УДК 517.95

М. І. Іванчов (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка),
Н. В. Пабирівська (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

We establish conditions for the existence and uniqueness of a smooth solution to an inverse problem for a two-dimensional diffusion equation with unknown time-dependent leading coefficient in a free-boundary domain. The equation of the free boundary is given by the product of a known function depending on the space variables and an unknown time-dependent function.

Установлены условия существования и единственности гладкого решения обратной задачи в области со свободной границей для двумерного уравнения диффузии с неизвестным зависящим от времени старшим коэффициентом. Уравнение неизвестной границы задается произведением известной функции пространственных переменных и неизвестной функции, зависящей от времени.

Математичними моделями багатьох процесів є задачі з вільними межами для рівнянь параболічного типу [1]. В одновимірному випадку, коли рівняння невідомої межі визначається функцією, залежною тільки від часу, такі задачі достатньо повно досліджені із застосуванням різноманітних методів як для лінійних, так і квазілінійних рівнянь параболічного типу (див., наприклад, [2 – 7]). В областях з вільними межами було розглянуто також обернені задачі для одно- та двовимірних параболічних рівнянь, що містять невідомі коефіцієнти, залежні від часу [8 – 16]. Зокрема, у праці [13] досліджено обернену задачу для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(t)\Delta u + f(x_1, x_2, t)$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$ у двовимірній області вигляду $0 < x_1 < l(t)$, $0 < x_2 < h(t)$, де функції $l = l(t)$, $h = h(t)$ є невідомими. В аналогічній області було встановлено умови існування та єдиності розв’язку оберненої задачі для параболічного рівняння

$$u_t = a_1(t)u_{x_1x_1} + a_2(t)u_{x_2x_2} + b(x_1, x_2, t)u_{x_1} + c(x_1, x_2, t)u_{x_2} + d(x_1, x_2, t)u + f(x_1, x_2, t)$$

з невідомими коефіцієнтами $a_1(t)$, $a_2(t)$ [14]. Також вивчалась [15] обернена задача для рівняння теплопровідності з невідомим старшим коефіцієнтом у двовимірній області, заданій умовами $l_1(t) < x_1 < l_2(t), h_1(t) < x_2 < h_2(t)$, де $l_k(t)$, $h_k(t)$, $k = 1, 2$, є невідомими.

У даній роботі розглянуто обернену задачу для рівняння дифузії в двовимірній області загального вигляду з невідомою рухомою межею. Рух межі описується невідомою функцією, залежною від часу. Такий підхід може моделювати процеси, в яких головним питанням є динаміка процесу, що властиво задачам медицини, екології та ін.

1. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T = \big\{(r, \varphi, t)\colon 0 \le r < h(t)g(\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 < t < T\big\}$ з вільною межею, розташування якої залежить від невідомої функції $h = h(t) > 0$, $0 \le t \le T$, розглянемо задачу знаходження функцій $\big(h(t), a(t), u(r, \varphi, t)\big)$ з класу $C^1[0, T] \times C[0, T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T]$, які задовольняють рівняння дифузії

$$u_t = a(t)\Delta u + f(r, \varphi, t), \tag{1}$$

початкову і крайову умови

$$u\big|_{t=0}= u_0(r,\varphi), \qquad (r,\varphi)\in \overline{D}=\big\{(r,\varphi)\colon 0\le r\le h(0)g(\varphi), 0\le\varphi\le 2\pi\big\}, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial D_t\times[0,T]}= \mu(r,\varphi,t), \quad (r,\varphi)\in\partial D_t, t\in[0,T], \tag{3}$$

де $D_\tau=\overline{Q}_T\cap\{t=\tau\}$, $0\le\tau\le T$, та умови перевизначення

$$\iint\limits_{D_t} u(r,\varphi,t)r dr\, d\varphi=\kappa_1(t), \quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$-a(t)\int\limits_{\partial D_t}\frac{\partial u(r,\varphi,t)}{\partial\nu}d\gamma=\kappa_2(t), \quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

в яких ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої ∂D_t, $d\gamma$ — елемент дуги кривої ∂D_t.

