УДК 515.173.2, 517.54, 517.572

Є. О. Полулях (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДЕРЕВА ЯК МНОЖИНИ РІВНЯ ПСЕВДОГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ПЛОЩИНІ *

Let T be a tree, finite or infinite. Let V_0 be the set of all vertices of T of degree 1. We propose a sufficient condition for the image of an imbedding $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ to be a level set of a pseudoharmonic function.

Предложено достаточное условие для того, чтобы образ вложения $\Psi\colon T\setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$, где T — дерево, конечное или бесконечное, V_0 — множество его вершин валентности 1, был множеством уровня псевдогармонической функции.

1. Означення і формулювання результатів. Нехай $T = (V, E)$ — дерево (можливо, нескінченне) з множиною вершин V і множиною ребер E.

Валентністю вершини далі будемо називати кількість ребер, інцидентних даній вершині. Будемо вважати, що ця величина для кожної вершини є скінченною. Позначимо через V_0 множину всіх вершин T валентності 1.

Шляхом, що з'єднує вершини v', $v'' \in V$, називається скінченна послідовність ребер $e_k = (v_{k-1}, v_k)$, $k = 1, \ldots, n$, така, що $v' = v_0$, $v'' = v_n$ і $e_k \neq e_l$ при $k \neq l$. Шлях називається *простим*, якщо $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Означення 1. *Множину $A \in \mathbb{Z}$ будемо називати допустимим діапазоном, якщо вона має один із наступних альтернативних видів*:

$A = \mathbb{Z}$;

$A = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, m \leq k \leq M\}$ *для деяких* m, $M \in \mathbb{Z}$, $m \leq M$;

$A = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq M\}$ *для деякого* $M \in \mathbb{Z}$;

$A = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, m \leq k\}$ *для деякого* $m \in \mathbb{Z}$.

Ланцюжком називається послідовність ребер $\{e_k = (v_{k-1}, v_k)\}_{k \in A}$, *яка відповідає наступним вимогам*:

множина індексів A є допустимим діапазоном;

$e_k \neq e_l$ *при* $k \neq l$, $k, l \in A$.

Ланцюжок називається простим, якщо $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Ланцюжок називається максимальним, якщо одночасно виконуються співвідношення

$$((k-1 \notin A) \wedge (k \in A)) \Rightarrow (v_{k-1} \in V_0),$$

$$((k \in A) \wedge (k+1 \notin A)) \Rightarrow (v_k \in V_0),$$

тобто „перша" і „остання" вершини ланцюжка (*коли вони є*) *мають валентність* 1.

Співставимо дереву T топологічний простір $\hat{T}$ за допомогою наступної процедури.

Візьмемо диз'юнктне об'єднання одиничних відрізків $\hat{T}_0 = \bigsqcup_{e \in E} I_e$, індексоване множиною ребер дерева T. Для кожного $e = (v', v'') \in E$ кінцям відрізка I_e співставимо вершини v' і v'' дерева T, які є кінцями ребра e. Зафіксуємо також гомеоморфізм $\varphi_e\colon [0, 1] \to I_e$.

* Виконано при частковій підтримці гранта М/522-2011 Держінформнауки України і гранта Ф40.1/009 Державного фонду фундаментальних досліджень України.

Розглянемо на просторі $\hat{T}_0$ розбиття $\mathfrak{f}$, елементами якого є:

одноточкові множини — внутрішні точки відрізків I_e, $e \in E$;

для кожної вершини $v \in V$ множина кінців відрізків I_e, $e \in E$, які відповідають вершині v.

Позначимо через $\hat{T} = \hat{T}_0/\mathfrak{f}$ фактор-простір простору $\hat{T}$ по розбиттю $\mathfrak{f}$. Нехай $\mathrm{pr}\colon \hat{T}_0 \to \hat{T}$ — відображення проекції.

