УДК 517.9

**О. В. Карпенко** (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
**В. І. Кравець** (Таврій. держ. агротехн. ун-т),
**О. М. Станжицький** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# КОЛИВНІСТЬ РОЗВ’ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

We establish conditions for the oscillation of solutions of functional difference linear equations and discrete difference linear equations of the second order in the case where the corresponding solutions of their differential analogs are oscillating on a segment.

Установлены условия колеблемости решений функционально-разностных и дискретных разностных линейных уравнений второго порядка в случае, когда решения их дифференциальных аналогов являются колеблющимися на отрезке.

**Вступ.** Функціонально-різницеві та дискретні різницеві рівняння є важливими об’єктами вивчення як з теоретичної точки зору, так і з точки зору застосувань. Їх частинним випадком є різницеві схеми, що виникають при чисельному інтегруванні диференціальних рівнянь. З іншого боку, вони є зручними математичними моделями об’єктів, еволюція яких має дискретний характер. Яскравим представником останніх є фінансовий ринок зі зміною цін ризикових активів в дискретні моменти часу (див., наприклад, [1]). Функція, що описує загальний капітал інвестора на такому ринку в найпростішому випадку, задовольняє лінійне різницеве рівняння. Оскільки зміні вартості акцій (ризикового активу) притаманний коливний характер, то і еволюція загального капіталу має коливний характер. Тому для таких моделей особливо важливого значення набувають коливні розв’язки.

Коливні властивості розв’язків різницевих рівнянь вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [2 – 4]).

Для рівнянь на часових шкалах поняття узагальненого нуля розв’язку та коливність досліджувались у роботах [5, 6].

Особливий інтерес становлять питання взаємозв’язку між якісними властивостями розв’язків звичайних і відповідних їм різницевих рівнянь при умові, що крок $h$ прямує до нуля. Вони вивчалися, наприклад, у монографії [7], де наведено широку бібліографію. Також у роботах [8, 9] розглядалися питання зв’язку між існуванням атракторів систем диференціальних і відповідних їм різницевих рівнянь.

У роботі [10] за автономною системою звичайних диференціальних рівнянь побудовано гібридну систему, що є узагальненням схеми Рунге – Кутта. Досліджується питання рівномірної, глобальної асимптотичної стійкості нульового розв’язку цієї гібридної системи. Тут показано, що основною умовою такої стійкості є рівномірна глобальна асимптотична і локальна експоненціальна стійкість нульового розв’язку відповідної автономної системи диференціальних рівнянь.

У роботі [11] встановлено існування обмежених на осі розв’язків диференціальних рівнянь при умові існування таких розв’язків у відповідного різницевого рівняння та навпаки.

Питанням зв’язку між коливністю розв’язків лінійних різницевих і відповідних диференціальних рівнянь присвячено роботи [12, 13]. Так, у [12] встановлено коливність розв’язків лінійних різницевих рівнянь другого порядку з достатньо малим кроком $h$ при умові, що таку властивість мають розв'язки відповідного диференціального рівняння. У [13] отримано обернений результат, коли з коливності розв'язків різницевих рівнянь при малому кроці $h$ випливає коливність розв'язків відповідного диференціального рівняння.

Але в цих роботах вивчається коливність фіксованого розв'язку задачі Коші для різницевого рівняння, якщо таку властивість має розв'язок задачі Коші з такими ж початковими даними відповідного диференціального рівняння і навпаки. При цьому крок $h$ вибирається свій для кожних початкових даних. Крім того, від коефіцієнтів рівняння вимагається гладкість, що не є природною для такого роду рівнянь.

Дана робота узагальнює результат роботи [12] у кількох аспектах.

По-перше, встановлено умови коливності не лише розв'язків лінійних різницевих рівнянь другого порядку, але й розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь другого порядку при умові, що властивість коливності мають розв'язки відповідного диференціального рівняння.

