УДК 517.18

$\boxed{\textbf{В. В. Булдыгин}}$, **В. В. Павленков** (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

ТЕОРЕМА КАРАМАТЫ ДЛЯ РЕГУЛЯРНО LOG-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We generalize the Karamata theorem on the asymptotic behavior of integrals with variable limits to the class of regularly log-periodic functions.

Отримано узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів зі змінними границями для класу регулярно log-періодичних функцій.

1. Введение. В статьях [1, 2] Й. Карамата ввел понятие *правильно меняющейся* функции и доказал ряд фундаментальных теорем относительно этих функций. В частности, была установлена теорема об асимптотическом поведении интегралов от правильно меняющихся функций (см. также [3 – 5]). Эта теорема широко применяется в анализе и теории вероятностей [3, 4]. Ниже рассматривается обобщение теоремы Караматы на класс *регулярно* log-*периодических функций*.

Пусть $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел и $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел. Для $A > 0$ рассмотрим семейство $\mathbb{FM}_+(A)$ положительных и измеримых (по Лебегу) функций $f = (f(x),\, x \geq A)$. Измеримую действительную функцию $\varphi(x)$, $x \geq A$, называют *локально интегрируемой*, если она интегрируема (по Лебегу) на любом отрезке $[a, b] \subset [A, \infty)$.

Выражения $\varphi(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \psi(x)$, $\varphi(x) \sim \psi(x), x \to \infty$, $\varphi \sim \psi$ означают, что

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)/\psi(x) = 1.$$

В этом случае говорят, что функции φ и ψ *асимптотически эквивалентны*.

Напомним, что функцию $f \in \mathbb{FM}_+(A)$ называют *правильно меняющейся* (RV) (*на бесконечности*), если предел

$$\kappa_f(\lambda) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

существует и является положительным и конечным для всех $\lambda > 0$ (см. [1, 2] и [3, с. 1, 17]). Правильно меняющуюся функцию f называют *медленно меняющейся* (SV), если $\kappa_f(\lambda) = 1$ для всех $\lambda > 0$. Если f — RV-функция, то найдется $\rho \in \mathbf{R}$ такое, что $\kappa_f(\lambda) = \lambda^\rho$, $\lambda > 0$. Число ρ называют *индексом* функции f. Индекс $\rho = 0$ имеют SV-функции и только они. Любая RV-функция f с индексом ρ имеет вид

$$f(x) = x^\rho \ell(x), \quad x \geq A,$$

где ℓ — SV-функция.

Теорема Караматы содержит две части (прямую и обратную) для непрерывных RV-функций [1, 2] и для локально интегрируемых RV-функций [3, 4].

Теорема Караматы (прямая часть). *Пусть f — локально интегрируемая RV-функция с индексом $\rho \neq -1$. Тогда*:

1) *если $\rho > -1$, то*

$$\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt} \to \rho + 1, \quad x \to \infty; \tag{1}$$

2) *если $\rho < -1$, то*

$$\frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)dt} \to |\rho + 1|, \quad x \to \infty; \tag{2}$$

3) *если $\rho = -1$ и $I_f(\infty) = \infty$, где*

$$I_f(\infty) = \int\limits_A^\infty f(t)dt, \tag{3}$$

то

$$\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt} \to 0, \quad x \to \infty; \tag{4}$$

4) *если $\rho = -1$ и $I_f(\infty) < \infty$, то*

$$\frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)dt} \to 0, \quad x \to \infty. \tag{5}$$

Теорема Караматы (обратная часть). *Пусть f — локально интегрируемая функция из класса $\mathbb{FM}_+(A)$. Тогда*:

1) *если найдется число $\gamma \in (0, \infty)$ такое, что*

$$\frac{xf(x)}{\int_A^x f(t)dt} \to \gamma, \quad x \to \infty, \tag{6}$$

то f — RV-функция с индексом $\rho = \gamma - 1$;

2) *если $I_f(\infty) < \infty$ и найдется число $\gamma \in (0, \infty)$ такое, что*

$$\frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)dt} \to \gamma, \quad x \to \infty, \tag{7}$$

то f — RV-функция с индексом $\rho = -\gamma - 1$.

Регулярно log-периодические функции. Целью статьи является обобщение теоремы Караматы на *регулярно* log-*периодические* ($\mathfrak{RLP}$) функции, т. е. функции $f \in \mathbb{FM}_+(A)$ вида

$$f(x) = x^\rho \ell(x) H(\ln x), \quad x \geq A, \tag{8}$$

где $\rho \in \mathbf{R}$, $\ell = (\ell(x),\, x \geq A)$ — SV-функция и $H = (H(u),\, u \in \mathbf{R})$ — положительная непрерывная периодическая функция.

Регулярно log-периодические функции являются функциями с невырожденными группами регулярных точек, которые рассматривались в [6]. Обобщение теоремы Караматы на различные классы функций приведено в [7], обобщение теоремы Караматы на класс $\mathfrak{RLP}$ при $\rho > -1$ — в [8]. Ниже рассматривается общий случай $\rho \in \mathbf{R}$ и тем самым дополняются результаты работ [7, 8].

Статья построена следующим образом. Пункт 2 содержит необходимые определения и предварительные сведения. В пункте 3 формулируются прямая и обратная части обобщения теоремы Караматы на класс регулярно log-периодических функций. Доказательства, в ходе которых используются и развиваются соответствующие методы работ [1, 2] и [3 – 5], приведены в пунктах 4 – 6.

2. Определения и предварительные сведения. Функции f из класса $\mathfrak{RLP}$ являются положительными и измеримыми, поскольку таковыми являются все сомножители в (8). Функцию $r(x) = x^\rho \ell(x)$ будем называть *регулярной* (RV) *компонентой* функции f, а ее индекс ρ — *индексом* функции f. Функцию ℓ будем называть *медленной* (SV) *компонентой* функции f. Периодическую функцию H будем называть *периодической компонентой*, а функцию $H \circ \ln = (H(\ln x),\, x > 0)$ — log-периодической компонентой функции f. Функция H является постоянной, т. е. существует такое $c > 0$, что $H(x) \equiv c$ тогда и только тогда, когда f является RV-функцией. В этом случае функция $H \circ \ln$ также является постоянной и ее можно присоединить в качестве сомножителя к ℓ.