Будемо припускати, що виконуються такі умови:

(A_1) $u_0\in C^2([0,\infty)\times[0,2\pi])$, $\mu\in C^{2,1}([0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,T])$, $\kappa_1\in C^1[0,T]$, $\kappa_2\in C[0,T]$, $f\in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,T])$, $g\in C^1[0,2\pi]$;

(A_2) $u_0(r,\varphi)\ge M_0>0$, $(r,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]$, $\mu(r,\varphi,t)>0$, $(r,\varphi,t)\in[0,\infty)\times\times[0,2\pi]\times[0,T]$, $h(0)=h_0>0$, де h_0 — задане число, $\kappa_i(t)>0$, $i=1,2$, $t\in[0,T]$, $\int_0^{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\big(u_0(h(0)g(\varphi),\varphi\big)g(\varphi)d\varphi<0$;

(A_3) умови узгодження нульового порядку [16, с. 363] $u_0(h(0)g(\varphi),\varphi)=\mu\big(h(0)g(\varphi),\varphi,0\big)$, $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{h(0)g(\varphi)}u_0(r,\varphi)r\,dr=\kappa_1(0)$.

Зауважимо, що означення просторів $C^{2,l}(Q_T)$ та $C^{1,0}(Q_T)$ дано в [16, с.17].

2. Зведення задачі (1) – (5) до системи рівнянь. Заміною $\rho=\dfrac{r}{h(t)}$, $\varphi=\varphi$, $t=t$ задачу (1) – (5) зведемо до задачі у відомій фіксованій області:

$$v_t=\frac{a(t)}{h^2(t)}\Delta v+\frac{\rho h'(t)}{h(t)}v_\rho+f(\rho h(t),\varphi,t), \quad (\rho,\varphi,t)\in D_0\times(0,T), \tag{6}$$

$$v\big|_{t=0}= u_0(\rho h(0),\varphi), \quad (\rho,\varphi)\in\overline{D}_0, \tag{7}$$

$$v\big|_{\partial D_0\times[0,T]}= \mu(\rho h(t),\varphi,t), \quad (\rho,\varphi,t)\in\partial D_0\times[0,T], \tag{8}$$

$$h^2(t)\iint\limits_{D_0} v(\rho,\varphi,t)\rho\, d\rho\, d\varphi=\kappa_1(t), \quad t\in[0,T], \tag{9}$$

$$-a(t)h(t)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial v(g(\varphi),\varphi,t)}{\partial\nu}g(\varphi)d\varphi=\kappa_2(t), \quad t\in[0,T], \tag{10}$$

де $D_0:=\big\{(\rho,\varphi,t)\colon 0\le\rho<g(\varphi), 0\le\varphi\le 2\pi, 0<t<T\big\}$, $v\left(\dfrac{r}{h(t)},\varphi,t\right)=u(r,\varphi,t)$.

За допомогою заміни

$$v = w + u_0\big(\rho h(0), \varphi\big) + \mu\big(\rho h(t), \varphi, t\big) - \mu\big(\rho h(0), \varphi, 0\big)$$

задачу (6) – (8) зведемо до задачі з нульовими початковою та крайовою умовами:

$$w_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}\Delta w + \frac{\rho h'(t)}{h(t)} w_\rho + f(\rho h(t), \varphi, t) - \mu_t(\rho h(t), \varphi, t) - \mu_r\big(\rho h(t), \varphi, t\big)\rho h'(t) +$$

$$+\frac{a(t)}{h^2(t)}\Delta\Big(u_0\big(\rho h(0), \varphi\big) + \mu\big(\rho h(t), \varphi, t\big) - \mu\big(\rho h(0), \varphi, 0\big)\Big) + \frac{\rho h'(t)}{h(t)}\big(h(0)u_{0r}(\rho h(0), \varphi) +$$

$$+h(t)\mu_r\big(\rho h(t), \varphi, t\big) - h(0)\mu_r\big(\rho h(0), \varphi, 0)\big), \quad (\rho, \varphi, t) \in D_0 \times (0, T), \tag{11}$$

$$w\big|_{t=0} = 0, \quad (r, \varphi) \in \overline{D}_0, \tag{12}$$

$$w\big|_{\partial D_0 \times [0,T]} = 0, \quad (r, \varphi, t) \in \partial D_0 \times [0, T]. \tag{13}$$