По-друге, основним моментом роботи є те, що в ній, на відміну від [12], показано, що крок $h$, який гарантує коливність розв'язків різницевих рівнянь, можна вибрати єдиним чином для всіх початкових даних.

Окрім того виявилося, що для отримання результатів умову гладкості коефіцієнтів рівняння можна зняти, замінивши її умовою неперервності.

Робота складається зі вступу і двох пунктів. У першому пункті наведено постановку задачі та кілька необхідних у подальшому допоміжних тверджень, які на думку авторів мають і самостійний інтерес.

Основні результати роботи викладено у другому пункті.

**1. Постановка задачі та допоміжні твердження.** Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

та відповідні йому функціонально-різницеве рівняння

$$\triangle^2 x(t) + hp(t)\triangle x(t) + h^2 q(t)x(t) = 0 \tag{2}$$

і різницеве рівняння

$$\triangle_k^2 x(t_0) + hp(t_0 + kh)\triangle_k x(t_0) + h^2 q(t_0 + kh)x(t_0 + kh) = 0. \tag{3}$$

Тут

$$\triangle x(t) = x(t + h) - x(t),$$

$$\triangle^2 x(t) = \triangle(\triangle x(t)) = x(t + 2h) - 2x(t + h) + x(t).$$

$$\triangle_k x(t_0) = x(t_0 + (k + 1)h) - x(t_0 + kh),$$

$$\triangle_k^2 x(t_0) = \triangle_k(\triangle_k x(t_0)).$$

Позначимо також через $x_k^h = x(t_0 + kh)$ розв'язок рівняння (3) та $t_k = t_0 + kh$.

**Означення 1** [12]. *Скажемо, що розв'язок $x_k^h$ рівняння* (3) *має в точці $t_k$ зміну знака, якщо виконується одна з умов*:

1) $x_k^h x_{k+1}^h < 0$;

2) $x_k^h = 0$, $x_{k-1}^h x_{k+1}^h < 0$.

**Означення 2** [12]. *Якщо на деякому інтервалі розв'язок $x_k^h$ рівняння* (3) *має не менше двох змін знаків, то його будемо називати коливним на цьому інтервалі.*

Рівняння (2) буде вивчатися при умовах, що забезпечують неперервність його розв'язків. А тому для нього зберігається звичайне поняття нуля розв'язку і коливність розуміється так, як і для рівняння (1).

Наведемо тепер кілька необхідних у подальшому тверджень.

У просторі $\mathbf{R}^d$ розглянемо систему функціонально-різницевих рівнянь

$$x^h(t+h) = x^h(t) + hX(t, x^h(t)), \tag{4}$$

де $h > 0$ — крок цього рівняння, $X(t,x)$ — визначена і неперервна функція при $t \geq 0$, $x \in \in D$ — область в $\mathbf{R}^d$. Будь-який розв'язок рівняння (4) при фіксованому $h > 0$ однозначно продовжується вправо за допомогою початкової функції $\varphi(t)$, $t \in [0,h]$, так, що $x^h(t) = \varphi(t)$ при $t \in [0,h]$. При цьому, очевидно, повинна виконуватись умова узгодженості

$$\varphi(h) = \varphi(0) + hX(0, \varphi(0)). \tag{5}$$

Якщо функція $\varphi(t)$ неперервна на $[0,h]$ і виконано умову (5), то розв'язок $x^h(t)$ визначений при $t \geq 0$ до тих пір, поки $x^h(t-h)$ належить $D$ і є неперервною функцією.

Розглянемо також систему (4) при $t = t_0 + kh$, де $t_0$ є фіксованим:

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \tag{6}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots,$ $h > 0$, $x_k^h = x^h(t_0 + kh)$, що є системою різницевих рівнянь. Її розв'язки однозначно продовжуються вправо за допомогою початкових даних $x_0^h = x^h(t_0)$ при $k > 0$ до тих пір, поки $x_{k-1}^h$ належить $D$.