В дальнейшем будем предполагать, если не оговорено противное, что

$$H(0) = 1. \tag{9}$$

Условие (9) не суживает класс $\mathfrak{RLP}$, так как f из $\mathfrak{RLP}$ можно представить в виде $f(x) = x^\rho \ell_0(x) H_0(\ln x)$, где $H_0(u) = H(u)/H(0)$ и $\ell_0(x) = H(0)\ell(x)$. Ясно, что $H_0(0) = 1$ и ℓ_0 — SV-функция. Представление (8) будем называть *каноническим*, если периодическая компонента в нем является *канонической*, т. е. выполнено условие (9).

Если $U = (U(x),\, x \in \mathbf{R})$ — периодическая функция, то через $S_p(U)$ обозначим множество периодов функции U, а через $S_p^+(U)$ — множество положительных периодов функции U. Величину $T(u) = \inf S_p^+(U)$ будем называть *осцилляционной характеристикой* функции U. Если функция U непрерывная и периодическая, то либо $T(U) = 0$ и в этом случае функция U является *постоянной*, либо $T(U) > 0$ и в этом случае $T(U)$ является наименьшим положительным периодом функции U и $S_p(U) = \{nT(U), n \in \mathbf{Z}\}$.

Осцилляционную характеристику $T(H)$ периодической компоненты функции f будем также называть *осцилляционной характеристикой функции* f. Класс функций $f \in \mathfrak{RLP}$ с положительной осцилляционной характеристикой обозначим $\mathfrak{RLP}_+$ и заметим, что функции из класса $\mathfrak{RLP}_+$ не являются RV-функциями, а являются функциями с невырожденной группой регулярных точек (см. [6]). Именно функциям из класса $\mathfrak{RLP}_+$ полностью соответствует название „регулярно log-периодические функции". Класс функций $\mathfrak{RLP}_0 = \mathfrak{RLP} \backslash \mathfrak{RLP}_+$ состоит из функций (8), для которых функции H являются постоянными. Таким образом, класс $\mathfrak{RLP}_0$ совпадает с классом RV-функций.

Если функция f принадлежит классу $\mathfrak{RLP}$ и имеет индекс $\rho > -1$, то

$$\int\limits_A^\infty f(x)dx = \infty; \tag{10}$$

если же $\rho < -1$, то

$$\int\limits_A^\infty f(x)dx < \infty. \tag{11}$$

Действительно, если $\rho > -1$, то

$$\int\limits_A^\infty f(x)dx = \int\limits_A^\infty x^\rho \ell(x) H(\ln x)dx \geq \kappa \int\limits_A^\infty x^\rho \ell(x)dx = \infty,$$

где $\kappa = \inf_{x\in\mathbf{R}} H(x) > 0$. Аналогично доказывается соотношение (11).

При анализе свойств регулярно log-периодических функций будем использовать следующую лемму, доказательство которой непосредственно вытекает из теоремы Кронекера (см., например, [9, с. 376] или [10, с. 58]).

Лемма 1. *Пусть P_1 и P_2 — две положительные непрерывные периодические функции. Если $P_1 \sim P_2$, то $P_1 = P_2$.*

3. Обобщение теоремы Караматы об асимптотическом поведении интегралов на класс регулярно log-периодических функций. Ниже приводятся формулировки двух частей (прямой и обратной) теоремы, обобщающей теорему Караматы на функции из класса $\mathfrak{RLP}$. Доказательствам посвящены следующие пункты статьи. Начнем с формулировки прямой части теоремы при $\rho \neq -1$.

Теорема 1 (прямая часть). *Пусть локально интегрируемая функция f из класса $\mathfrak{RLP}$ имеет индекс $\rho \neq -1$, периодическую компоненту H и осцилляционную характеристику $T(H) = T$. Тогда найдется такая положительная непрерывная периодическая функция $D = (D(x),\, x \in \mathbf{R})$, зависящая от ρ и H, что*

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x)f(x), \tag{12}$$

если $\rho > -1$, и

$$\int\limits_x^\infty f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x)f(x), \tag{13}$$

если $\rho < -1$. При этом справедливы следующие утверждения:

1) *если f является RV-функцией (т. е. $T = 0$, $H(x) \equiv 1$), то*

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) \equiv \frac{1}{|\rho + 1|}; \tag{14}$$

2) *если $f \in \mathfrak{RLP}_+$ (т. е. $T > 0$) и $\rho > -1$, то*

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y} H(y)dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \ge 0, \tag{15}$$

где $\{x/T\}$ *— дробная часть числа* x/T *и*

$$C = C(H,\, \rho) = \frac{\displaystyle\int_0^{T} e^{(\rho+1)y} H(y)dy}{e^{T(\rho+1)} - 1};$$

3) *если* $f \in \mathfrak{RLP}_+$ (*т. е.* $T > 0$) *и* $\rho < -1$, *то*

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) = \frac{\displaystyle\int_{T\{x/T\}}^{T} e^{(\rho+1)y} H(y)dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \ge 0, \tag{16}$$

где

$$C = C(H,\, \rho) = \frac{\displaystyle\int_0^{T} e^{(\rho+1)y} H(y)dy}{e^{T|\rho+1|} - 1};$$

4) *имеют место равенства*

$$T(DH) = T(D) = T(H),$$

где $T(DH)$ *— осцилляционная характеристика положительной непрерывной периодической функции* $DH = (D(x)H(x),\, x \in \mathbf{R})$.

Прямая часть, случай $\rho = -1$. Расширение теоремы 1 на функции из класса $\mathfrak{RLP}$, имеющие индекс $\rho = -1$, вытекает из следующего утверждения, в котором рассматривается класс функций, более широкий чем $\mathfrak{RLP}$.