Задача (11) – (13) еквівалентна рівнянню

$$w(\rho, \varphi, t) = \int\limits_0^t \iint\limits_{D_0} G(\rho, \varphi, t, s, \psi, \tau)\left(\frac{sh'(\tau)}{h(\tau)} w_s(s, \psi, \tau) + f\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) - \mu_\tau\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) -\right.$$

$$-sh'(\tau)\mu_r\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) + \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\Delta\Big(u_0\big(sh(0), \psi\big) + \mu\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) - \mu\big(sh(0), \psi, 0\big)\Big) +$$

$$\left.+\frac{sh'(\tau)}{h(\tau)}\big(h(0)u_{0_r}\big(sh(0), \psi\big) + h(\tau)\mu_r\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) - h(0)\mu_r\big(sh(0), \psi, 0)\big)\right) ds\, d\psi\, d\tau, \tag{14}$$

$$(\rho, \varphi, t) \in \overline{D}_0 \times [0, T],$$

де $G = G(\rho, \varphi, t, s, \psi, \tau)$ — функція Гріна для рівняння

$$w_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}\Delta w \tag{15}$$

з умовами (12), (13). Повертаючись до функції v, маємо

$$v(\rho, \varphi, t) = u_0(\rho h(0), \varphi) + \mu(\rho h(t), \varphi, t) - \mu(\rho h(0), \varphi, 0) + \int\limits_0^t \iint\limits_{D_0} G(\rho, \varphi, t, s, \psi, \tau)\times$$

$$\times\left(\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\Delta\big(u_0(sh(0), \psi\big) + \mu\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) - \mu\big(sh(0), \psi, 0)\big) + \frac{sh'(\tau)}{h(\tau)} v_s(s, \psi, \tau) +\right.$$

$$\left.+f\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) - \mu_\tau\big(sh(\tau), \psi, \tau\big) - sh'(\tau)\mu_r\big(sh(\tau), \psi, \tau\big)\right) ds\, d\psi\, d\tau, \tag{16}$$

$$(\rho,\varphi,t)\in\overline{D}_0\times[0,T].$$

Позначаючи $v_1(\rho,\varphi,t):=v_\rho(\rho,\varphi,t)$ та $h_1(t):=h'(t)$, пряму задачу (6) – (8) зводимо до системи інтегральних рівнянь

$$v(\rho,\varphi,t)=u_0\big(\rho h(0),\varphi\big)+\mu\big(\rho h(t),\varphi,t\big)-\mu\big(\rho h(0),\varphi,0\big)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_{D_0}G(\rho,\varphi,t,s,\psi,\tau)\left(\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\Delta\Big(u_0\big(sh(0),\psi\big)+\mu\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-\mu\big(sh(0),\psi,0\big)\Big)+\right.$$

$$\left.+\frac{sh_1(\tau)}{h(\tau)}v_1(s,\psi,\tau)+f\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-\mu_\tau\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-sh_1(\tau)\mu_r\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)\right)ds\,d\psi\,d\tau,\quad(17)$$

$$v_1(\rho,\varphi,t)=h(0)u_{0_r}\big(\rho h(0),\varphi\big)+h(t)\mu_r\big(\rho h(t),\varphi,t\big)-h(0)\mu_r\big(\rho h(0),\varphi,0\big)+$$

$$+\int\limits_0^t\iint\limits_{D_0}G_\rho(\rho,\varphi,t,s,\psi,\tau)\left(\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\Delta\Big(u_0\big(sh(0),\psi\big)+\mu\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-\mu\big(sh(0),\psi,0\big)\Big)+\right.$$

$$\left.+\frac{sh_1(\tau)}{h(\tau)}v_1(s,\psi,\tau)+f\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-\mu_\tau\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-sh_1(\tau)\mu_r\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)\right)ds\,d\psi\,d\tau,\quad(18)$$

$$(\rho,\varphi,t)\in\overline{D}_0\times[0,T].$$

Оскільки з умови (A_2) випливає, що $u_0\big(\rho h(0),\varphi\big)\geq M_0>0$, $(\rho,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]$, а інші доданки в (16) дорівнюють нулю при $t=0$, то існує таке число T_1, $0<T_1\leq T$, що виконується оцінка

$$\left|\mu\big(\rho h(t),\varphi,t\big)-\mu\big(\rho h(0),\varphi,0\big)+\int\limits_0^t\iint\limits_{D_0}G(\rho,\varphi,t,s,\psi,\tau)\left(\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\Delta\big(u_0(sh(0),\psi)+\right.\right.$$

$$+\mu\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-\mu\big(sh(0),\psi,0)\big)+\frac{sh_1(\tau)}{h(\tau)}v_1(s,\psi,\tau)+f\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-$$

$$\left.\left.-\mu_\tau\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)-sh_1(\tau)\mu_r\big(sh(\tau),\psi,\tau\big)\right)ds\,d\psi\,d\tau\right|\leq\frac{M_0}{2},\quad(19)$$

$$(\rho,\varphi,t)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,T_1].$$

Тоді

$$v(\rho,\varphi,t)\geq\frac{M_0}{2}>0,\quad(\rho,\varphi,t)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,T_1],\quad(20)$$