Далі ми не будемо розрізняти дерево T і його „топологічний носій" $\hat{T}$, оскільки простір $\hat{T}$ успадковує комбінаторні властивості дерева T. Наприклад, „вершинами" в $\hat{T}$ є точки — проекції елементів розбиття $\mathfrak{f}$, що відповідають вершинам T. „Ребрами" (замкненими) є проекції множин I_e, $e \in E$. Кажучи, що точка w дерева T належить ребру e, будемо мати на увазі, що точка w простору $\hat{T}$ належить множині $\mathrm{pr}(I_e)$.

Нехай S^2 — двовимірна сфера. Зафіксуємо точку $s \in S^2$, наприклад її північний полюс.

Означення 2. *Неперервне відображення $\Phi\colon T \to S^2$ називається плоским, якщо воно відповідає наступним властивостям*:

(i) $\Phi^{-1}(s) = V_0$;

(ii) *множина $\Phi(T) \cup \{s\}$ замкнена в S^2*;

(iii) *відображення $\Phi|_{T\setminus V_0}\colon T \setminus V_0 \to S^2$ є гомеоморфізмом на свій образ.*

Означення 3. *Неперервне відображення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ називається плоским, якщо існують такі плоске відображення $\Phi\colon T \to S^2$ і гомеоморфізм $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$, що*

$$\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T\setminus V_0}.$$

***Зауваження* 1.** Для пояснення властивості (ii) в означенні 2 зазначимо, що у випадку нескінченного дерева T можлива ситуація, коли $V_0 = \varnothing$.

***Зауваження* 2.** Якщо відображення $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ є плоским, а $\Theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — гомеоморфізм, то і відображення $\Theta \circ \Psi$ є плоским, тому що $\Theta \circ \Psi = (\psi \circ \Theta^{-1})^{-1} \circ \Phi|_{T\setminus V_0}$ і $\psi \circ \Theta^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$ — гомеоморфізм (тут Φ і ψ — відображення з означення 3).

Означення 4 [1, 2]**.** *Функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається псевдогармонічною в точці $z \in \mathbb{R}^2$, якщо існують відкритий окіл U_z цієї точки і гомеоморфізм $\varphi\colon U_z \to \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ такі, що $\varphi(z) = 0$ і функція $f \circ \varphi^{-1}$ гармонічна і не є константою.*

Функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається псевдогармонічною, якщо вона псевдогармонічна в кожній точці $z \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 1. *Припустимо, що валентність кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим ніж 2.*

Нехай $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ — плоске відображення.

Тоді існує псевдогармонічна функція $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $\Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

Насамкінець наведемо кілька означень, які будуть потрібні далі.

Означення 5 [3]**.** *Покриття Γ топологічного простору X називається фундаментальним, якщо довільна множина, перетин якої з кожною множиною $B \in \Gamma$ є відкритим у B, сама є відкритою в X.*

Відомо [3], що *всі відкриті покриття, а також всі скінченні і локально скінченні замкнені покриття є фундаментальними.*

Далі ми будемо позначати через $\overline{A}$ і $\operatorname{Fr} A$ відповідно замикання і межу множини A.

Нехай W — область на площині $\mathbb{R}^2$ або на двовимірній сфері S^2. Позначимо $I = [0, 1]$.

Означення 6 [4]. *Проста неперервна крива $\eta\colon I \to \overline{W}$ називається надрізом області W, якщо $\eta(0) \in \operatorname{Fr} W$ і $\eta(t) \in W$ при $t > 0$.*

Точка $z \in \operatorname{Fr} W$ називається досяжною з W, якщо існує надріз η області W такий, що $\eta(0) = z$.

Проста неперервна крива $\nu\colon I \to \overline{W}$ називається розрізом області W між точками $z_1, z_2 \in \in \operatorname{Fr} W$, якщо $\nu(0) = z_1$, $\nu(1) = z_2$, $\nu(t) \in W$ при $t \in (0, 1)$.

2. Доведення теореми 1. ***2.1. Деякі властивості графів.*** Наведемо кілька відомих фактів із теорії графів (див. [5, 6]), які будуть потрібні далі.

Твердження 1. *Нехай Γ — скінченний граф.*

Тоді кількість вершин Γ, які мають непарну валентність, є парним числом.