Пусть $\mathfrak{RLB}$ — класс *регулярно* log-*ограниченных* функций вида

$$f(x) = x^{\rho}\ell(x)V(\ln x), \quad x \ge A, \tag{17}$$

где $\rho \in \mathbf{R}$, $\ell = (\ell(x),\, x \ge A)$ — SV-функция и $V = (V(x),\, x \in \mathbf{R})$ — положительная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$k = \inf_{x \in \mathbf{R}} V(x) > 0 \quad \text{и} \quad K = \sup_{x \in \mathbf{R}} V(x) < \infty. \tag{18}$$

Ясно, что $\mathfrak{RLP} \subset \mathfrak{RLB}$ и $\mathfrak{RLB} \backslash \mathfrak{RLP} \ne \varnothing$.

Утверждение 1. *Пусть локально интегрируемая функция* f *из класса* $\mathfrak{RLB}$ *имеет индекс* $\rho = -1$. *Тогда*:

1) *если* $I_f(\infty) = \infty$ (см. (3)), *то*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{xf(x)}{\displaystyle\int_A^x f(t)dt} = 0; \tag{19}$$

2) *если* $I_f(\infty) < \infty$, *то*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Прежде всего переформулируем соответствующую часть теоремы Караматы для RV-функций в удобном для нас виде. Напомним, что любая RV-функция с индексом $\rho = -1$ имеет вид $\ell(t)/t$, $t \geq A$, где ℓ — SV-функция. Поэтому если ℓ — локально интегрируемая SV-функция, то по теореме Караматы (см. (4), (5))

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ell(x)}{\displaystyle\int_A^x (\ell(t)/t)dt} = 0 \tag{21}$$

при $\displaystyle\int_A^\infty (\ell(t)/t)dt = \infty$ и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ell(x)}{\displaystyle\int_x^\infty (\ell(t)/t)dt} = 0 \tag{22}$$

при $\displaystyle\int_A^\infty (\ell(t)/t)dt < \infty$.

Поскольку f принадлежит классу $\mathfrak{RLB}$ и имеет индекс $\rho = -1$, учитывая (17), видим, что $f(x) = \ell(x)V(\ln x)/x$, $x \geq A$, где V — положительная измеримая функция, удовлетворяющяя условию (18). Следовательно,

$$k\int\limits_A^\infty (\ell(t)/t)dt \leq \int\limits_A^\infty f(t)dt \leq K\int\limits_A^\infty (\ell(t)/t)dt$$

и для любого $x > A$

$$0 \leq \frac{xf(x)}{\displaystyle\int_A^x f(t)dt} \leq \frac{K\ell(x)}{k\displaystyle\int_A^x (\ell(t)/t)dt},$$

а также

$$\frac{xf(x)}{\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt} \leq \frac{K\ell(x)}{k\displaystyle\int_x^\infty (\ell(t)/t)dt}.$$

Теперь ясно, что утверждения 1 и 2 вытекают из соотношений (21) и (22).

Перейдем к обобщению обратной части теоремы Караматы (см. (6), (7)) на функции из класса $\mathfrak{RLP}$. Будем рассматривать только случай $\rho \neq -1$, так как утверждение 1 показывает, что при $\rho = -1$ соотношения (19) и (20) имеют место для класса функций $\mathfrak{RLB}$, более широкого чем $\mathfrak{RLP}$.

Теорема 2 (обратная часть). *Пусть для локально интегрируемой функции* $f \in \mathbb{FM}_+(A)$ *найдется положительная непрерывная периодическая функция* $(B(x), x \in \mathbf{R})$ *такая, что либо*

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xB(\ln x)f(x), \tag{23}$$

либо

$$\int\limits_A^\infty f(t)dt < \infty \qquad и \qquad \int\limits_x^\infty f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xB(\ln x)f(x). \tag{24}$$

Тогда f является функцией из класса $\mathfrak{RLP}$ *с периодической компонентой* H *и индексом* $\rho > -1$, *если имеет место* (23), *и* $\rho < -1$, *если имеет место* (24). *При этом справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $T(B) = 0$, *т. е.* $B(x) \equiv \beta > 0$, *то*

$$|\rho + 1| = \frac{1}{\beta} \tag{25}$$

и $H(x) \equiv 1$, *т. е.* f *является RV-функцией с индексом* ρ;

2) *если* $T(B) > 0$, *то* f *принадлежит классу* $\mathfrak{RLP}_+$,

$$|\rho + 1| = \left(\frac{1}{B}\right)_{av} \tag{26}$$

и

$$H(x) = \frac{B(0)}{B(x)} \exp\left(\pm \int\limits_0^x \left(\frac{1}{B(t)} - \left(\frac{1}{B}\right)_{av}\right) dt\right), \quad x \geq 0, \tag{27}$$

где

$$\left(\frac{1}{B}\right)_{av} = \frac{1}{T(B)} \int\limits_0^{T(B)} \frac{du}{B(u)} \tag{28}$$

и в (27) *стоит знак* $+$, *если* $\rho + 1 > 0$, *и знак* $-$, *если* $\rho + 1 < 0$;

3) *имеют место равенства*

$$T(BH) = T(H) = T(B),$$

где $T(BH)$ — *осцилляционная характеристика положительной непрерывной периодической функции* $BH = (B(x)H(x), x \in \mathbf{R})$.

***Замечание* 1.** Из условия (23) вытекает неравенство $\liminf_{x\to\infty} xf(x) > 0$, в силу которого $\int_A^\infty f(t)dt = \infty$. Поэтому последнее равенство опущено в условии (23).

***Замечание* 2.** Соотношения (12), (13) и (23), (24) однозначно определяют функции D и B соответственно. Например, если (12) выполняется для двух положительных непрерывных периодических функций D_1 и D_2, то $D_1 \sim D_2$, откуда, согласно лемме 1, следует, что $D_1 = D_2$. Таким образом, в теоремах 1 и 2 $D = B$ и вместе с этим все соотношения, установленные для функции B, выполняются для функции D, и наоборот.

***Замечание* 3.** Если в (15) и (16) устремить число T к 0, а функцию H поточечно устремить к функции, тождественно равной 1, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$D_{H,\rho}(x) \to \frac{1}{\rho+1},$$

т. е. (14) „согласовано” с (15) и (16). Аналогично „согласованы” (25) и (26).