Позначимо через $I_{x^h}$ максимальний інтервал продовжуваності вправо розв'язку $x_h(t)$ системи (4), а через $I_{x_k^h}$ максимальний інтервал продовжуваності вправо розв'язку $x_k^h$ системи (6).

Має місце наступна лема.

**Лема 1.** *Нехай $x^h(t)$ — розв'язок системи* (4) *із заданою початковою функцією $\varphi \in \in C([0,h])$, для якої виконано умову узгодженості* (5).

*Тоді для кожного $t \in I_{x^h}$ існують єдина точка $t_0 \in [0,h]$ і $k = k(t)$ такі, що $x^h(t) = x_{k(t)}^h$, де $x_k^h$ — розв'язок початкової задачі*

$$\begin{gathered} x_{k+1}^h = x_k^h + hX(t_0 + kh, x_k^h), \\ x_0^h = \varphi(t_0). \end{gathered} \tag{7}$$

Доведення леми очевидним чином випливає з означення розв'язків систем (4) і (6).

Отже, кожен розв'язок рівняння (4) із заданою початковою функцією $\varphi(t)$, що задовольняє (5), складається з точок, що є розв'язками початкової задачі (7) з початковою умовою $x_0^h = \varphi(t_0)$, коли $t_0$ пробігає $[0, h]$.

Розглянемо тепер рівняння (1) при $t \in [0, a]$, $a > 0$ і $p, q \in C([0, a])$. Будемо вивчати розв'язки рівняння (1) з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$, де $t_0 \in [0, \bar{h}]$, а

$$x_0^2 + x_1^2 = 1. \tag{8}$$

Тут $\bar{h}$ є фіксованим і таким, що $0 < \bar{h} < a$.

Нехай $x(t)$ — такий розв'язок. Відомо, що він існує і єдиний на всьому проміжку $[0, a]$ [14]. Якщо даний розв'язок коливний на $(0, a)$, то він має там принаймні два нулі. Позначимо через $t_k$, $t_{k+1}$ два послідовних нулі на $(0, a)$ такого коливного розв'язку. Введемо до розгляду величину

$$M_k^x = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t)|.$$

Дану числову послідовність (скінченну) назвемо послідовністю амплітуд коливань розв'язку $x(t)$ на інтервалі $(0, a)$. Відносно цієї послідовності справедливою є така лема.

**Лема 2.** *Нехай у рівнянні* (1) *функції* $p, q$ *належать* $C([0, a])$.

*Тоді існує* $\triangle > 0$ *таке, що для довільного коливного розв'язку рівняння* (1) *з початковими даними* (8) *має місце нерівність*

$$M_k^x \geq \triangle. \tag{9}$$

***Доведення.*** Припустимо, що (9) не виконується. Тоді існує нескінченна послідовність коливних розв'язків $x_n(t)$ з початковими даними $t_{0n} \in [0, \bar{h}]$, $x_{0n}$, $x_{1n}$, що задовольняють умову (8) і таких, що для кожного $n$ з послідовності амплітуд цих розв'язків можна вибрати таку амплітуду $M_{k(n)}^{x_n}$, що утворена з цих чисел послідовність $\{M_{k(n)}^{x_n}\}$ задовольняє умову

$$M_{k(n)}^{x_n} \to 0, n \to \infty. \tag{10}$$

Тут $M_{k(n)}^{x_n} = \max_{t \in [t_{k(n)}, t_{k(n)+1}]} |x_n(t)|$.

Нехай $t_n^*$ — точка, в якій даний максимум досягається. Тоді $\dot{x}_n(t_n^*) = 0$, $|x_n(t_n^*)| = M_{k(n)}^{x_n}$.