Наслідок **1.** *Нехай Γ — скінченний граф, валентність кожної вершини якого або дорівнює 1, або є парним числом.*

Тоді множина V_0 вершин Γ валентності 1 має парне число елементів.

Нехай T — дерево (скінченне або нескінченне).

Твердження 2. *Якщо скінченне дерево T невироджене $(E \neq \varnothing)$, то множина V_0 вершин валентності 1 містить принаймні два елементи.*

Твердження 3. *Нехай v — вершина дерева T валентності n, а T' — граф, отриманий з T вилученням вершини $v \in V$ і всіх ребер $e_1, \ldots, e_n \in E$, що є суміжними для цієї вершини.*

Тоді T' є незв'язною сумою n дерев $T_1, \ldots, T_n$, до того ж дерево T_i містить вершину дерева T, суміжну з ребром e_i, відмінну від v, $i = 1, \ldots, n$.

Перейдемо до дослідження деяких властивостей топологічного простору $\hat{T}$. Ми домовилися (див. вище) не розрізняти T і $\hat{T}$, тому далі будемо говорити про топологічні властивості дерева T.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ зафіксовано. Розглянемо наступну конструкцію.

Позначимо через $\tilde{Q}_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} J_i$ незв'язне об'єднання n одиничних напівінтервалів. Зафіксуємо гомеоморфізми $h_i\colon [0, 1) \to J_i$, $i = 1, \ldots, n$. Нехай $R_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_i(0)$.

Розглянемо розбиття $\mathfrak{h}$ простору $\tilde{Q}_n$ на одноточкові множини $\{x\}$, $x \notin R_n$, і множину R_n. Нехай $Q_n = \tilde{Q}_n/\mathfrak{h} = \tilde{Q}_n/R_n$ — фактор-простір $\tilde{Q}_n$ по розбиттю $\mathfrak{h}$ (див. рис. 1). Позначимо через $\operatorname{pr}_n\colon \tilde{Q}_n \to Q_n$ відображення проекції. Позначимо також $q_n = \operatorname{pr}_n(R_n)$.

Твердження 4. *Для кожної вершини $v \in T$ валентності $n \in \mathbb{N}$ існують її відкритий окіл $U_v \subset T$, який лежить в об'єднанні її суміжних ребер, а також вкладення $i_v\colon Q_n \to T$, для якого $i_v(Q_n) = U_v$, $i_v(q_n) = v$.*

Для кожної точки $w \in T \setminus V$ існує її відкритий окіл U_w в T, який лежить на тому ж ребрі T, що й w, і гомеоморфний відкритому інтервалу.

Доведення. 1. Нехай вершина $v \in T$ має валентність $n \in \mathbb{N}$, а $e_1, \ldots, e_n \in E$ — всі ребра, інцидентні v.

Позначимо (див. вище) $I_k = I_{e_k}$, $\varphi_k = \varphi_{e_k}\colon [0, 1] \to I_k$, $k = 1, \ldots, n$. Для простоти будемо вважати, що вершині v відповідає $\varphi_k(0)$ для кожного k.

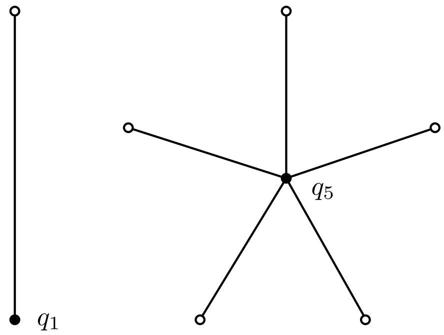

Рис. 1. Приклад: простори Q_1 і Q_5.