***Замечание* 4.** Если f — локально интегрируемая регулярно log-периодическая функция $\big(f(x) = x^\rho \ell(x) H(\ln x)\big)$ и $\rho > -1$, то согласно теореме 1

$$\int\limits_A^x f(t)dt = xD(\ln x) f(x)\ell_1(x) = x^{\rho+1}\ell(x)\ell_1(x)D(\ln x)H(\ln x) = x^{\rho+1}\ell_2(x)DH(\ln x),$$

где ℓ_1 и $\ell_2 = \ell\ell_1$ — SV-функции, DH — положительная непрерывная периодическая функция и $T(DH) = T(H)$. Ясно, что функция $\int_A^x f(t)dt$, $x \geq A$, является непрерывной. Следовательно, отображение $f(\cdot) \mapsto \int_A^{(\cdot)} f(t)dt$ переводит локально интегрируемую регулярно log-периодическую функцию с индексом $\rho > -1$ в непрерывную регулярно log-периодическую функцию, при этом осцилляционная характеристика не изменяется. Теорема 1 показывает также, что аналогичные свойства присущи регулярно log-периодическим функциям с индексом $\rho < -1$, если рассматривать отображение $f(\cdot) \mapsto \int_{(\cdot)}^\infty f(t)dt$.

4. Лемма об асимптотическом поведении интегралов от регулярно log-периодических функций. Изучение асимптотического поведения интегралов с переменными пределами интегрирования начнем с утверждения (см. лемму 2), которое показывает, что при интегрировании регулярно log-периодической функции с индексом $\rho \neq -1$ ее медленную компоненту можно выносить „в асимптотическом смысле” из-под знака интеграла. Схема доказательства этого утверждения подобна схеме доказательства прямой части теоремы Караматы для RV-функций (см. [3, с. 26]). Для сокращения записи положим $H_l(x) = H(\ln x)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathfrak{RLP}$ — локально интегрируемая функция с индексом $\rho \neq -1$, SV-компонентой ℓ и периодической компонентой H. Тогда если $\rho > -1$, то*

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int\limits_A^x t^\rho H_l(t)dt, \tag{29}$$

а если $\rho < -1$, то

$$\int\limits_x^\infty f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int\limits_x^\infty t^\rho H_l(t)dt. \tag{30}$$

Доказательство. Предположим, что $\rho > -1$, и докажем (29).

Положим

$$J(x) = \int\limits_{A/x}^1 y^\rho \left(\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right) H_l(xy)dy, \quad x \geq A,$$

и для $\varepsilon \in (0,1)$

$$J_\varepsilon(x) = \int\limits_\varepsilon^1 y^\rho \left(\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right) H_l(xy)dy, \quad x \geq (A/\varepsilon).$$

Поскольку

$$K = \frac{\sup_{x\in\mathbf{R}} H(x)}{\rho+1} < \infty$$

и $\rho > -1$, из теоремы о равномерной сходимости для SV-функций (см., например, [3, с. 22]) следует, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{x\to\infty} J_\varepsilon(x) = 0. \tag{31}$$

В результате простых вычислений получаем, что для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $x \geq (A/\varepsilon)$

$$|J(x) - J_\varepsilon(x)| \leq \int\limits_{A/x}^{\varepsilon} y^\rho \left|\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1\right| H_l(xy)dy \leq K\left(\varepsilon^{\rho+1} + (\rho+1)\int\limits_{A/x}^{\varepsilon} y^\rho \frac{\ell(xy)}{\ell(x)}dy\right).$$

Если выбрать $\delta \in (0, \rho+1)$, то по теореме Поттера (см., например, [3, с. 25]) найдется такое $x(\delta) > 0$, что при $x \geq \max\{x(\delta), (A/\varepsilon)\}$

$$\int\limits_{A/x}^{\varepsilon} y^\rho \frac{\ell(xy)}{\ell(x)}dy \leq 2\int\limits_{A/x}^{\varepsilon} y^{\rho-\delta}dy \leq \frac{2\varepsilon^{\rho+1-\delta}}{\rho+1-\delta}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\limsup_{x\to\infty} |J(x) - J_\varepsilon(x)| \leq K\left(\varepsilon^{\rho+1} + \frac{2(\rho+1)\varepsilon^{\rho+1-\delta}}{\rho+1-\delta}\right).$$

Поскольку $\rho + 1 - \delta > 0$, отсюда следует, что

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{x\to\infty} |J(x) - J_\varepsilon(x)| = 0. \tag{32}$$

Соотношения (31) и (32) показывают, что

$$\lim_{x\to\infty} J(x) = 0.$$

Кроме того,

$$\liminf_{x\to\infty} \int\limits_{A/x}^{1} y^\rho H_l(xy)dy > 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{A/x}^{1} y^\rho \ell(xy) H_l(xy)dy \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x)\int\limits_{A/x}^{1} y^\rho H_l(xy)dy. \tag{33}$$

Поскольку при $x \geq A$

$$\int_A^x f(t)dt = \int_A^x t^\rho \ell(t) H_l(t)dt = x^{\rho+1} \int_{A/x}^1 y^\rho \ell(xy) H_l(xy)dy$$

и

$$x^{\rho+1}\ell(x) \int_{A/x}^1 y^\rho H_l(xy)dy = \ell(x) \int_A^x t^\rho H_l(t)dt,$$

из (33) следует (29).

Теперь предположим, что $\rho < -1$, и докажем (30). Поскольку $\rho < -1$, интегралы в (30) являются сходящимися (см. (11)).

