УДК 517.956

Ш. Ш. Юсубов (Бакин. гос. ун-т, Азербайджан)

ЗАДАЧА ТИПА ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

For a higher-order equation with leading mixed derivative, we consider a Goursat-type problem without agreement conditions. The notion of fundamental solution is introduced. Using this notion, we obtain a representation of a solution of the considered problem.

Для рівняння високого порядку з домінуючою мішаною похідною розглянуто задачу типу Гурса без умов узгодження. Введено поняття фундаментального розв'язку, на основі якого одержано зображення розв'язку розглядуваної задачі.

Введение. В области $G = \{(t,x)\colon t_0 < t < t_1, x_0 < x < x_1\}$ рассмотрим уравнение

$$(l_{nm}u) \equiv D_t^n D_x^m u + \sum_{\substack{i+j<n+m\\ 0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} a_{ij}(t,x) D_t^i D_x^j u = \varphi_{nm}(t,x). \tag{1}$$

Заметим, что частные случаи уравнения (1) встречаются при исследовании процессов сорбции, сушки [1], поглощения почвенной влаги растениями [2], продольных волн в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции [3], при изучении распространения волн в диспергирующих средах [4] и т. д.

Уравнение (1) и его частные случаи с достаточно гладкими коэффициентами изучены для задачи Гурса в случае, когда условия задаются на характеристиках, пересекающихся в точке (t_0, x_0), т. е. задаются в виде

$$D_t^i u|_{t=t_0} = \varphi_{i0}(x), \qquad x \in (x_0, x_1), \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

$$D_x^j u|_{x=x_0} = \psi_{0j}(t), \qquad t \in (t_0, t_1), \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{3}$$

причем выполняются условия согласования

$$D_t^i \psi_{0j}|_{t=t_0} = D_x^j \varphi_{i0}|_{x=x_0}, \qquad j = \overline{0, m-1}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{4}$$

В работах [5 – 8] решение этой задачи построено с помощью функции Римана, которая вводится как решение некоторой специальной задачи Гурса.

Данная работа посвящена исследованию уравнения (1) в случае негладких коэффициентов и при условиях типа Гурса, для которых выполнение условий согласования не требуется. Введено понятие фундаментального решения, и с его помощью получено представление решения поставленной задачи.

1. Постановка задачи. Для уравнения (1) рассмотрим начальные

$$(l_{i0}u)(x) \equiv D_t^i u(t_0, x) = \varphi_{i0}(x), \qquad x \in (x_0, x_1), \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{5}$$

и граничные

$$(l_{nj}u)(t) \equiv D_t^n D_x^j u(t, x_0) = \varphi_{nj}(t), \qquad t \in (t_0, t_1), \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{6}$$

условия. Здесь $u(t,x)$ — искомая функция, $D_s^k = \dfrac{\partial^k}{\partial s^k}$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева, $a_{ij}(t,x)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $i+j<n+m$, — измеримые на G функции, удовлетворяющие условиям $a_{ij}(t,x)\in L_p(G)$, $i=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,m-1}$, $a_{nj}(t,x)\in \in L^{t,x}_{\infty,p}(G)$, $j=\overline{0,m-1}$, $a_{im}(t,x)\in L^{t,x}_{p,\infty}(G)$, $i=\overline{0,n-1}$; $\varphi_{i0}(x)\in W_p^{(m)}(x_0,x_1)$, $i=\overline{0,n-1}$, и $\varphi_{nj}(t)\in L_p(t_0,t_1)$ — заданные функции, где $W_p^{(m)}(x_0,x_1)$ — пространство измеримых функций $\varphi(x)$, имеющих в смысле С.Л.Соболева производные $D_x^1\varphi(x),\ldots,D_x^m\varphi(x)\in L_p(x_0,x_1)$. Решение задачи (1), (5), (6) будем искать в пространстве С. Л. Соболева

$$W_p^{(n,m)}(G)=\left\{u\in L_p(G)/D_t^iD_x^ju\in L_p(G), i=\overline{0,n}, j=\overline{0,m}\right\}$$

с доминирующей смешанной производной $D_t^nD_x^mu$ и нормой

$$\|u\|_{W_p^{(n,m)}(G)}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left\|D_t^iD_x^ju\right\|_{L_p(G)}.$$

Прежде всего заметим, что функция $u\in W_p^{(n,m)}(G)$, удовлетворяющая условиям типа Гурса вида (5), (6), удовлетворяет и условиям (2), (3), если в условиях (3) функции $\psi_{0j}(t)$ выбрать в виде

$$\psi_{0j}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^k}{k!}D_x^j\varphi_{k0}(x_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{nj}(\tau)d\tau,\qquad j=\overline{0,m-1}.$$