і з умови (9) отримуємо

$$h(t) = \frac{\kappa_1^{1/2}(t)}{\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{g(\varphi)} v(\rho,\varphi,t)\rho d\rho\right)^{1/2}}, \quad t \in [0, T_1]. \tag{21}$$

Здиференціюємо умову (9) і використаємо рівняння (6). Після нескладних обчислень отримаємо рівняння відносно $h_1(t)$:

$$h_1(t) = \frac{\kappa_1'(t) + \kappa_2(t) - h^2(t) \iint_{D_0} f(\rho h(t), \varphi, t)\rho \, d\rho \, d\varphi}{h(t) \int_0^{2\pi} g^2(\varphi)\mu(g(\varphi)h(t), \varphi, t) d\varphi}, \quad t \in [0, T]. \tag{22}$$

Якщо з формули (16) знайти похідну $-\dfrac{\partial v(g(\varphi), \varphi, t)}{\partial \nu}$, то перший доданок у ній за припущенням (A_2) буде дорівнювати деякому додатному числу M_1, а всі інші дорівнюватимуть нулю при $t = 0$. Це означає, що існує таке значення T_2, $0 < T_2 \le T$, що при $t \in [0, T_2]$ виконується нерівність

$$-\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial v(g(\varphi), \varphi, t)}{\partial \nu} g(\varphi) d\varphi \ge \frac{M_1}{2} > 0, \quad t \in [0, T_2]. \tag{23}$$

Тоді з умови (10) одержуємо рівняння

$$a(t) = -\kappa_2(t) \left(h(t) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial v(g(\varphi), \varphi, t)}{\partial \nu} g(\varphi) d\varphi \right)^{-1}, \quad t \in [0, T_2]. \tag{24}$$

Позначимо $T_3 = \min\{T_1, T_2\}$. Розглядаючи рівняння (17), (18), (21), (22), (24) на звуженому часовому проміжку $[0, T_3]$, отримуємо систему рівнянь, до якої зводиться задача (6)–(10). Еквівалентність задачі знаходження розв'язку $(h, a, v) \in C_1[0, T_3] \times C[0, T_3] \times C^{2,1}\big(D_0 \times \times (0, T_3)\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{D}_0 \times [0, T_3]\big)$, який задовольняє умови (6)–(10), та задачі знаходження неперервного розв'язку (v, v_1, h, h_1, a) системи рівнянь (17), (18), (21), (22), (24) легко встановити повторенням міркувань, наведених у [14].

3. Існування розв'язку системи (17), (18), (21), (22), (24).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (A_1)–(A_3). *Тоді можна вказати таке значення* T_0, $0 < T_0 \le T$, *що задача* (1)–(5) *має принаймні один розв'язок* $\big(a(t), h(t), u(r, \varphi, t)\big)$ *з класу* $C[0, T_0] \times C^1[0, T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ *такий, що* $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T_0]$.

Доведення. Очевидно, що достатньо довести існування неперервного розв'язку системи рівнянь (17), (18), (21), (22), (24). Застосуємо до системи (17), (18), (21), (22), (24) теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (17), (18), (21), (22), (24) .

Беручи до уваги (19), з рівняння (17) отримуємо

$$v(\rho, \varphi, t) \le \max_{\overline{D}_0} u_0(h_0 \rho \varphi) + \frac{M_0}{2} := M_2 < \infty, \quad (\rho, \varphi, t) \in \overline{D}_0 \times [0, T_3]. \tag{25}$$

Тоді, враховуючи (20), з (21) знаходимо

$$0 < H_0 \le h(t) \le H_1 < \infty, \quad t \in [0, T_3]. \tag{26}$$

З (24) з урахуванням (23) отримуємо

$$a(t) \le A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_3]. \tag{27}$$

Використовуючи (25) у (22), оцінюємо $h_1(t)$:

$$|h_1(t)| \le H_2 < \infty, \quad t \in [0, T_3]. \tag{28}$$

Позначимо $V(t) := \max_{(\rho,\varphi)\in\overline{D}_0} \left|v_1(\rho,\varphi,t)\right|$. З рівняння (18) знаходимо

$$V(t) \le C_1 + C_2 \max_{(\rho,\varphi)\in\overline{D}_0} \int\limits_0^t \iint\limits_{D_0} \left|G_\rho(\rho,\varphi,t,s,\psi,\tau)\right| \big(1 + V(\tau)\big) ds\, d\psi\, d\tau, \quad t \in [0, T_3]. \tag{29}$$