Для $a \in [1, \infty)$ положим

$$J_{a,\infty}(x) = \int_a^\infty y^\rho \left(\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1 \right) H_l(xy)dy, \quad x \geq A,$$

и

$$J_{1,a}(x) = \int_1^a y^\rho \left(\frac{\ell(xy)}{\ell(x)} - 1 \right) H_l(xy)dy, \quad x \geq A.$$

Из теоремы о равномерной сходимости для SV-функций (см., например, [3, с. 22]) следует, что для любого $a \in [1, \infty)$

$$\lim_{x\to\infty} J_{1,a}(x) = 0. \tag{34}$$

Кроме того, поскольку $\rho < -1$, из теореми Поттера (см., например, [3, с. 25]) вытекает, что

$$\limsup_{a\to\infty} \limsup_{x\to\infty} |J_{a,\infty}(x)| = 0. \tag{35}$$

Из соотношений (34) и (35) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} J_{1,\infty}(x) = 0.$$

Кроме того,

$$\liminf_{x\to\infty} \int_1^\infty y^\rho H_l(xy)dy > 0.$$

Поэтому

$$\int_1^\infty y^\rho \ell(xy) H_l(xy)dy \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int_1^\infty y^\rho H_l(xy)dy. \tag{36}$$

Поскольку при $x \geq A$

$$\int\limits_x^\infty f(t)dt = \int\limits_x^\infty t^\rho \ell(t) H_l(t)dt = x^{\rho+1} \int\limits_1^\infty y^\rho \ell(xy) H_l(xy)dy$$

и

$$x^{\rho+1}\ell(x) \int\limits_1^\infty y^\rho H_l(xy)dy = \ell(x) \int\limits_x^\infty t^\rho H_l(t)dt,$$

из (36) следует (30).

Лемма 2 доказана.

***Замечание* 5.** Соотношение (29) имеет место при условии $\rho > -1$, согласно которому $\int_A^\infty f(t)dt = \infty$ (см. (10)). Поэтому соотношение (29) равносильно тому, что

$$\int\limits_{x_1}^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x) \int\limits_{x_2}^x t^\rho H_l(t)dt$$

для каких-нибудь (для всех) $x_1 \geq A$ и $x_2 > 0$.

***Замечание* 6.** Из леммы 2 при $H(u) \equiv 1$ (см. (9)) следует прямая теорема Караматы для RV-функций с индексом $\rho \neq -1$.

***Замечание* 7.** Лемма 2 остается в силе, если в качестве функций f рассматривать регулярно log-ограниченные функции (см. (17)).

5. Начало доказательства теоремы 1. При доказательстве теоремы 1 для функций из класса $\mathfrak{RLP}$ прежде всего нужно доказать эту теорему для функций из класса $\mathfrak{RLP}_+$. Следующая лемма является первым шагом доказательства теоремы 1 (полное доказательство см. в пункте 6).

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathfrak{RLP}_+$ — локально интегрируемая функция с индексом $\rho \neq -1$, периодической компонентой H и осцилляционной характеристикой $T(H) = T$. Тогда найдется такая положительная непрерывная периодическая функция $D = (D(x),\ x \in \mathbf{R})$, зависящая от ρ и H, что справедливы следующие утверждения*:

1) *если $\rho > -1$, то*

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x)f(x), \tag{37}$$

где

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y} H(y)dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \geq 0,$$

$$C = C(H,\rho) = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{(\rho+1)y} H(y)dy}{e^{T(\rho+1)} - 1}$$

и $\{x/T\}$ — дробная часть числа x/T;

2) *если* $\rho < -1$, *то*

$$\int\limits_x^\infty f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x)f(x), \tag{38}$$

где

$$D(x) = D_{H,\rho}(x) = \frac{\displaystyle\int_{T\{x/T\}}^T e^{(\rho+1)y}H(y)dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \geq 0,$$

$$C = C(H,\rho) = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)dy}{e^{T|\rho+1|} - 1};$$

3) *выполняется неравенство*

$$T(D) \leq T(H), \tag{39}$$

где $T(D)$*— осцилляционная характеристика функции* D.

Доказательство. Пусть $\rho > -1$. Докажем соотношение (37). Из соотношения (29) следует, что

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x)U_1(x), \tag{40}$$

где ℓ — SV-компонента функции f (см. (8)) и

$$U_1(x) = \int\limits_1^x t^\rho H(\ln t)dt, \quad x \geq 1.$$

Ясно, что

$$U_1(x) = \int\limits_0^{\ln x} e^{(\rho+1)u}H(u)du = V(\ln x),$$

где

$$V(x) = \int\limits_0^x e^{(\rho+1)u}H(u)du = \sum_{k=0}^{[x/T]-1} \int\limits_{kT}^{(k+1)T} e^{(\rho+1)u}H(u)du + R(x),$$

$$R(x) = \int\limits_{T[x/T]}^x e^{(\rho+1)u}H(u)du$$

и $[x/T]$ — целая часть числа x/T. Поскольку H — периодическая функция с периодом T, то

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} e^{(\rho+1)u}H(u)du = \int\limits_0^T e^{(\rho+1)(y+kT)}H(y)dy = e^{kT(\rho+1)}\int\limits_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)dy$$

для любого $k \in \mathbf{N}$. Поэтому

$$V(x) = C\left(e^{T(\rho+1)[x/T]} - 1\right) + R(x),$$

где

$$C = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)dy}{e^{T(\rho+1)} - 1} > 0.$$

Кроме того,

$$R(x) = \int\limits_{T[x/T])}^{x} e^{(\rho+1)u}H(u)du = e^{T(\rho+1)[x/T]}\int\limits_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)u}H(u)du.$$

После простых преобразований получаем равенство

$$U_1(x) = x^{\rho+1}\Theta(\ln x) - C, \quad x \geq 1, \tag{41}$$

где

$$\Theta(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y}H(y)dy + C}{\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \geq 0.$$

При $x \geq 0$ функция Θ является положительной и периодической с периодом T. Непосредственно проверяется, что эта функция непрерывна. Через $\tilde{\Theta} = \left(\tilde{\Theta}(x),\, x \in \mathbf{R}\right)$ обозначим непрерывное периодическое продолжение функции Θ на $\mathbf{R}$.

Поскольку $\rho > -1$, из (41) вытекает, что $\lim_{x\to\infty} U_1(x) = \infty$, и поэтому

$$U_1(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^{\rho+1}\tilde{\Theta}(\ln x).$$

Теперь, учитывая (40), видим, что выполняется (37), если положить

$$D(x) = \frac{\tilde{\Theta}(x)}{H(x)}.$$

Остается заметить, что функция $(D(x),\, x \in \mathbf{R})$ является положительной непрерывной периодической функцией с периодом T, откуда вытекает неравенство (39). Таким образом, первое утверждение и часть третьего утверждения леммы доказаны.