Отметим, что имеет место и обратное утверждение, т. е. если функция $u\in W_p^{(n,m)}(G)$ удовлетворяет условиям (2), (3), где $\varphi_{i0}\in W_p^{(m)}(x_0,x_1)$ и $\psi_{0j}\in W_p^{(n)}(t_0,t_1)$, то она удовлетворяет также условиям (5), (6) при $\varphi_{nj}(t)=D_t^n\psi_{0j}(t)$. Таким образом, в пространстве $W_p^{n,m)}(G)$ условия типа Гурса вида (5), (6) эквивалентны условиям Гурса классического вида (2), (3). Однако в случае условий Гурса (2), (3) правые части краевых условий должны подчиняться также условиям согласования (4). В случае же условий типа Гурса вида (5), (6) для правых частей краевых условий никакие дополнительные условия типа согласования не требуются. Поэтому задача типа Гурса вида (1), (5), (6) по постановке является более естественной, чем задача Гурса классического вида (1) – (3).

2. Сведение задачи (1), (5), (6) к операторному уравнению. Задачу (1), (5), (6) запишем в операторном виде

$$lu=\varphi, \tag{7}$$

где

$$l=\left(l_{nm},\ l_{i0},\ i=\overline{0,n-1},\ l_{nj}, j=\overline{0,m-1}\ \right): W_p^{(n,m)}(G)\to H_p^{(n,m)},$$

$$\varphi=\left(\varphi_{nm}(t,x),\ \varphi_{i0}(x),\ i=\overline{0,n-1},\ \varphi_{nj}(t),\ j=\overline{0,m-1}\ \right)\in H_p^{(n,m)},$$

$$H_p^{(n,m)}=L_p(G)\times\prod_{i=0}^{n-1}W_p^{(m)}(x_0,x_1)\times\prod_{j=0}^{m-1}L_p(t_0,t_1).$$

Норму в пространстве $H_p^{(n,m)}$ определим естественным образом с помощью равенства

$$\|\varphi\|_{H_p^{(n,m)}} = \|\varphi_{nm}\|_{L_p(G)} + \sum_{i=0}^{n-1} \|\varphi_{i0}\|_{W_p^{(m)}(x_0,x_1)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_{nj}\|_{L_p(t_0,t_1)}.$$

Отметим, что при наложенных условиях на коэффициенты $a_{ij}(t,x)$ оператор $l\colon W_p^{(n,m)}(G) \to$ $\to H_p^{(n,m)}$ линеен и ограничен.

Задачу (1), (5), (6) будем исследовать с помощью интегрального представления из [9] специального вида для функции $u \in W_p^{(n,m)}(G)$:

$$u(t,x) = (Qb)(t,x) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} b_{i0}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} b_{nj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} b_{nm}(\tau,s) d\tau ds \tag{8}$$

с помощью элемента $b = \left(b_{nm}(t,x), b_{i0}(x), i = \overline{0,n-1}, b_{nj}(t), j = \overline{0,m-1}\ \right) \in H_p^{(n,m)}$.

Из формулы (8) следует, что любая функция $u \in W_p^{(n,m)}(G)$ имеет следы $D_t^i u(t_0,x)$, $i = \overline{0,n-1}$, $D_t^n D_x^j u(t,x_0)$, $j = \overline{0,m-1}$, и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(n,m)}(G)$ в $W_p^{(m)}(x_0,x_1), L_p(t_0,t_1)$ соответственно. Для этих следов справедливы также равенства $D_t^i u(t_0,x) = b_{i0}(x)$, $i = \overline{0,n-1}$, $D_t^n D_x^j u(t,x_0) = b_{nj}(t)$, $j = \overline{0,m-1}$.

Используя представление (8), уравнение (1) можно записать в виде

$$(Ab_{nm})(t,x) \equiv b_{nm}(t,x) + A_1 b_{nm}(t,x) \equiv b_{nm}(t,x) + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_0}^{t} a_{im}(t,x) \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} b_{nm}(\tau,x) d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_0}^{x} a_{nj}(t,x) \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(t,s) ds +$$

$$+ \sum_{\substack{i<n \\ j<m}} \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} a_{ij}(t,x) \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} b_{nm}(\tau,s) d\tau\, ds = \Phi(t,x), \tag{9}$$

