), для которой $i^*\omega = 0$ и для некоторого (а потому и для любого) строго трансверсального к S поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ функция $\dfrac{1}{\omega(\mathbf{Z})}$ является функцией класса C_b^1 в S_ε.

Теперь на основании п. 4 (см. замечание 6) можно сделать вывод о том, что для вложенного в M подмногообразия S коразмерности 1 существует фундаментальная форма.

Пусть теперь область G согласована с мерой μ, ω — фундаментальная форма поверхности $S = \partial G$ и $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ — строго трансверсальное к S векторное поле. Положим $\mu_\omega := \dfrac{1}{\omega(\mathbf{Z})}\Big|_S \cdot \sigma_{\mathbf{Z}}$ — мера на S.

Проверим корректность задания меры μ_ω. Пусть $f \in C_b(S)$; $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in C_b^1(M)$ строго трансверсальны к S. Применив лемму 4, получим

$$\int\limits_S \frac{f}{\omega(\mathbf{Z}_1)}d\sigma_{\mathbf{Z}_1} = \int\limits_S \frac{f}{\omega(\mathbf{Z}_1)\omega(\mathbf{Z}_2)}\omega(\mathbf{Z}_2)d\sigma_{\mathbf{Z}_1} = \int\limits_S \frac{f}{\omega(\mathbf{Z}_1)\omega(\mathbf{Z}_2)}\omega(\mathbf{Z}_1)d\sigma_{\mathbf{Z}_2} = \int\limits_S \frac{f}{\omega(\mathbf{Z}_2)}d\sigma_{\mathbf{Z}_2}.$$

Определение 11. *Поверхностной мерой второго типа на S, индуцированной мерой μ, назовем меру $\mu_\omega = \dfrac{1}{\omega(\mathbf{Z})}\sigma_{\mathbf{Z}}$, где $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ — строго трансверсальное к S векторное поле, вдоль которого дифференцируема мера μ.*

Предложение 3. *Пусть ω_1 и ω_2 — две фундаментальные формы S, совпадающие на $S\colon \omega_1|_S = \omega_2|_S$. Тогда на S совпадают соответствующие меры μ_{ω_1} и μ_{ω_2}.*

Доказательство непосредственно следует из определения мер μ_ω.

Определение 12. *Фундаментальную форму поверхности $S = \partial G$ назовем „внешней по отношению к G", если для некоторого (а потому и для любого) внешнего по отношению к G строго трансверсального к S поля $\mathbf{Z}$ имеет место неравенство $\omega(\mathbf{Z}) > 0$ на S. Легко видеть, что в случае неотрицательной меры μ и внешней по отношению к G формы ω мера μ_ω также неотрицательна.*

Теперь из (27) получаем формулу Гаусса – Остроградского.

Теорема 2. *Пусть M — банахово C^2-многообразие с равномерной структурой; G — область в M, граница которой представляет собой вложенное в M подмногообразие коразмерности 1; μ — борелевская мера на M, конечная (по крайней мере, в окрестности G_ε области G) и согласованная с областью G. Тогда для любого векторного поля $\mathbf{X} \in C_b^1(M)$, вдоль которого дифференцируема мера μ, и для любой фундаментальной формы ω поверхности S имеет место равенство*

$$\int\limits_G \operatorname{div} \mathbf{X} d\mu = \int\limits_S \omega(\mathbf{X}) d\mu_\omega. \tag{28}$$

***Замечание* 8.** В настоящее время существуют различные альтернативные подходы к построению поверхностных мер в бесконечномерных пространствах (см. [4, 5, 13 – 15]).

6. Варианты. Дополнения. Следствия. 1. Пусть $M = E$ — банахово пространство. В качестве равномерного атласа возьмем атлас из одной тождественной карты.

Замкнутое подпространство E_1 в E коразмерности 1 разбивает $E \setminus E_1$ на два полупространства E_+ и E_-. Существует единственный нормированный линейный функционал β на E, принимающий положительные значения в E_+ (при этом $E_1 = \operatorname{Ker}\beta$). Поэтому для каждой точки $x \in S = \partial G$ определен единственный нормированный функционал $\alpha_x \in E^*$, для которого $\operatorname{Ker}\alpha_x = T_x S$ и $\alpha_x(\mathbf{Z}(x)) > 0$, для любого внешнего по отношению к G трансверсального к S поля $\mathbf{Z}$.