Пусть теперь $\rho > -1$. Докажем соотношение (38). Из соотношения (30) следует, что

$$\int\limits_x^\infty f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \ell(x)U(x), \tag{42}$$

где ℓ — SV-компонента функции f (см. (8)) и

$$U(x) = \int\limits_x^\infty t^\rho H(\ln t)dt, \quad x \geq A.$$

Ясно, что

$$U(x) = V(\ln x),$$

где

$$V(x) = \int\limits_x^\infty e^{(\rho+1)u} H(u)du = \sum_{k=1+[x/T]}^\infty \int\limits_{kT}^{(k+1)T} e^{(\rho+1)u} H(u)du + R(x)$$

и

$$R(x) = \int\limits_x^{T(1+[x/T])} e^{(\rho+1)u} H(u)du.$$

Поскольку H — периодическая функция с периодом T, то

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} e^{(\rho+1)u} H(u)du = \int\limits_0^T e^{(\rho+1)(y+kT)} H(y)dy = e^{kT(\rho+1)} \int\limits_0^T e^{(\rho+1)y} H(y)dy$$

для любого $k \in \mathbf{N}$. Поэтому

$$V(x) = Ce^{T(\rho+1)[x/T]} + R(x),$$

где

$$C = \frac{e^{T(\rho+1)} \displaystyle\int_0^T e^{(\rho+1)y} H(y)dy}{1 - e^{T(\rho+1)}} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{(\rho+1)y} H(y)dy}{e^{T|\rho+1|} - 1} > 0.$$

После простых преобразований получаем равенство

$$U(x) = x^{\rho+1} \Theta(\ln x), \quad x \geq 1, \tag{43}$$

где

$$\Theta(x) = \frac{\displaystyle\int_{T\{x/T\}}^T e^{(\rho+1)y} H(y)dy + C}{\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \geq 0.$$

При $x \geq 0$ функция Θ является положительной и периодической с периодом T. Непосредственно проверяется, что эта функция непрерывна. Через $\tilde{\Theta} = \left(\tilde{\Theta}(x),\, x \in \mathbf{R}\right)$ обозначим непрерывное периодическое продолжение функции Θ на $\mathbf{R}$. Теперь, учитывая (42) и (43), видим, что выполняется (38), если положить

$$D(x) = \frac{\tilde{\Theta}(x)}{H(x)}.$$

Остается заметить, что функция $(D(x),\, x \in \mathbf{R})$ является положительной непрерывной периодической функцией с периодом T, откуда следует неравенство (39).

Таким образом, второе и третье утверждения леммы доказаны.

6. Доказательства теорем 2 и 1. В этом пункте доказывается теорема 3, из которой следует теорема 2. В ходе доказательства теоремы 3 используется лемма 3, являющаяся предварительным вариантом теоремы 1. Полное доказательство теоремы 1 опирается на теорему 2 и завершает этот пункт.

Теорема 3. *Пусть для локально интегрируемой функции* $f \in \mathbb{FM}_+(A)$ *найдутся число* $\gamma \in (0, \infty)$ *и положительная непрерывная периодическая функция* $(\Gamma(x),\, x \in \mathbf{R})$, $\Gamma(0) = 1$, *с осцилляционной характеристикой* $T(\Gamma) = T$ *такие, что*

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x\Gamma(\ln x) f(x)}{\gamma}, \tag{44}$$

или

$$\int\limits_A^\infty f(t)dt < \infty \qquad \text{и} \qquad \int\limits_x^\infty f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x\Gamma(\ln x) f(x)}{\gamma}. \tag{45}$$

Тогда f *является функцией из класса* $\mathfrak{RLP}$ *с периодической компонентой* H, *причем* $\rho > -1$, *если выполняется* (44), *и* $\rho < -1$, *если выполняется* (45). *При этом имеют место следующие утверждения*:

1)

$$T(\Gamma H) = T(H) = T(\Gamma) = T, \tag{46}$$

где $T(H)$ — *осцилляционная характеристика функции* H *и* $T(\Gamma H)$ — *осцилляционная характеристика функции* $\Gamma H = (\Gamma(x)H(x),\, x \in \mathbf{R})$;

2) $T = 0$ *тогда и только тогда, когда* $H(x) \equiv 1$ *и*

$$|\rho + 1| = \gamma,$$

т. е. когда f *является RV-функцией с индексом* ρ;

3) $T > 0$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathfrak{RLP}_+$; *в этом случае*

$$|\rho + 1| = \gamma(\Gamma^{-1})_{av}$$

и

$$H(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \exp\left(\pm\gamma \int\limits_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt\right), \quad x \geq 0, \tag{47}$$

где

$$(\Gamma^{-1})_{av} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{du}{\Gamma(u)}$$

и в (47) *стоит знак* $+$, *если* $\rho + 1 > 0$, *и знак* $-$, *если* $\rho + 1 < 0$.

Доказательство разобьем на две части в соответствии с тем какое из соотношений (44) или (45) предполагается выполненным.

Пусть выполняется соотношение (44). Положим

$$b(x) = \frac{xf(x)\Gamma(\ln x)}{\int_A^x f(t)dt}, \quad x > A, \tag{48}$$

и заметим, что согласно (44)

$$\lim_{x\to\infty} b(x) = \gamma. \tag{49}$$

Из (48) следует равенство

$$\frac{b(x)}{x\Gamma(\ln x)} = \frac{f(x)}{\int_A^x f(t)dt},$$

интегрируя обе части которого, видим, что

$$\int\limits_{A+1}^{x} \frac{b(t)dt}{t\Gamma(\ln t)} = \ln\left(\int\limits_{A}^{x} f(t)dt\right) - \ln\left(\int\limits_{A}^{A+1} f(t)dt\right)$$

для всех $x \geq A+1$. Следовательно,

$$\int\limits_{A}^{x} f(t)dt = a\exp\left(\int\limits_{A+1}^{x} \frac{b(t)dt}{t\Gamma(\ln t)}\right), \quad x \geq A+1,$$

где $a = \int_A^{A+1} f(t)dt$. Отсюда и из (48) вытекает равенство

$$f(x) = \frac{ab(x)}{x\Gamma(\ln x)}\exp\left(\int\limits_{A+1}^{x} \frac{b(t)dt}{t\Gamma(\ln t)}\right),$$