Визначимо $\tilde{i}_v\colon \tilde{Q}_n \to \hat{T}_0$ таким чином:

$$\tilde{i}_v|_{J_k} = \varphi_k \circ h_k^{-1}\colon J_k \to I_k, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Зрозуміло, що відображення $\tilde{i}_v$ є неперервним, $\tilde{i}_v(R_n) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \varphi_k(0)$ — повний прообраз вершини v відносно проекції $\mathrm{pr}\colon \hat{T}_0 \to T$, а всі точки множини $\tilde{Q}_n \setminus R_n$ відображаються під дією $\tilde{i}_v$ у внутрішні точки відрізків $I_1, \ldots, I_n$. Тому $\tilde{i}_v$ відображає елементи розбиття $\mathfrak{h}$ на елементи розбиття $\mathfrak{f}$ простору $\hat{T}_0$ і визначено неперервне фактор-відображення $i_v = \mathrm{fact}\,\tilde{i}_v\colon Q_n \to T$ (таке, що $\mathrm{pr} \circ \tilde{i}_v = i_v \circ \mathrm{pr}_n$), до того ж $i_v(q_n) = v$, а також $i_v(Q_n) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{pr}\,(I_k) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{e_k}$.

Ін'єктивність i_v випливає з ін'єктивності обмеження $\tilde{i}_v|_{\tilde{Q}_n \setminus R_n}$.

За означенням множина

$$\tilde{U}_v = \bigsqcup_{k=1}^{n} I_k \setminus \varphi_k(1) = \bigsqcup_{k=1}^{n} \tilde{i}_v(J_k) = \tilde{i}_v(\tilde{Q}_n)$$

є насиченою відкритою множиною в $\hat{T}_0$, тому множина $U_v = i_v(Q_n) = \mathrm{pr}\,(\tilde{U}_v) \ni v$ є відкритим околом точки v в T.

Аналогічні міркування приводять до висновку, що $\tilde{i}_v$ відображає відкриті насичені множини на відкриті насичені множини, тому фактор-відображення i_v є відкритим.

Внаслідок викладеного відображення i_v є вкладенням, і першу частину твердження доведено.

2. Нехай $w \in T \setminus V$. Знайдеться $e \in E$, для якого $w \in \mathrm{pr}\,(I_e)$. Позначимо $\mathring{I} = (0,1)$, $\tilde{U}_w = \varphi_e(\mathring{I})$, $U_w = \mathrm{pr}\,(\tilde{U}_w)$.

Зазначимо, що множина $\tilde{U}_w$ є відкритою в $\hat{T}_0$ і насиченою (кожна точка цієї множини належить одноточковому елементу розбиття $\mathfrak{f}$ простору $\hat{T}_0$). Крім того, $\mathrm{pr}^{-1}(V) \cap I_e = I_e \setminus \tilde{U}_w = \{\varphi_e(0), \varphi_e(1)\}$. Тому $\varnothing \neq \mathrm{pr}^{-1}(w) \cap I_e = \mathrm{pr}^{-1}(w) \cap \tilde{U}_w$ і внаслідок насиченості множини $\tilde{U}_w$ виконується співвідношення $\mathrm{pr}^{-1}(w) \subset \tilde{U}_w$.

Отже, множина U_w є відкритим околом точки w, не перетинається з множиною вершин T, лежить на тому ж ребрі e, що і w. Крім того, відображення $\mathrm{pr}\,|_{\tilde{U}_w}\colon \tilde{U}_w \to U_w$ є бієктивним, його область визначення і множина значень є відкритими підмножинами відповідних просторів. Тому з означення відображення проекції випливає, що $\mathrm{pr}|_{\tilde{U}_w}$ — відкрите відображення. Отже, $\mathrm{pr} \circ \varphi_e|_{\mathring{I}}\colon \mathring{I} \to T$ гомеоморфно відображає відкритий інтервал $\mathring{I}$ на U_w.

Твердження 4 доведено.

2.2. Властивості плоских відображень дерев. Нехай $\Psi\colon T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ — плоске відображення дерева T, а $\Phi\colon T \to S^2$ і $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$ — відповідні відображення з означення 3.

Твердження 5. *Кожна компактна підмножина площини $\mathbb{R}^2$ перетинається лише з образом скінченного підграфа дерева T.*

Доведення. Згідно з означенням 2 маємо $\Phi(T\setminus V_0) \subset S^2\setminus\{s\}$. Тому визначено відображення

$$\Phi_0\colon T\setminus V_0 \to S^2\setminus\{s\},$$

$$\Phi_0\colon w \mapsto \Phi(w), \quad w \in T\setminus V_0\,.$$

Зрозуміло, що $\Psi = \psi^{-1}\circ\Phi|_{T\setminus V_0} = \psi^{-1}\circ\Phi_0$.