Оскільки множина початкових даних (8) — компакт, то з послідовності $(t_{0n},\ x_{0n},\ x_{1n})$ можна виділити збіжну підпослідовність. Не втрачаючи загальності будемо вважати, що сама послідовність $(t_{0n}\ x_{0n},\ x_{1n})$ є збіжною.

Отже,

$$(t_{0n}, x_{0n}, x_{1n}) \to (t_0, x_0, x_1), \quad n \to \infty, \tag{11}$$

де $t_0 \in [0, \bar{h}]$, $x_0^2 + x_1^2 = 1$.

Нехай $x(t)$ — розв'язок рівняння (1) з початковими даними $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$. Очевидно, що він нетривіальний.

З послідовності $\{t_n^*\}$ також виділимо збіжну підпослідовність і знову позначимо її $\{t_n^*\}$. Отже, $t_n^* \to t^* \in [0, a]$, $n \to \infty$.

З неперервної залежності від початкових даних розв'язку задачі Коші на скінченному інтервалі та нерівності

$$|x_n(t_n^*) - x(t^*)| \le |x_n(t_n^*) - x(t_n^*)| + |x(t_n^*) - x(t^*)|$$

випливає

$$x_n(t_n^*) \to x(t^*), \quad \dot{x}_n(t_n^*) \to \dot{x}(t^*). \tag{12}$$

Але, з іншого боку, $x_n(t_n^*) \to 0$ при $n \to \infty$ і $\dot{x}_n(t_n^*) = 0$ для кожного $n$. Отже, $x(t)$ — тривіальний розв'язок. Отримана суперечність і доводить лему.

Отже, для довільного коливного на $(0, a)$ розв'язку рівняння (1) з початковими даними (8) послідовність його амплітуд коливань обмежена знизу деяким числом $\triangle$, не залежним від розв'язку.

Нехай $x(t)$ — такий розв'язок, а $t_k$ — його нулі на $(0, a)$, $t_k^*$ — точки максимуму його модуля на відрізках між цими нулями.

Позначимо через $I_{\triangle,k}^x$ такий симетричний замкнений окіл точки $t_k^*$, що для довільного $t \in I_{\triangle,k}^x \quad |x(t)| \ge \dfrac{\triangle}{2}$. Через $|I_{\triangle,k}^x|$ позначимо довжину цього околу.

**Лема 3.** *В умовах леми* 2 *існує* $\delta > 0$ *таке, що для довільного коливного на* $(0, a)$ *розв'язку рівняння* (1) *з початковими даними* (8) *має місце нерівність*

$$|I_{\triangle,k}^x| \ge 2\delta. \tag{13}$$

***Доведення.*** Припустимо, що (13) не виконується. Тоді, як і в попередній лемі, існує нескінченна послідовність коливних на $(0, a)$ розв'язків $x_n(t)$ з початковими даними $t_{0n} \in [0, h]$, $x_{0n}$, $x_{1n}$, які задовольняють умову (8) і такі, що для кожного $n$ з послідовності інтервалів $I_{\triangle,k}^{x_n}$ цих розв'язків можна вибрати по одному такому інтервалу $I_{\triangle,k(n)}^{x_n}$, що утворена з них послідовність інтервалів $I_{\triangle,k(n)}^{x_n}$ задовольняє умову

$$|I_{\triangle,k(n)}^{x_n}| \to 0, n \to \infty. \tag{14}$$

Умова (14), внаслідок симетричності інтервалів $I_{\triangle,k(n)}^{x_n}$, означає, що хоча б один з односторонніх околів кожного з них стягується до нуля. Нехай це буде правий окіл.

Можна вважати, що на відрізку $t \in [t_{k(n)}, t_{k(n)+1}]$ розв'язок $x_n(t)$ є невід'ємним.

Позначимо через $t_n^*$ середину інтервалу $I_{\triangle,k(n)}^{x_n}$. Тоді $x_n(t_n^*) = \max_{t \in [t_{k(n)}, t_{k(n)+1}]} x(t)$.