Використаємо оцінки перших похідних функції Гріна [16, с. 469]. Оскільки, з одного боку, заміною часової змінної $\sigma = \theta(t)$, де $\theta(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} d\tau$, рівняння (15) зводиться до вигляду

$$\tilde{w}_\sigma = \Delta \tilde{w},$$

а з іншого — справджуються оцінки (25), (27), оцінки перших похідних функції Гріна $G(x_1, x_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння (15) набирають вигляду

$$\left|G_{x_i}(x_1,x_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\right| \le \frac{C_3}{\big(\theta_0(t)-\theta_0(\tau)\big)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}{C_4(\theta_0(t)-\theta_0(\tau))}\right), \quad i = 1, 2,$$

де $\theta_0(t) := \displaystyle\int_0^t a(\tau) d\tau$. Застосовуючи їх до (29), приходимо до нерівності

$$V(t) \le C_1 + C_5 \int\limits_0^t \frac{\big(1 + V(\tau)\big) d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}, \quad t \in [0, T_3]. \tag{30}$$

Позначимо $W(t) := V(t) + 1$ і запишемо нерівність (30) у вигляді

$$W(t) \le C_6 + C_5 \int\limits_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}. \tag{31}$$

Беручи до уваги нерівність

$$a(t) \ge \frac{C_7}{V(t)} \ge \frac{C_7}{W(t)},$$

яку отримуємо з (24), надаємо (31) вигляду

$$W(t) \le C_6 + C_8 \int\limits_0^t \frac{a(\tau) W^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta_0(t) - \theta_0(\tau)}}, \quad t \in [0, T_3]. \tag{32}$$

Піднесемо обидві частини нерівності (32) до квадрату і застосуємо нерівності Коші та Буняковського – Коші:

$$W^2(t) \leq C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)W^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}. \tag{33}$$

Внаслідок оцінки (27) отримуємо

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}} \leq 2\sqrt{\theta_0(t)} \leq C_{11},$$

і нерівність (33) набирає вигляду

$$W^2(t) \leq C_9 + C_{12} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)W^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}, \quad t \in [0, T_3]. \tag{34}$$

Покладемо в (34) $t = \sigma$, домножимо на $\dfrac{a(\sigma)}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}}$ і зінтегруємо по σ від 0 до t :

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)W^2(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}} \leq C_{12} + C_{11} \int\limits_0^t \frac{a(\sigma))d\sigma}{\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\sigma)}} \int\limits_0^\sigma \frac{a(\tau)W^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau)}}. \tag{35}$$

Змінюючи порядок інтегрування і беручи до уваги рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta_0(t)-\theta_0(\sigma))(\theta_0(\sigma)-\theta_0(\tau))}} = \pi,$$

з (32) отримуємо нерівність

$$W(t) \leq C_{14} + C_{15} \int\limits_0^t W^4(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T_3]. \tag{36}$$

У статті [14] показано, що існує число T_0, $0 < T_0 \leq T_3$, яке визначається сталими C_{14}, C_{15}, таке, що правильною є оцінка

$$W(t) \leq M_3 < \infty, \quad t \in [0, T_0], \tag{37}$$

де стала M_3 визначається числами C_{14}, C_{15}. Тоді з (24) маємо

$$a(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, T_0]. \tag{38}$$

Отже, оцінки розв'язків системи рівнянь (17), (18), (21), (22), (24) встановлено.