$S^2\setminus\{s\}$ є відкритою підмножиною сфери S^2, також за означенням 2 відображення $\Phi|_{T\setminus V_0}$ є гомеоморфізмом на свій образ. Тому відображення Φ_0, а разом з ним і відображення Ψ є вкладеннями простору $T\setminus V_0$ до просторів $S^2\setminus\{s\}$ і $\mathbb{R}^2$ відповідно.

За означенням множина $\Phi(T)\cup\{s\}$ замкнена в S^2. Тому $\Phi_0(T\setminus V_0) = \Phi(T\setminus V_0) = \Phi(T)\cap \cap S^2\setminus\{s\}$ і $\Psi(T\setminus V_0)$ є замкненими підмножинами просторів $S^2\setminus\{s\}$ і $\mathbb{R}^2$ відповідно.

Нехай $A\subset\mathbb{R}^2$ — деяка компактна множина. Тоді $A_0 = A\cap\Psi(T\setminus V_0)$ — компактна підмножина площини. Легким наслідком твердження 4 є хаусдорфовість простору T, тому образ $A_T = \Psi^{-1}(A_0)$ цієї множини під дією неперервного відображення $\Psi^{-1}\colon \Psi(T\setminus V_0)\to T$ є компактом.

Відкриті околи U_w, $w\in T$, з твердження 4 утворюють покриття простору T. Очевидно, кожна з множин U_w перетинається лише зі скінченним числом ребер графа T. Використавши компактність множини $A_T\subset T$, виберемо з цього покриття скінченне підпокриття цієї множини. Зрозуміло, що воно, а разом з ним і множина A_T будуть перетинатись лише зі скінченним підграфом T.

Отже, множина A перетинається лише з образом скінченного підграфа T.

Твердження 5 доведено.

Лема 1. *Нехай $w\in T\setminus V_0$. Знайдуться окіл U_w точки w, який відповідає твердженню* 4, *а також гомеоморфізм $\Theta\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, які задовольняють наступні умови*:

1а) $\Theta\circ\Psi(U_w) = \{t(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))\,|\, t\geq 0, k = 0,\ldots,n-1\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2 + + y^2 < 1\}$, *якщо $w\in V\setminus V_0$ — вершина валентності $n>1$*;

1б) $\Theta\circ\Psi(U_w) = (-1,1)\times\{0\}$, *якщо $w\in T\setminus V$*;

2) $\Theta\circ\Psi(T\setminus V_0)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2<1\} = \Theta\circ\Psi(U_w)$.

Доведення. 1а) Нехай $w\in V\setminus V_0$ — вершина валентності $n>1$.

Нехай $v_1,\ldots,v_n$ — всі вершини, суміжні з w, а $e_1 = (w,v_1),\ldots,e_n = (w,v_n)$ — всі ребра, інцидентні вершині w.

(i) Припустимо спочатку, що $v_k\notin V_0$, $k = 1,\ldots,n$.

Образи ребер e_k, $k = 1,\ldots,n$, під дією відображення Ψ є простими неперервними кривими, тому що Ψ є вкладенням $T\setminus V_0$ у площину (див. доведення твердження 5). Зафіксуємо параметризацію $\chi_k\colon[0,1]\to\Psi(e_k)$, $\chi_k(0) = \Psi(w)$, $\chi_k(1) = \Psi(v_k)$, кривої $\Psi(e_k)$ в $\mathbb{R}^2$, $k = 1,\ldots,n$.