Существование дифференциальной 1-формы ω на S_ε класса C_b^1, совпадающей на S с полем функционала α, постулируем и рассматриваем как дополнительное условие гладкости поверхности S. При этом форма ω является фундаментальной формой поверхности S, внешней по отношению к G.

Тем самым условие согласования μ с G и существование гладкого продолжения поля функционала α в окрестности границы приводят к канонической процедуре построения индуцированной поверхностной меры μ_ω на S по заданной мере μ.

2. В случае, когда многообразие M (а потому и E) сепарабельно, при построении поверхностных мер $\sigma_{\mathbf{Z}}$ можно отказаться от условия строгой трансверсальности поля $\mathbf{Z}$ по отношению к S, заменив его условием простой трансверсальности и, дополнительно, условием $\inf_{p\in S} |||\mathbf{Z}(p)|||_p > 0$.

Действительно, пусть $g\colon N \times (-t_0; t_0) \to U \subset M$ — ограниченный изоморфизм, определяющий вложенную поверхность $S = g(N \times \{0\})$. Функции $f \in C_b(S)$ соответствует функция $v = (g|_{N\times\{0\}})^* f \in C_b(N)$. Тогда g-связанное с $\mathbf{Z}$ векторное поле $\mathbf{W}$ трансверсально к $N \times \{0\}$. Равномерный атлас Ω на M индуцирует равномерные атласы на S и N. Тем самым N наделяется структурой полного метрического пространства.

Пусть Ψ_t — поток поля $\mathbf{W}$. Существует $\delta > 0$, при котором отображение $h\colon N \times [-\delta; \delta] \ni$ $\ni (x, t) \mapsto \Psi_t x \in V \subset N \times (-t_0; t_0)$ является непрерывной инъекцией. Тогда в силу теоремы 6.8.6 из [12, с. 49] функция q на $N \times (-t_0; t_0)$, равная нулю вне V и заданная условием $q(\Psi_t x) = v(x)$, является ограниченной борелевской функцией. Теперь функция $\hat v = (g^{-1})^* q$ является ограниченной измеримой функцией на U, для которой $\hat v(\Phi_t^{\mathbf{Z}} x) = v(x)$ для $x \in S$, $|t| \leqslant \delta$.

Осталось заметить, что лемма 2 остается справедливой и в случае, когда u — измеримая ограниченная функция на M, постоянная на траекториях поля $\mathbf{Z}$ вблизи S.

3. Пусть M — банахово многообразие класса C^2 с ограниченной структурой. Доказательство следующего утверждения полностью аналогично доказательству леммы 3 (см. [8], теорема 2).

Предложение 4. *Пусть векторное поле* $\mathbf{X}$ *принадлежит* $C_b^1(M)$, f — *функция класса* C_b^1 *на* M. *Тогда для любого борелевского множества* $A \subset M$ *имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\left(\mu(\Phi_t^{f\mathbf{X}}A) - \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{X}}A} f d\mu\right) = 0. \tag{29}$$

***Следствие* 3.** *Если* μ *дифференцируема вдоль поля* $\mathbf{X} \in C_b^1(M)$, f — *функция на* M *класса* C_b^1, *то* μ *дифференцируема вдоль поля* $f\mathbf{X}$ *и при этом* $\operatorname{div}_\mu(f\mathbf{X}) = f \operatorname{div}_\mu \mathbf{X} + \mathbf{X}f$.

Доказательство. Пусть $t \neq 0$, $A \in \mathfrak{B}(M)$, $\mu_t(B) = \mu(\Phi_t^{\mathbf{X}}B)$ для каждого $B \in \mathfrak{B}(M)$. Тогда

$$\frac{1}{t}\left(\int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{X}}A} f d\mu - \int\limits_A f d\mu\right) = \frac{1}{t}\left(\int\limits_A f(\Phi_t^{\mathbf{X}}x) d\mu_t - \int\limits_A f d\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_A (f(\Phi_t^{\mathbf{X}}x) - f(x)) d\mu_t + \frac{1}{t}\left(\int\limits_A f d\mu_t - \int\limits_A f d\mu\right). \tag{30}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (30) при $t \to 0$ стремится к $\int_A f \cdot \rho_\mu d\mu$. Для всех $x \in M$ при $t \to 0$ имеет место сходимость $h_t(x) = \dfrac{1}{t}(f(\Phi_t^{\mathbf{X}}x) - f(x)) \to (\mathbf{X}f)(x) = h_0(x)$, причем функции h_t равномерно ограничены на M. Поскольку для каждого борелевского $B \subset \subset M$ $\mu_t(B) \to \mu(B)$ при $t \to 0$, в силу теоремы 1.2.19 [16] $\lim_{t\to 0} \int_A h_t d\mu_t = \int_A h_0 d\mu$, откуда следуют существование $\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\Phi_t^{\mathbf{X}}A} f d\mu$ и равенство