Нехай $t_{\triangle,k}^{(n)}$ — крайня права точка з околу $I_{\triangle,k(n)}^{x_n}$. Тоді маємо

$$x_n(t_{\triangle,k}^{(n)}) = \frac{\triangle}{2}. \tag{15}$$

Але згідно з лемою 2

$$x_n(t_n^*) \ge \triangle. \tag{16}$$

Провівши тепер пряму через точки $(t_n^*, x_n(t_n^*))$ і $\left(t_{\triangle,k}^{(n)}, \dfrac{\triangle}{2}\right)$, з (15) і (16) отримуємо, що модуль її кутового коефіцієнта $k_n$ задовольняє нерівність

$$|k_n| \geq \frac{\triangle}{|I^{x_n}_{\triangle,k(n)}|} \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{17}$$

внаслідок (14).

Оскільки $\dot{x}_n(t_n^*) = 0$, то з побудови вказаної прямої і (17) випливає, що хоча б в одній точці правого околу $I^{x_n}_{\triangle,k(n)}$ похідна $\dot{x}_n(t)$ необмежено зростає за модулем. Останнє суперечить неперервності функції $\dot{x}_n(t) = \dot{x}(t, t_0, x_0, x_1)$ і компактності внаслідок того, що $t$ належить $[0, a]$ і (8) — її області визначення.

Лему доведено.

Поряд з системою (4) розглянемо відповідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \tag{18}$$

при $t \geq 0$, $x \in D$ — область (можливо замкнена) в $\mathbf{R}^d$.

**Означення 3.** *Розв'язки $x(t)$ і $x_k^h$ систем (18) і (6) назвемо відповідними, якщо $x(t_0) = x_0^h = x_0 \in D$.*

Для відповідних розв'язків справедливою є така лема.

**Лема 4.** *Нехай функція $X(t, x)$ визначена та неперервна за сукупністю змінних у своїй області визначення $t \in [0, a]$, $x \in D$ та задовольняє умови:*

1) *існує $M > 0$ таке, що $|X(t, x)| \leq M$, $t \in [0, a]$, $x \in D$;*

2) *існує $L > 0$ таке, що для довільних $t \in [0, a]$, $x, x_1 \in D$*

$$|X(t, x) - X(t, x_1)| \leq L|x - x_1|.$$

*Тоді, якщо відповідні розв'язки систем (6) і (18) визначені на відрізку $[t_0, t_0 + T]$, справджується оцінка*

$$|x(t_0 + kh) - x_k^h| \leq C \cdot h, \tag{19}$$

*в якій стала $C$ залежить лише від $M$, $L$ і $T$.*

***Доведення*** даної леми є легкою модифікацією схеми доведення леми 5.1.2 з [7, с. 114] з урахуванням пропозиції 5.2.2 [7, с. 118].

Наступна лема стосується лінійних систем (18) та (6), а саме, систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{20}$$

і

$$x_{k+1}^h = x_k^h + hA(t_0 + kh)x_k^h. \tag{21}$$

Якщо матриця $A(t)$ неперервна при $t \geq 0$, то всі розв'язки систем (20) і (21) необмежено продовжувані вправо. Будемо розглядати їх розв'язки з початковими даними

$$t_0 \in [0, \bar{h}], \quad |x_0| = 1, \tag{22}$$

де $\bar{h}$ вибрано з умови (8).

Позначимо $M(T) = \max_{[t_0, t_0+T]} \|A(t)\|$, де $T > 0$ є фіксованим.

**Лема 5.** *Для всіх розв'язків задач Коші систем* (20) *та* (21) *з початковими даними* (22) *існує* $R > 0$, *залежне лише від* $T$ *і* $M(T)$, *таке, що при* $t \in [t_0, t_0 + T]$, $t_0 + kh \in [t_0, t_0 + T]$ *виконуються нерівності*

$$|x(t)| \leq R, \quad |x_k^h| \leq R. \tag{23}$$

***Доведення.*** Перша з нерівностей (23) є простим наслідком властивостей лінійних систем диференціальних рівнянь. Друга є таким же наслідком аналогічних властивостей систем різницевих рівнянь (див., наприклад, [15, с. 35]).