Нехай ρ — стандартна метрика в $\mathbb{R}^2$,

$$d = \min_{k\in\{1,\ldots,n\}}\rho(\chi_k(0),\chi_k(1)) = \min_{k\in\{1,\ldots,n\}}\rho(\Psi(w),\Psi(v_k))\,.$$

Розглянемо коло $S = \{z\in\mathbb{R}^2\,|\,\rho(\Psi(w),z) = d/2\}$ радіуса $d/2$ з центром у точці $\Psi(w)$. Зрозуміло, що всі $\Psi(v_k)$ лежать за межами S, тому для кожного $k = 1,\ldots,n$ існує єдине значення параметра $\tau_k = \min\{t\,|\,\chi_k(t)\in S\}\in(0,1)$, при якому відбувається перша зустріч кривої χ_k з колом S. За означенням $\chi_k(t) \in \{z \in \mathbb{R}^2 \,|\, \rho(\Psi(w), z) < d/2\}$ при $t \in [0, \tau_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Не обмежуючи загальності міркувань, змінимо нумерацію вершин і ребер так, щоб при обході кола S в додатному напрямку ми проходили точки $\chi_1(\tau_1), \chi_2(\tau_2), \ldots, \chi_n(\tau_n)$ послідовно.

Позначимо $\alpha_k = \chi([0, \tau_k])$, $k = 1, \ldots, n$. Нехай β_k — сегмент кола S, який при обході кола в додатному напрямку з'єднує точку $\chi_k(\tau_k)$ з точкою $\chi_{i+1}(\tau_{i+1})$, $k = 1, \ldots, n-1$, а β_n — сегмент кола між точками $\chi_n(\tau_n)$ і $\chi_1(\tau_1)$.

Розглянемо коло $S_0 = \{z \in \mathbb{R}^2 \,|\, \rho(0, z) = 1\}$. Позначимо

$$r_k = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \in S_0, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Розглянемо набір відрізків $\hat{\alpha}_k = \{r_k t \,|\, t \in [0, 1]\}$, $k = 1, \ldots, n$, які з'єднують початок координат з точками $r_1, \ldots, r_n$. Нехай $\hat{\beta}_k = \{(\cos(2\pi t/n), \sin(2\pi t/n)) \,|\, t \in [k, k+1]\}$, $k = 1, \ldots, n$.

При обході кола S_0 в додатному напрямку ми проходимо точки $r_1, \ldots, r_n$ в тому ж порядку, що й точки $\chi_1(\tau_1), \chi_2(\tau_2), \ldots, \chi_n(\tau_n)$ при обході кола S в додатному напрямку. Тому існує гомеоморфізм $\mu_0 \colon S \to S_0$ такий, що $\mu_0(\chi_k(\tau_k)) = r_k$, $\mu_0(\beta_k) = \hat{\beta}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Зафіксуємо гомеоморфізми відрізків $\mu_k \colon \alpha_k \to \hat{\alpha}_k$ такі, що $\mu_k(\Psi(w)) = 0$, $\mu_k(\chi_k(\tau_k)) = r_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Позначимо $C = S \cup \bigcup_{k=1}^n \alpha_k$, $C_0 = S_0 \cup \bigcup_{k=1}^n \hat{\alpha}_k$.

Легко бачити, що коректно визначено відображення $\mu \colon C \to C_0$,

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_0(z), & \text{якщо} \quad z \in S, \\ \mu_k(z), & \text{якщо} \quad z \in \alpha_k, \quad k = 1, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Компактні підмножини S, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ утворюють фундаментальне покриття простору C (див. [3]), і обмеження μ на кожну з цих множин є неперервним, тому і відображення μ є неперервним. Крім того, як легко бачити, μ є бієктивним відображенням компакта C на C_0. На підставі викладеного робимо висновок, що μ є гомеоморфізмом.

Позначимо $\gamma_n = \alpha_n \cup \alpha_1 \cup \beta_n$, $\gamma_k = \alpha_k \cup \alpha_{k+1} \cup \beta_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Безпосередньо перевіряється, що всі γ_k є жордановими кривими. Нехай D_k — замкнений диск, обмежений кривою γ_k, а також $\mathring{D}_k = D_k \setminus \gamma_k$, $k = 1, \ldots, n$.