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{X}}A} f d\mu = \int\limits_A f \operatorname{div}_\mu \mathbf{X} d\mu + \int\limits_A \mathbf{X} f d\mu. \tag{31}$$

Применение равенства (29) завершает доказательство следствия.

***Следствие* 4.** *Пусть* G — *область в* M, $S = \partial G$ — *вложенное в* M *подмногообразие коразмерности* 1, *векторное поле* $\mathbf{Z} \in C_b^1(M)$ *строго трансверсально к* S *и* μ *дифференцируема вдоль* $\mathbf{Z}$, u — *функция класса* C_b^1 *на* M. *Тогда имеет место равенство* („*формула интегрирования по частям*”)

$$\int\limits_S u d\sigma_{\mathbf{Z}} = \int\limits_G \mathbf{Z} u d\mu + \int\limits_G u \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z} d\mu. \tag{32}$$

Доказательство. Поскольку функция u равномерно непрерывна на M, в силу замечания 5 $\int_S u d\sigma_{\mathbf{Z}} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G} u d\mu$, и осталось применить формулу (31).

4. Пусть модельное пространство E многообразия M класса C^2 гильбертово и на M задан риманов тензор R. Потому для каждой карты (U, φ) в $\varphi(U) \subset E$ определено непрерывное по норме поле самосопряженного линейного гомеоморфизма пространства E. При этом в каждом касательном пространстве T_pM индуцируется структура гильбертова пространства, а на M — метрика.

Выделение класса ограниченных атласов в данном случае является излишним. Принадлежность векторного поля $\mathbf{Z}$ классу $C_b^1(M)$, равно как и функций классу $C_b^p(M)$, определяется корректно. Условие вложенности в M подмногообразия $S = \partial G$ можно заменить следующим: существует векторное поле $\mathbf{n} \in C_b^1(M)$, которое является продолжением поля внешней единичной нормали к S, т. е. для каждой точки $x \in S$ выполнены условия $\mathbf{n}(x) \perp T_xS$, $\|\mathbf{n}(x)\| = 1$ и при этом поле n является внешним по отношению к G. Если дополнительно потребовать полноту порожденной тензором R метрики, то векторные поля класса C_b^1 оказываются полными.

Согласование области G и меры μ определим условием: μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$. Поле $\mathbf{n}$ строго трансверсально к S и для таких полей имеют место формулы типа (13), (20), (21) (правда, здесь требуется несколько иная техника доказательства). С полем $\mathbf{n}$ естественным образом связана 1-форма ω, определенная равенством $\omega(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}, \mathbf{n})$, ω является фундаментальной формой поверхности S (в смысле определения 10). Соответствующую меру μ_ω обозначим через μ_S (от выбора $\mathbf{n}$ она не зависит). Теперь, если мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{X} \in C_b^1(M)$, формулу (28) можно переписать так:

$$\int\limits_G \operatorname{div} \mathbf{X} d\mu = \int\limits_S (\mathbf{X}, \mathbf{n}) d\mu_S. \tag{33}$$

Если же M — конечномерное риманово C^2-многообразие, а область G компактно вложена в M, то для получения результата достаточно брать поля и функции класса $C^1(M)$; условие строгой трансверсальности поля $\mathbf{Z}$ к S следует из условия простой трансверсальности.

5. В условиях предыдущего пункта (риманов случай) для функции u класса C_b^2 на M определено векторное поле $\mathbf{X} = \mathbf{grad}\, u$. Пусть μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{X}$. Положим $\Delta u = \Delta_\mu u = \operatorname{div}(\mathbf{grad}\, u)$. Тогда из (33) получим равенство

$$\int\limits_G \Delta u d\mu = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\mu_S.$$

Формула (32) (при $\mathbf{Z} = \mathbf{n}$) превращается в следующую:

$$\int\limits_S u d\mu_S = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{n})\, d\mu + \int\limits_G u \cdot \operatorname{div}_\mu \mathbf{n}\, d\mu.$$