Розглянемо множину $\mathcal{N} := \Big\{(v, v_1, h, h_1, a) \in \big(C(\overline{D}_0 \times [0, T_0])\big)^2 \times \big(C[0, T_0]\big)^3 \colon M_0/2 \leq$ $\leq v(\rho, \varphi, t) \leq M_2, |w(\rho, \varphi, t)| \leq M_3, H_0 \leq h(t) \leq H_1, \big|h_1(t)\big| \leq H_2, A_0 \leq a(t) \leq A_1\Big\}$. Систему рівнянь (17), (18), (21), (22), (24) подамо у вигляді рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{39}$$

в якому $\omega = (v, v_1, h, h_1, a)$, а оператор $P = (P_1, P_2 P_3, P_4, P_5)$ визначається правими частинами рівнянь (17), (18), (21), (22), (24). З оцінок (20), (25) – (28), (37), (38) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ у себе. Те, що інтегральний оператор P є цілком неперервним на $\mathcal{N}$, встановлюється аналогічно до [18]. Застосовуючи до рівняння (38) теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, отримуємо існування неперервного розв'язку рівняння (38), а отже, існування розв'язку $\big(h(t), a(t), u(r, \varphi, t)\big)$ задачі (1) – (5) із класу $C^1\big([0, T_0]\big) \times C\big([0, T_0]\big) \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$.

Теорему доведено.

4. Єдиність розв'язку.

Теорема 2. *Нехай, крім умови* (A_1), *виконується умова*:

(A_4) $\kappa_i(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$, $h(0) = h_0$.

Тоді задача (1) – (5) *не може мати більше одного розв'язку* $\big(h(t), a(t), u(r, \varphi, t)\big)$ *з класу* $C^1\big([0, T]\big) \times C\big([0, T]\big) \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ *такого, що* $a(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Доведення. Очевидно, що досить довести єдиність розв'язку задачі (6) – (9). Припустимо, що задача (6) – (9) має два різних розв'язки $\big(h_k(t), a_k(t), v_k(\rho, \varphi, t)\big)$, $k = 1, 2$. Позначимо $H(t) := h_1(t) - h_2(t)$, $H_1(t) := h_1'(t) - h_2'(t)$, $A(t) := a_1(t) - a_2(t)$, $V(\rho, \varphi, t) := v_1(\rho, \varphi, t) - v_2(\rho, \varphi, t)$. З (6) – (10) отримуємо

$$V_t = \frac{a_1(t)}{h_1^2(t)} \Delta V + \frac{\rho h_1'(t)}{h_1(t)} V_\rho + f\big(\rho h_1(t), \varphi, t\big) - f\big(\rho h_2(t), \varphi, t\big) +$$

$$+ \left(\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)} - \frac{a_2(t)}{h_2^2(t)}\right) \Delta v_2 + \left(\frac{\rho h_1'(t)}{h_1(t)} - \frac{\rho h_2'(t)}{h_2(t)}\right) \rho v_{2_\rho}, \quad (\rho, \varphi, t) \in D_0 \times (0, T), \tag{40}$$

$$V\big|_{t=0} = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \overline{D}_0, \tag{41}$$

$$V\big|_{\partial D_0 \times [0,T]} = \mu(\rho h_1(t), \varphi, t) - \mu(\rho h_2(t), \varphi, t), \quad (\rho, \varphi, t) \in \partial D_0 \times [0, T], \tag{42}$$

$$h_1^2(t) \iint\limits_{D_0} V(\rho, \varphi, t) \rho d\rho\, d\varphi = -(h_1(t) + h_2(t)) H(t) \iint\limits_{D_0} v_2(\rho, \varphi, t) \rho d\rho\, d\varphi, \quad t \in [0, T], \tag{43}$$

$$-a_1(t) h_1(t) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial V\big(g(\varphi), \varphi, t\big)}{\partial \nu} g(\varphi) d\varphi =$$

$$= \big(a_2(t) h_2(t) - a_1(t) h_1(t)\big) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial v_2(g(\varphi), \varphi, t)}{\partial \nu} g(\varphi) d\varphi, \quad t \in [0, T]. \tag{44}$$

Заміною

$$V(\rho, \varphi, t) = W(\rho, \varphi, t) + \mu(\rho h_1(t), \varphi, t) - \mu(\rho h_2(t), \varphi, t)$$

зведемо задачу (40) – (42) до задачі з нульовими крайовою та початковою умовами:

$$W_t=\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}\Delta W+\frac{\rho h_1'(t)}{h_1(t)}W_\rho+f(\rho h_1(t),\varphi,t)-f(\rho h_2(t),\varphi,t)+\left(\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}-\frac{a_2(t)}{h_2^2(t)}\right)\Delta v_2+$$

$$+\left(\frac{\rho h_1'(t)}{h_1(t)}-\frac{\rho h_2'(t)}{h_2(t)}\right)\rho v_{2_\rho}-\mu_t(\rho h_1(t),\varphi,t)+\mu_t(\rho h_2(t),\varphi,t)-\rho h_1'(t)\mu_r(\rho h_1(t),\varphi,t)+$$