которое позволяет при $x \geq A+1$ представить функцию f в виде

$$f(x) = \frac{ab(x)c(x)}{x\Gamma(\ln x)}\exp\left(\gamma\int\limits_{A+1}^{x} \frac{dt}{t\Gamma(\ln t)}\right),$$

где

$$c(x) = \exp\left(\int\limits_{A+1}^{x} \frac{b(t)-\gamma}{t\Gamma(\ln t)}dt\right).$$

Заметим, что в силу (49)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{b(t)-\gamma}{\Gamma(\ln t)} = 0.$$

Отсюда, согласно теореме об интегральном представлении SV-функций (см., например, [3, с. 12] или [5, с. 10]), следует, что функция $(c(x),\, x \geq A+1)$ является SV-функцией. Функция $\ell_1(x) = ab(x)c(x)$ также является SV-функцией, как произведение SV-функций. Кроме того, при $x \geq A+1$

$$\int\limits_{A+1}^{x} \frac{dt}{t\Gamma(\ln t)} = \int\limits_{x_0}^{\ln x} \frac{du}{\Gamma(u)} = \int\limits_{0}^{\ln x} \frac{du}{\Gamma(u)} - \int\limits_{0}^{x_0} \frac{du}{\Gamma(u)},$$

где $x_0 = \ln(A+1)$. Поэтому

$$f(x) = \frac{\ell(x)}{x\Gamma(\ln x)} M(\ln x), \quad x \geq A+1, \tag{50}$$

где

$$M(x) = \exp\left(\gamma \int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\Gamma(t)}\right), \quad x \geq 0,$$

и ℓ — SV-функция такая, что

$$\ell(x) = \ell_1(x) \exp\left(-\gamma \int\limits_{0}^{x_0} \frac{dt}{\Gamma(t)}\right), \quad x \geq A+1.$$

Теперь определим число $(\Gamma^{-1})_{av}$ и положительную непрерывную периодическую функцию $\tilde{h} = \big(\tilde{h}(x),\, x \in \mathbf{R}\big)$. Пусть

$$(\Gamma^{-1})_{av} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 1, \tag{51}$$

если $T = 0$, т. е. если функция Γ является постоянной, и

$$(\Gamma^{-1})_{av} = \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} \frac{dt}{\Gamma(t)}, \tag{52}$$

если $T > 0$. Кроме того, пусть $\tilde{h}(x) \equiv 0$, если $T = 0$, и

$$\tilde{h}(x) = \int\limits_{0}^{x} \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt, \quad x \geq 0,$$

если $T > 0$. Заметим, что число T является периодом функции $\tilde{h}$. Используя введенные величины, видим, что

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{dt}{\Gamma(t)} = x(\Gamma^{-1})_{av} + \int\limits_{0}^{x} \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt = x(\Gamma^{-1})_{av} + \tilde{h}(x), \quad x \geq 0,$$

откуда

$$M(x) = \exp\left(x\gamma(\Gamma^{-1})_{av} + \gamma\tilde{h}(x)\right), \quad x \geq 0.$$

Это равенство и (50) показывают, что функцию f можно представить в виде

$$f(x) = x^{\rho}\ell(x)H(\ln x), \quad x \geq A+1, \tag{53}$$

где

$$\rho = \gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1, \qquad H(x) = \exp(h(x)), \quad x \in \mathbf{R},$$

и

$$h(x) = \gamma\tilde{h}(x) - \ln\Gamma(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{54}$$

Поскольку H является положительной непрерывной периодической функцией с периодом T и $H(0) = 1$, равенство (53) позволяет заключить, что $f \in \mathfrak{RLP}$ и имеет индекс

$$\rho = \gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1 > -1. \tag{55}$$

Если $T = 0$, то $\Gamma(x) \equiv 1$. Отсюда следует, что $H(x) \equiv 1$, т. е. f является RV-функцией с индексом $\rho = \gamma - 1$. Теперь предположим, что $H(x) \equiv 1$. Тогда из (54) вытекает, что положительная непрерывная периодическая функция Γ является непрерывно дифференцируемым решением дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = \gamma(\Gamma^{-1})_{av}\Gamma(x) - \gamma, \quad x \in \mathbf{R},$$

и начальным условием $\Gamma(0) = 1$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\Gamma(x) \equiv 1$, т. е. $T = 0$. Таким образом, показано, что равенство $T = 0$ возможно тогда и только тогда, когда f является RV-функцией с индексом $\rho = \gamma - 1$. Этим самым доказано второе утверждение теоремы 3.

Соответственно, неравенство $T > 0$ возможно лишь в случае, когда функция H является положительной непрерывной периодической функцией с периодом T. Поэтому

$$0 < T(H) \leq T. \tag{56}$$

Отсюда и из соотношений (53) – (55) вытекает третье утверждение теоремы 3.

Для завершения первой части доказательства осталось доказать соотношение (46). Пусть f является RV-функцией. Тогда $H(x) = \Gamma(x) = \Gamma(x)H(x) \equiv 1$, откуда следует, что $T(\Gamma H) = T(H) = T(\Gamma) = 0$. Пусть теперь $f \in \mathfrak{RLP}_+$. Поскольку H — периодическая компонента функции f, согласно неравенству (55) и лемме 3 найдется положительная непрерывная периодическая функция D, для которой выполняются соотношение (37) и неравенство

$$T(D) \leq T(H). \tag{57}$$

Согласно (44) для функции $D_1 = \gamma^{-1}\Gamma$ также выполняется соотношение (37). Отсюда следует, что положительные непрерывные периодические функции D и D_1 асимптотически эквивалентны. Согласно лемме 1 они совпадают, поэтому

$$T(D) = T(D_1) = T.$$

Отсюда, учитывая (56) и (57), получаем равенство

$$T(H) = T. \tag{58}$$

Теперь рассмотрим функцию $\Gamma H = \big(\Gamma(x)H(x),\ x \in \mathbf{R}\big)$. Из (54) вытекает, что

$$\Gamma(x)H(x) = \exp\left(\gamma \int\limits_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt\right), \quad x \geq 0.$$