Пусть u, v — функции на M класса C_b^2. В этом случае определены векторные поля $\mathbf{grad}\, u$, $\mathbf{grad}\, v \in C_b^1(M)$. Пусть мера μ дифференцируема вдоль полей $\mathbf{grad}\, u$, $\mathbf{grad}\, v$. Тогда μ дифференцируема относительно векторных полей $v\, \mathbf{grad}\, u$, $u\, \mathbf{grad}\, v$ и при этом $\operatorname{div}(v\, \mathbf{grad}\, u) = v \cdot \Delta u + (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)$, $\operatorname{div}(u\, \mathbf{grad}\, v) = u \cdot \Delta v + (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v)$ (здесь $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$).

Применяя (33) к векторному полю $v\,\mathbf{grad}\,u$, получаем первую формулу Грина:

$$\int\limits_G v\Delta u d\mu = -\int\limits_G (\mathbf{grad}\,u, \mathbf{grad}\,v) d\mu + \int\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n} d\mu_S. \qquad (34)$$

Применяя (33) к векторному полю $u\,\mathbf{grad}\,v$ и вычитая полученное равенство из (34), получаем вторую формулу Грина:

$$\int\limits_G (v\Delta u - u\Delta v) d\mu = \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) d\mu_S.$$

Предложение 5 (лемма Хопфа). *Пусть M — связное гильбертово многообразие с римановым тензором R, f — функция на M класса C_b^2, борелевская мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{grad}\,f$, для каждого открытого множества $U \subset M$ выполнено неравенство $\mu(U) > 0$. Если $\Delta f \geqslant 0$ всюду на M, то f — постоянная функция.*

Доказательство. Поскольку $\int_M \Delta f d\mu = \int_M \operatorname{div}(\mathbf{grad}\,f) d\mu = 0$, из неравенства $\Delta f \geqslant$ $\geqslant 0$ следует $\Delta f = 0 \pmod{\mu}$ (а в силу условий предложения равенство $\Delta f = 0$ выполнено тождественно), $\Delta\left(\frac{f^2}{2}\right) = \operatorname{div}(f\,\mathbf{grad}\,f) = f \cdot \Delta f + \|\,\mathbf{grad}\,f\|^2$. Поэтому $0 = \int_M \Delta\left(\frac{f^2}{2}\right) d\mu =$ $= \int_M f \cdot \Delta f d\mu + \int_M \|\,\mathbf{grad}\,f\|^2 d\mu = \int_M \|\,\mathbf{grad}\,f\|^2 d\mu$, откуда из непрерывности $\|\,\mathbf{grad}\,f\|$ следует тождество $\mathbf{grad}\,f \equiv 0$, а в силу связности M $f \equiv \mathrm{const}$.

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
2. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. – М.: Мир, 1979. – 176 с.
3. *Ефимова Е. И., Угланов А. В.* Формулы векторного анализа на банаховом пространстве // Докл. АН СССР. – 1983. – **271**, № 6. – С. 1302 – 1306.
4. *Угланов А. В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 11. – С. 139 – 157.
5. *Пугачев О. В.* Формула Гаусса – Остроградского в бесконечномерном пространстве // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 5. – С. 115 – 128.
6. *Смородина Н. В.* Формула Гаусса – Остроградского для пространства конфигураций // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – **35**, № 4. – С. 727 – 739.
7. *Finkelshtein D. L., Kondratiev Yu. G., Konstantinov A. Yu., Rockner M.* Gauss formula and symmetric extensions of Laplacian on configuration spaces // Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2001. – **4**, № 4. – P. 489 – 509.
8. *Богданський Ю. В.* Бездивергентний варіант формули Гаусса – Остроградського на нескінченновимірних многовидах // Наук. вісті НТУУ „КПІ”. – 2008. – № 4. – С. 132 – 138.
9. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 204 с.
10. *Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. – Киев: Вища шк., 1989. – 296 с.
11. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. – М.: Мир, 1971. – 392 с.
12. *Богачев В. И.* Основы теории меры. – Москва; Ижевск: РХД, 2006. – Т. 2. – 680 с.
13. *Uglanov A. V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
14. *Bogachev V. I.* Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces // Acta Univ. Carolinae. Math. et Phys. – 1990. – **31**, № 2. – P. 9 – 23.
15. *Пугачев О. В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 2008. – **53**, № 1. – С. 178 – 188.
16. *Богачев В. И.* Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. – М.; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.

Получено 18.05.12