$$+\rho h_2'(t)\mu_r(\rho h_2(t),\varphi,t)+\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}\Delta(\mu(\rho h_1(t),\varphi,t)-\mu(\rho h_2(t),\varphi,t))+$$

$$+\frac{\rho h_1'(t)}{h_1(t)}\Big(h_1(t)\mu_r\big(\rho h_1(t),\varphi,t\big)-h_2(t)\mu_r\big(\rho h_2(t),\varphi,t\big)\Big),\quad (\rho,\varphi,t)\in D_0\times(0,T), \tag{45}$$

$$W\big|_{t=0}=0,\quad (\rho,\varphi)\in\overline{D}_0, \tag{46}$$

$$W\big|_{\partial D_0\times[0,T]}=0,\quad (\rho,\varphi,t)\in\partial D_0\times[0,T]. \tag{47}$$

Знайшовши розв'язок задачі (45) – (47) за допомогою функції Гріна $\tilde{G}(\rho,\varphi,t,s,\psi,\tau)$ задачі (46), (47) для рівняння

$$W_t=\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}\Delta W+\frac{\rho h_1'(t)}{h_1(t)}W_\rho$$

та повернувшись до функції V, матимемо розв'язок задачі (40) – (42) у вигляді

$$V(\rho,\varphi,t)=\mu(\rho h_1(t),\varphi,t)-\mu(\rho h_2(t),\varphi,t)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_{D_0}\tilde{G}(\rho,\varphi,t,s,\psi,\tau)\Bigg(f(sh_1(\tau),\psi,\tau)-f(sh_2(\tau),\psi,\tau)+$$

$$+\left(\frac{a_1(\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a_2(\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)\Delta v_2(s,\psi,\tau)+\left(\frac{sh_1'(\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{sh_2'(\tau)}{h_2(\tau)}\right)sv_{2_s}(s,\psi,\tau)-$$

$$-\mu_\tau(sh_1(\tau),\psi,\tau)+\mu_\tau\big(sh_2(\tau),\psi,\tau\big)-sh_1'(\tau)\mu_r\big(sh_1(\tau),\psi,\tau\big)+$$

$$+sh_2'(\tau)\mu_r(sh_2(\tau),\psi,\tau)+\frac{a_1(\tau)}{h_1^2(\tau)}\Delta\Big(\mu\big(sh_1(\tau),\psi,\tau\big)-\mu\big(sh_2(\tau),\psi,\tau\big)\Big)+$$

$$+\frac{sh_1'(\tau)}{h_1(\tau)}\big(h_1(\tau)\mu_r(sh_1(\tau),\psi,\tau)-h_2(\tau)\mu_r\big(sh_2(\tau),\psi,\tau\big)\Bigg)ds\,d\psi\,d\tau,\quad (\rho,\varphi,t)\in\overline{D}_0\times[0,T]. \tag{48}$$

Беручи до уваги те, що функція v_2 задовольняє умови (9), (10), з (43), (44) отримуємо

$$H(t)=-\frac{h_1^2(t)h_2^2(t)}{\kappa_1(t)\big(h_1(t)+h_2(t)\big)}\iint\limits_{D_0}V(\rho,\varphi,t)\rho d\rho\,d\varphi,\quad t\in[0,T], \tag{49}$$

$$A(t) = \frac{a_2(t)h_2(t)}{\kappa_2(t)h_1(t)}\bigg(-\frac{\kappa_2(t)}{h_2(t)}H(t) + a_1(t)h_1(t)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial V(g(\varphi),\varphi,t)}{\partial\nu}g(\varphi)d\varphi\bigg), \quad t\in[0,T]. \qquad (50)$$

Оскільки для розв'язків задачі (6) – (10) справджується рівність (22), для $H_1(t)$ отримуємо рівняння

$$H_1(t) = \Bigg[\big(\kappa_1'(t)+\kappa_2(t)\big)\Bigg(H(t)\iint\limits_{D_0} f(\rho h_1(t),\varphi,t)\rho\, d\rho\, d\varphi\ +$$

$$+\ h_2(t)\iint\limits_{D_0}(f(\rho h_1(t),\varphi,t) - f(\rho h_2(t),\varphi,t))\rho\, d\rho\, d\varphi\Bigg) +$$