***Зауваження.*** Число $R$, яке фігурує в лемі 5, не залежить від $h$.

**2. Основні результати.** Перейдемо до викладення основних результатів роботи про зв'язок між коливністю розв'язків рівнянь (1), (2) і (3).

Дані рівняння еквівалентні відповідним системам

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -p(t)y - q(t)x; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hy(t), \\ y(t+h) &= y(t) - h(p(t)y(t) + q(t)x(t)); \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1}^h &= x_k^h + hy_k^h, \\ y_{k+1}^h &= y_k^h - h(p(t_0 + kh)y_k^h + q(t_0 + kh)y_k^h). \end{aligned} \tag{26}$$

Системи (25) і (26) є системами вигляду (4) і (6) відповідно. Тому розв'язки системи (25) однозначно визначаються вправо початковими функціями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [0, h]$, з виконанням умови узгодженості

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \varphi(0) + h\psi(0), \\ \psi(h) &= \psi(0) - h(p(0)\psi(0) + q(0)\varphi(0)). \end{aligned} \tag{27}$$

Далі будемо вважати, що $\varphi, \psi$ належать $C\left([0, h]\right)$.

Розв'язки ж системи (26) однозначно визначаються вправо початковими даними

$$x_0^h(t_0) = x_0, y_0^h(t_0) = y_0.$$

**Теорема 1.** *Нехай у рівнянні* (1) *функції* $p$ *і* $q$ *належать* $C([0, a])$. *Тоді існує* $h_0 > 0$ *таке, що при всіх* $0 < h \leq h_0$ *справджується твердження*:

*якщо* $x(t)$ — *розв'язок рівняння* (1) *з початковими умовами в точці* $t_0 \in [0, h]$, *який має на інтервалі* $[t_0, a)$ *принаймні три нулі, то відповідний йому розв'язок різницевого рівняння* (3) *є коливним на* $[t_0, a]$.

***Доведення.*** Будемо розглядати рівняння (3) при $h \le \bar{h}$, де $\bar{h}$ вибрано з умови (8). Замість рівняння (3) введемо до розгляду еквівалентну йому систему (26) і будемо відслідковувати зміну знака першої компоненти $x_k^h$ її розв'язку $(x_k^h, y_k^h)$.

Для рівняння (1), систем (24) і (26) очевидно виконано умови лем 2 – 5.

Спочатку виберемо число $\rho$ так, щоб $0 < \rho \le \dfrac{\triangle}{2}$, де $\triangle$ — величина, що фігурує в лемі 2.

Покладемо $h_1 = \min\{\bar{h}, \delta\}$, де $\delta$ — величина, що фігурує в лемі 3.

Далі для розв'язків системи (24) та системи (26) при $h \le h_1$ з початковими даними $t_0 \in \in [0, h]$, $x_0^2 + x_1^2 = 1$ виберемо, згідно з лемою 5, $R > 0$ з виконанням нерівності (23) при $t \in [t_0, a]$ та $t_0 + kh \in [t_0, a]$. Сталу $M(T)$ при цьому можна взяти рівною $M$, що залежить лише від максимумів функцій $|p(t)|$ і $|q(t)|$ на відрізку $[0, a]$. Сталу $R$ також можна вибрати залежною лише від $a$ та $M$.

Тоді, розглядаючи системи (24) та (26) в області $t \in [0, a]$, $x^2 + y^2 \le R^2$, можна стверджувати, згідно з лемою 4, що для їх відповідних розв'язків з початковими даними $t_0 \in [0, h]$, $x_0^2 + x_1^2 = 1$ виконано нерівність (19) при $t \in [t_0, a]$ і $t_0 + kh \in [t_0, a]$. При цьому сталу $C$ в нерівності (19) можна взяти залежною лише від $a$, $R$ та $M$.