Поскольку правая часть этого равенства является периодической функцией с периодом $T > 0$, функция ΓH имеет период, равный T. Покажем, что меньшего положительного периода у функции ΓH нет. Для этого достаточно показать, что нет меньшего положительного периода у функции

$$\Psi(x) = \ln(\Gamma(x)H(x)) = \int\limits_0^x \left(\frac{1}{\Gamma(t)} - (\Gamma^{-1})_{av}\right) dt, \quad x \geq 0.$$

Допустим противное, т. е. пусть существует число $\tau \in (0, T)$ такое, что

$$\Psi(x + \tau) = \Psi(x)$$

для всех $x > 0$. Функция Γ является положительной и непрерывной, поэтому из последнего равенства следует, что

$$\Gamma(x + \tau) = \left(\frac{d\Psi(x + \tau)}{dx}\right)^{-1} = \left(\frac{d\Psi(x)}{dx}\right)^{-1} = \Gamma(x)$$

для всех $x > 0$. В результате получили противоречие с тем, что T является наименьшим положительным периодом функции Γ. Следовательно, $T(\Gamma H) = T$, что вместе с (58) доказывает (46).

Таким образом, теорема 3 доказана при выполнении соотношения (44). Переходя ко второй части доказательства теоремы 3, предполагаем, что выполняется соотношение (45). Положим

$$b(x) = \frac{x f(x)\Gamma(\ln x)}{\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt}, \quad x \geq A, \tag{59}$$

и заметим, что согласно соотношению (45)

$$\lim_{x \to \infty} b(x) = \gamma. \tag{60}$$

Из (59) вытекает равенство

$$\frac{b(x)}{x\Gamma(\ln x)} = \frac{f(x)}{\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt},$$

интегрируя обе части которого, получаем

$$\int\limits_A^x \frac{b(t)dt}{t\Gamma(\ln t)} = -\ln\left(\int\limits_x^\infty f(t)dt\right) + \ln\left(I_f(\infty)\right), \quad x \ge A.$$

Следовательно,

$$\int\limits_x^\infty f(t)dt = I_f(\infty)\exp\left(-\int\limits_A^x \frac{b(t)dt}{t\Gamma(\ln t)}\right), \quad x \ge A.$$

Это равенство и (59) позволяют представить функцию f в виде

$$f(x) = \frac{I_f(\infty)b(x)}{x\Gamma(\ln x)}\exp\left(\int\limits_A^x \frac{\gamma - b(t)}{t\Gamma(\ln t)}dt\right)\exp\left(-\gamma\int\limits_A^x \frac{dt}{t\Gamma(\ln t)}\right).$$

При $x \ge A$ положим $\ell_1(x) = I_f(\infty)b(x)c(x)$, где

$$c(x) = \exp\left(\int\limits_A^x \frac{\gamma - b(t)}{t\Gamma(\ln t)}dt\right).$$

В силу (60)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma - b(t)}{\Gamma(\ln t)} = 0$$

и по теореме об интегральном представлении SV-функций (см., например, [3, с. 12] или [5, с. 10]) функция $(c(x),\, x > A+1)$ является SV-функцией. Функция ℓ_1 также является SV-функцией, как произведение SV-функций. Поэтому

$$f(x) = \frac{\ell(x)}{x\Gamma(\ln x)}M(\ln x), \quad x \ge A, \tag{61}$$

где

$$M(x) = \exp\left(-\gamma\int\limits_0^x \frac{dt}{\Gamma(t)}\right), \quad x \ge 0,$$

и ℓ — SV-функция такая, что

$$\ell(x) = \ell_1(x)\exp\left(\gamma\int\limits_0^{\ln A}\frac{dt}{\Gamma(t)}\right), \quad x \ge A.$$

Из равенства (61) следует, что функцию f можно представить в виде

$$f(x) = x^\rho \ell(x)H(\ln x), \quad x \ge A, \tag{62}$$

где

$$\begin{gathered}\rho = -\gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1, \qquad H(x) = \exp(h(x)), \quad x \in \mathbf{R}, \\ h(x) = -\gamma\tilde{h}(x) - \ln\Gamma(x), \quad x \in \mathbf{R},\end{gathered} \tag{63}$$

и величина $(\Gamma^{-1})_{av}$ определена в соотношениях (51) и (52). Поскольку H является положительной непрерывной периодической функцией с периодом T и $H(0) = 1$, равенство (62) показывает, что $f \in \mathfrak{RLP}$ и имеет индекс $\rho = -\gamma(\Gamma^{-1})_{av} - 1 < -1$.

Сравнивая (62), (63) и (53), (54), заключаем, что далее вторая часть доказательства теоремы 3 дословно повторяет соответствующие фрагменты первой части доказательства теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Теорема 2 вытекает из теоремы 3, если положить

$$\Gamma(x) = \frac{B(x)}{B(0)} \qquad \text{и} \qquad \gamma = \frac{1}{B(0)}.$$

***Доказательство теоремы* 1.** Теперь мы можем завершить начатое в пункте 5 доказательство теоремы 1.

Второе утверждение теоремы 1 вытекает из леммы 2, третье — из леммы 3, а первое — из первого утверждения теоремы 2.

1. *Karamata J.* Sur un mode de croissance reguliere // Mathematica (Cluj). – 1930. – **4**. – P. 38 – 53.
2. *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière. Théoremès fondamentaux // Bull. Soc. Math. France. – 1933. – **61**. – P. 55 – 62.
3. *Bingham N. M., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. – 508 p.
4. *de Haan L.* On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes. – Amsterdam: Math. Centrum, 1975. – 124 p.
5. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
6. *Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G.* On factorization representation for Avakumovic – Karamata functions with nondegenerate groups of regular points // Anal. Math. – 2004. – **30**. – P. 161 – 192.
7. *Cline D. B. H.* Intermediate regular and Π variation // Proc. London Math. Soc. – 1994. – **68**. – P. 594 – 616.
8. *Булдигін В. В., Павленков В. В.* Узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – № 81. – С. 13 – 24.
9. *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1975. – 420 p.
10. *Ядренко М. Й.* Принцип Діріхле та його застосування. – Київ: Вища шк., 1985. – 80 с.

Получено 14.02.12