где

$$\Phi(t,x) = \varphi_{nm}(t,x) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} a_{im}(t,x) \frac{(t-t_0)^{k-i}}{(k-i)!} D_x^m b_{k0}(x) -$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=j}^{m-1} a_{nj}(t,x) \frac{(x-x_0)^{l-j}}{(l-j)!} b_{nl}(t) -$$

$$-\sum_{\substack{i<n\\ j<m}} a_{ij}(t,x)\left(\sum_{k=i}^{n-1}\frac{(t-t_0)^{k-i}}{(k-i)!}D_x^j b_{k0}(x)+\sum_{l=j}^{m-1}\frac{(x-x_0)^{l-j}}{(l-j)!}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}b_{nl}(\tau)d\tau\right).$$

Оператор A_1 в уравнении (9) линеен, вольтерров и из условий, наложенных на коэффициенты $a_{ij}(t,x)$, следует, что он является ограниченным вольтерровым оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1\le p\le\infty$. Поэтому уравнение (9) для любой правой части $\Phi\in L_p(G)$ имеет единственное решение $b_{nm}\in L_p(G)$, $1\le p\le\infty$, и для этого решения справедлива оценка $\|b_{nm}\|_{L_p(G)}\le M\|\Phi\|_{L_p(G)}$, где M — постоянная, не зависящая от Φ.

Если $b_{nm}\in L_p(G)$ является решением уравнения (9), то решение задачи (1), (5), (6) можно представить в виде

$$u(t,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)^i}{i!}\varphi_{i0}(x)+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(x-x_0)^j}{j!}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi_{nj}(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}b_{nm}(\tau,s)d\tau ds.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор l задачи* (1), (2), (5) *является гомеоморфизмом из $W_p^{(n,m)}$ на $H_p^{(n,m)}$.*

3. Сопряженный оператор. Теперь рассмотрим вопрос о построении сопряженного оператора A^* для оператора A определяемого равенством (9). Поскольку оператор A действует в пространстве $L_p(G)$ и ограничен, он имеет сопряженный оператор A^*, который действует в пространстве $L_p^*(G)$ и ограничен. Для нахождения явного вида оператора A^* используем произвольную функцию $f\in L_q(G)$, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, и рассмотрим функционал

$$F(Ab_{nm})=\iint\limits_G (Ab_{nm})(t,x)f(t,x)dtdx. \tag{10}$$

Используя выражение оператора A в (9) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$F(Ab_{nm})\equiv\iint\limits_G b_{nm}(\tau,s)\left\{f(\tau,s)+\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\tau}^{t_1}a_{im}(t,s)\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}f(t,s)dt+\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{s}^{x_1}a_{nj}(\tau,x)\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}f(\tau,x)dx+$$

$$\left.+\sum_{\substack{i<n\\ j<m}}\int\limits_{\tau}^{t_1}\int\limits_{s}^{x_1}a_{ij}(t,x)\frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}f(t,x)dx\,dt\right\}d\tau\,ds. \tag{11}$$

Из (11) следует, что оператор A имеет сопряженный оператор $A^*\colon L_q(G) \to L_q(G)$ вида $A^* = I + A_1^*$, где I — единичный оператор, а

$$(A_1^* f)(\tau, s) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\tau}^{t_1} a_{im}(t,s) \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} f(t,s)dt+$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \int_{s}^{x_1} a_{nj}(\tau,x) \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} f(\tau,x)dx+$$

$$+ \sum_{\substack{i<n\\ j<m}} \int_{\tau}^{t_1} \int_{s}^{x_1} a_{ij}(t,x) \frac{(t-\tau)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \frac{(x-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} f(t,x)dt\,dx. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$f + A_1^* f = g, \tag{13}$$

где $g \in L_q(G)$ — заданная, а $f \in L_q(G)$ — искомая функция. В дальнейшем уравнение (13) назовем сопряженным уравнением для задачи (1), (5), (6).

Очевидно, что A_1^* является двумерным интегральным оператором, который вольтерров относительно точки $(t_1,\, x_1)$. Поэтому оператор $A^* = I + A_1^*$ имеет ограниченный обратный $K = (I + A_1^*)^{-1}$, действующий в $L_q(G)$. Этот факт можно получить также непосредственно из факта существования ограниченного обратного оператора $B = (I + A_1)^{-1}$, действующего в $L_p(G)$. Очевидно, что $K = B^*$. Следовательно, справедливо утверждение: сопряженное интегральное уравнение (13) для любого $g \in L_q(G)$ имеет единственное решение $f \in L_q(G)$ и для некоторого $M_1 > 0$ выполняется оценка

$$\|f\|_{L_q(G)} \le M_1 \|g\|_{L_q(G)}. \tag{14}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор $A^*\colon L_q(G) \to L_q(G)$ уравнения (13) является гомеоморфизмом.*