Виберемо, нарешті, $h_0 \le h_1$ так, щоб при $0 < h \le h_0$ права частина нерівності (19) задовольняла умову

$$Ch \le \rho. \tag{28}$$

Будемо розглядати тепер систему (26) при $0 < h \le h_0$.

Нехай $x(t)$ — довільний нетривіальний розв'язок рівняння (1) з початковими даними $x(t_0) = = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$, $t_0 \in [0, h]$, що має принаймні три нулі на $(t_0, a)$. Розглянемо відповідний йому розв'язок $(x_k^h, y_k^h)$ системи (26) і покажемо, що його перша компонента $x_k^h$ має принаймні дві зміни знака на $(t_0, a)$.

Введемо величину $r_0 = \sqrt{x_0^2 + x_1^2}$.

Внаслідок лінійності систем (24) і (26) функції $\dfrac{1}{r_0}(x(t), \dot{x}(t)) = (z(t), \xi(t))$ та $\dfrac{1}{r_0}(x_k^h, y_k^h) = = (z_k^h, \xi_k^h)$ також є їх розв'язками, при цьому компонента $z(t)$ має ті ж самі нулі, що і $x(t)$, а $z_k^h$ має ті ж самі зміни знака, що і $x_k^h$. Початкові ж дані розв'язку $(z(t), \xi(t))$ задовольняють умову (8).

Оточимо розв'язок $(z(t), \xi(t))$ при $t \in [t_0, a]$ $\rho$-околом, де $\rho$ — вибране вище число.

Розв'язок $z(t)$ рівняння (1) має принаймні дві амплітуди коливань на $(t_0, a)$. Очевидно також, що внаслідок умов на $h_0$ при належному виборі $n \in \mathbf{N}$ точки вигляду $t_0 + nh$ попадають у кожну множину $I^z_{\triangle,k}$, що фігурує в лемі 3.

Тоді з огляду на побудову цих множин, вибір $\rho$ та нерівність (28) можна стверджувати, що в точках $t_0 + nh \in I^z_{\triangle,k}$ та точці $t_0$ функція $z_k^h$ зберігає знак розв'язку $z(t)$, а отже, має, як мінімум, дві зміни знака.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер рівняння (2) або еквівалентну йому систему (25). Як наслідок зі щойно доведеної теореми та леми 1, відносно коливності розв'язків рівняння (2) або коливності першої компоненти розв'язків системи (25) легко отримуємо наступний результат.

**Теорема 2.** *Нехай у рівнянні* (2) *функції* $p$ *і* $q$ *належать* $C([0,a])$.

*Тоді існує* $h_0 > 0$ *таке, що при всіх* $0 < h \le h_0$ *справджується твердження*:

*кожен розв'язок системи* (25) *з початковими функціями* $\varphi, \psi \in C([0,h])$, *які задовольняють умову* (27), *має коливну на* $(0,a)$ *першу компоненту, якщо існує число* $t_0 \in [0,h]$ *таке, що розв'язок рівняння* (1) *з початковими даними*

$$x(t_0) = \varphi(t_0), \dot{x}(t_0) = \psi(t_0)$$

*має на інтервалі* $(t_0, a)$ *принаймні три нулі.*

Насамкінець розглянемо рівняння (1) спеціального вигляду

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{29}$$

та відповідні йому функціонально-різницеве рівняння

$$\triangle^2 x(t) + h^2 q(t)x(t) = 0 \tag{30}$$

і різницеве рівняння

$$\triangle_k^2 x(t_0) + h^2 q(t_0 + kh)x(t_0 + kh) = 0 \tag{31}$$

при $t \in [0,a]$ і $q \in C([0,a])$.