$$+h_1(t)h_2(t)\Bigg(H(t)\iint\limits_{D_0} f\big(\rho h_2(t),\varphi,t\big)\rho\, d\rho\, d\varphi\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi)\mu\big(g(\varphi)h_1(t),\varphi,t\big)d\varphi -$$

$$-h_1(t)\iint\limits_{D_0}\Big(f\big(\rho h_1(t),\varphi,t\big) - f\big(\rho h_2(t),\varphi,t\big)\Big)\rho\, d\rho\, d\varphi\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi)\mu\big(g(\varphi)h_1(t),\varphi,t\big)d\varphi +$$

$$+h_1(t)\iint\limits_{D_0} f\big(\rho h_1(t),\varphi,t\big)\rho\, d\rho\, d\varphi\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi)(\mu\big(g(\varphi)h_1(t),\varphi,t\big) -$$

$$-\ \mu\big(g(\varphi)h_2(t),\varphi,t)\big)d\varphi\Bigg)\Bigg]\Bigg(h_1(t)h_2(t)\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi)\mu\big(g(\varphi)h_1(t),\varphi,t\big)d\varphi\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi} g^2(\varphi)\mu\big(g(\varphi)h_2(t),\varphi,t\big)d\varphi\Bigg)^{-1}, \quad t\in[0,T]. \qquad (51)$$

У формулі (48) використаємо зображення різниці значень неперервно диференційовної функції f:

$$f(x) - f(y) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} f\big(y+\sigma(x-y)\big)d\sigma = (x-y)\int\limits_0^1 f'(z)|_{z=y+\sigma(x-y)}d\sigma.$$

Підставляючи після цього (48) в (49) та (50), замінюючи в (50) і (51) значення функції $H(t)$ з формули (49), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з інтегровними ядрами. З властивостей цих рівнянь випливає, що $H(t)\equiv 0$, $H_1(t)\equiv 0$, $A(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$. Використовуючи це у формулі (48), отримуємо $V(\rho,\varphi,t)\equiv 0$, $(\rho,\varphi,t)\in\overline{D}_0\times[0,T]$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що аналогічно можна дослідити і n-вимірний випадок $(n\geq 3)$.

1. *Friedman A.* Free boundary problems in science and technology // Notic. Amer. Math. Soc. – 2000. – **47**, № 8. – P. 854 – 861.
2. *Тахиров Ж. О., Рузиев Ш. Н.* Нелокальная задача Стефана // Узбек. мат. журн. – 1994. – № 3. – С. 93 – 100.
3. *Kunisch K., Murphy K., Peichl G.* Estimation of the conductivity in one-phase Stefan problem: basic results // Boll. Unione mat. ital. B. – 1995. – **9**, № 1. – P. 77 – 103.
4. *Рузиев Ш. Н.* Задача со свободной границей и с нелокальными краевыми условиями на известной части границы // Узбек. мат. журн. – 1995. – **3**. – С. 91 – 96.
5. *El Badia A., Moutazaim F.* A one-phase inverse Stefan problem // Inverse Problems. – 1999. – **15**. – P. 1507 – 1522.
6. *Іванчов М. І.* Редукція задачі з вільною межею для параболічного рівняння до оберненої задачі // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – Вып. 12. – С. 73 – 83.
7. *Ivanchov M. I.* Free boundary problem for nonlinear diffusion equation // Мат. студ. – 2003. – **19**, № 2. – С. 156 – 164.
8. *Іванчов М. І.* Задача з вільною межею для рівняння дифузії у прямокутнику // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 67 – 75.
9. *Иванчов Н. И.* Обратная задача теплопроводности со свободной границей // Обратные задачи и информ. технологии. – 2002. – **1**, № 2. – С. 69 – 81.
10. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901 – 910.
11. *Баранська І. Є.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 32 – 42.
12. *Баранська І. Є.* Обернена задача з вільною межею для параболічного рівняння // Мат. студ. – 2007. – **27**, № 1. – С. 85 – 94.
13. *Баранська І. Є., Іванчов М. І.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільною межею // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 457 – 484.
14. *Баранська І. Є.* Обернена задача в області з вільною межею для анізотропного рівняння параболічного типу // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 13 – 28.
15. *Баранська І. Є.* Обернена задача з вільною межею для двовимірного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 17 – 28.
16. *Снітко Г. А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 37 – 47.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
18. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Math. Stud. Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p. – **10**.
19. *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. – М.: Наука, 1968. – 428 с.

Одержано 18.06.12,
після доопрацювання — 11.03.13