4. Интегральное представление решения основной задачи. Функцию $u \in W_p^{(n,m)}(G)$, удовлетворяющую условиям (5), (6), запишем в виде

$$u(t,x) = (B_1 u)(t,x) + (B_2 u)(t,x), \tag{15}$$

где

$$(B_1 u)(t,x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^i}{i!} \varphi_{i0}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{nj}(\tau)d\tau, \tag{16}$$

$$(B_2 u)(t,x) = \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!} b_{nm}(\tau,s)d\tau ds. \tag{17}$$

Используя формулу (15), для $u \in W_p^{(n,m)}(G),\ f \in L_p(G)$ имеем

$$\iint\limits_G (l_{nm}u)(t,x)f(t,x)dtdx = \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(t,x)f(t,x)dtdx + \iint\limits_G (l_{nm}B_2u)(t,x)f(t,x)dtdx.$$

Отсюда после некоторых преобразований получаем

$$\iint\limits_G (l_{nm}u)(t,x)f(t,x)dtdx = \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(t,x)f(t,x)dtdx + \iint\limits_G (Ab_{nm})(t,x)f(t,x)dtdx, \tag{18}$$

где A определяется равенством (9) и $b_{nm} = D_t^n D_x^m u$. Поскольку оператор A имеет сопряженный оператор A^*, из (18) следует, что для любого $u \in W_p^{(n,m)}(G),\ f \in L_q(G)$

$$\iint\limits_G (l_{nm}u)(t,x)f(t,x)dtdx = \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(t,x)f(t,x)dtdx + \iint\limits_G b_{nm}(t,x)(A^*f)(t,x)dtdx =$$

$$= \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(t,x)f(t,x)dtdx + \iint\limits_G D_t^n D_x^m u(t,x)(A^*f)(t,x)dtdx. \tag{19}$$

Теперь для каждой фиксированной точки $(t,x) \in G$ рассмотрим уравнение

$$(A^*f)(\tau,s) = \theta(t-\tau)\theta(x-s)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad (\tau,s) \in G. \tag{20}$$

Уравнение (20) можно рассматривать как частный случай сопряженного уравнения (13). Поэтому по теореме 2 уравнение (20) для любой точки $(t,x) \in G$ имеет единственное решение $f(\tau,s) = f(\tau,s;t,x) \in L_q(G)$.

Определение. *Если уравнение* (20) *для любой заданной точки* $(t,x) \in G$ *имеет хотя бы одно решение* $f(\tau,s) = f(\tau,s;t,x) \in L_q(G)$, *то это решение назовем фундаментальным решением задачи* (1), (5), (6).

Теорема 3. *Пусть* $f(\tau,s;t,x)$ — *фундаментальное решение задачи* (1), (5), (6). *Тогда любое решение этой задачи можно представить в виде*

$$u(t,x) = (B_1u)(t,x) + \iint\limits_G \varphi_{nm}(\tau,s)f(\tau,s;t,x)d\tau ds -$$

$$- \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(\tau,s)f(\tau,s;t,x)d\tau ds, \tag{21}$$

где $(B_1u)(t,x)$ *определяется равенством* (16).

Доказательство. Пусть функция $u \in W_p^{(n,m)}(G)$ — решение задачи (1), (5), (6), а функция $f \in L_q(G)$ — решение уравнения (20). Тогда равенство (19) можно записать в виде

$$\iint\limits_G \varphi_{nm}(\tau,s)f(\tau,s;t,x)d\tau ds = \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(\tau,s)f(\tau,s;t,x)d\tau ds +$$

$$+\iint\limits_G D_t^n D_x^m u(\tau,s)\theta(t-\tau)\theta(x-s)\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}d\tau ds, \tag{22}$$

где точка $(t,x)\in G$ рассматривается как параметр.

Используя интегральное представление (8) для функций $u\in W_p^{(n,m)}(G)$, из (22) получаем формулу

$$\iint\limits_G \varphi_{nm}(\tau,s)f(\tau,s;t,x)d\tau ds = \iint\limits_G (l_{nm}B_1u)(\tau,s)f(\tau,s;t,x)d\tau ds + u(t,x)-(B_1u)(t,x),$$

что и подтверждает справедливость формулы (21).

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
3. *Березанский Ю. М.* О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 363 – 372.
4. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. – М.: Наука, 1979.
5. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. Equat. – 1972. – **12**, № 3. – P. 559 – 565.
6. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. – С. 689 – 699.
7. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 3. – С. 547 – 552.
8. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. – 1999. – **10**. – С. 73 – 76.
9. *Никольский С. М.* Об устойчивых граничных значениях дифференцируемой функции многих переменных // Мат. сб. – 1963. – **(63)103**, № 2. – С. 224 – 252.

Получено 05.08.11