Позначимо

$$m = \min_{t\in[0,a]} q(t), \quad M = \max_{t\in[0,a]} q(t).$$

Будемо вважати, що

$$m > 0 \quad a > \frac{3\pi}{\sqrt{m}}. \tag{32}$$

Тоді якщо

$$a - \bar{h} > \frac{3\pi}{\sqrt{m}}, \tag{33}$$

то всі розв'язки рівняння (29) з початковими умовами $t_0 \in [0,\bar{h}]$ мають на інтервалі $(t_0, a)$ принаймні три нулі.

Врахувавши даний факт, з теорем 1 і 2 можна отримати два наслідки про коливність розв'язків рівнянь (30) і (31).

***Наслідок* 1.** *Нехай функція* $q$ *належить* $C([0,a])$ *і виконано умови* (32) *та* (33).

*Тоді існує* $h_0 > 0$ *таке, що при всіх* $0 < h \le h_0$ *всі розв'язки рівняння* (25) *з початковими умовами в точці* $t_0 \in [0,h]$ *коливні на* $[t_0, a)$.

***Наслідок* 2.** *Нехай функція* $q$ *належить* $C([0,a])$ *і виконано умови* (32) *та* (33).

*Тоді існує* $h_0 > 0$ *таке, що при всіх* $0 < h \le h_0$ *кожен розв'язок системи*

$$x(t+h) = x(t) + hy(t),$$

$$y(t+h) = y(t) - hq(t)x(t)$$

*з початковими функціями* $\varphi, \psi \in C\left([0,h]\right)$, *що задовольняють умови узгодженості*

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\psi(0),$$

$$\psi(h) = \psi(0) - hq(0)\varphi(0)),$$

*має коливну на* $(0, a)$ *першу компоненту.*


1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – 1016 с.
2. *Ladas G.* Explicit conditions for the oscillation of difference equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1990. – **153**. – P. 276 – 287.
3. *Öcalan Ö.* Linearized oscillation of nonlinear difference equations with advanced arguments // Arch. mat. – 2009. – **45**. – P. 203 – 212.
4. *Öcalan Ö.* Oscillation of nonlinear difference equations with several coefficients // Communs Math. Anal. – 2008. – **4**, № 1. – P. 35 – 44.
5. *Bohner M., Peterson A.* Dynamical equations on time scales. An introduction with applications. – Boston etc.: Birkhäuser, 2003.
6. *Messer K.* A second-order self adjoint dynamic equation on time skale // Dynam. Syst. and Appl. – 2002. – **8**, № 8. – P. 451 – 460.
7. *Grüne L.* Asymptotic behavior of dynamical and control systems pertubation and discretization. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – 231 p.
8. *Garay B. M., Lee K.* Attractors under discretization with variable stepsize // Discrete Contin. Dynam. Syst. – 2005. – **13**, № 3. – P. 827 – 841.
9. *Grune L.* Attraction rates, robustness, and discretization of attractors // SIAM J. Numer. Anal. – 2003. – **41**, № 6. – P. 2096 – 2113.
10. *Karafyllis I., Grune L.* Feedback stabilization methods for the numerical solution of systems of ordinary differential equations // Discrete and Contin. Dynam. Syst. Ser. B. – 2011. – **16**, № 1. – P. 283 – 317.
11. *Станжицький О. М., Ткачук А. М.* Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 989 – 996.
12. *Скалкина М. А.* О колебаниях решений уравнений в конечных разностях // Изв. вузов. Математика. – 1959. – С. 138 – 144.
13. *Атейві А. М.* Коливні властивості розв'язків диференціальних рівнянь і їх стійкість: Дис. … канд. фіз-мат. наук. – Київ, 1997. – 76 с.
14. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння: Підручник. – Київ: Либідь, 2003. – 600 с.
15. *Мартинюк Д. І.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 247 с.


Одержано 12.10.12