З того, що перетин $\gamma_k \cap \gamma_m$ є зв'язною множиною при всіх $k \neq m$, $k, m \in \{1, \ldots, n\}$, випливає, що $\mathring{D}_k \cap \mathring{D}_m = \varnothing$ при $k \neq m$. Також $\mathring{D}_k \cap C = \varnothing$, $k = 1, \ldots, n$, внаслідок попереднього спостереження і того, що $C = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k = \bigcup_{k=1}^n \operatorname{Fr} \mathring{D}_k$.

Позначимо $\hat{\gamma}_n = \hat{\alpha}_n \cup \hat{\alpha}_1 \cup \hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_k = \hat{\alpha}_k \cup \hat{\alpha}_{k+1} \cup \hat{\beta}_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Очевидно, всі $\hat{\gamma}_k$ є жордановими кривими. Нехай $D_{0,k}$ — замкнений диск, обмежений кривою $\hat{\gamma}_k$, а $\mathring{D}_{0,k} = D_{0,k} \setminus \hat{\gamma}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Зрозуміло, що $\mathring{D}_{0,k} \cap \mathring{D}_{0,m} = \varnothing$ при $k \neq m$, а також $\mathring{D}_{0,k} \cap C = \varnothing$, $k = 1, \ldots, n$.

Відомо [4], що гомеоморфізм $\mu|_{\gamma_k} \colon \gamma_k \to \hat{\gamma}_k$, $k = 1, \ldots, n$, простих замкнених кривих можна продовжити до гомеоморфізму дисків $\theta_k \colon D_k \to D_{0,k}$, $k = 1, \ldots, n$, обмежених даними кривими.

Позначимо через D (відповідно D_0) замкнений диск, обмежений колом S (відповідно S_0).

Елементарно перевіряється, що $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$, $D_0 = \bigcup_{k=1}^n D_{0,k}$, і коректно визначено бієктивне відображення $\theta_0 \colon D \to D_0$, $\theta_0(z) = \theta_k(z)$, якщо $z \in D_k$ (рис. 2).

Компактні підмножини $D_1, \ldots, D_n$ утворюють фундаментальне покриття простору D (див. [3]), і обмеження θ_0 на кожну з цих множин неперервне за побудовою, тому і відображен-

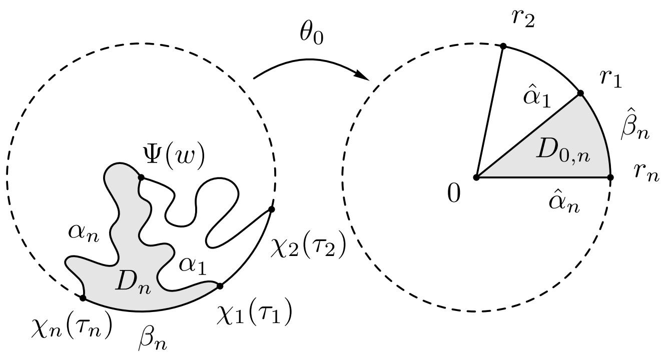

Рис. 2. Відображення θ_0.

ня θ_0 є неперервним. Крім того, з бієктивності неперервного відображення θ_0 компакта D на D_0 випливає, що θ_0 є гомеоморфізмом.

Відома теорема про продовження (див. [4]) стверджує, що гомеоморфізм двох жорданових кривих на площині можна продовжити до гомеоморфізму площини на себе. На підставі цієї теореми знайдемо гомеоморфізм $\tilde{\theta}_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $\tilde{\theta}_1|_S = \theta_0|_S = \mu_0 \colon S \to S_0$. Позначимо через θ_1 обмеження $\tilde{\theta}_1$ на множину $D' = \{z \,|\, \rho(z, \Psi(w)) \geq d/2\}$ — замикання зовнішності кривої S.

Зрозуміло, що коректно визначено бієктивне відображення $\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\theta(z) = \begin{cases} \theta_0(z), & \text{якщо} \quad z \in D, \\ \theta_1(z), & \text{якщо} \quad z \in D'. \end{cases}$$

Множини D і D' утворюють скінченне замкнене покриття простору $\mathbb{R}^2$, яке є фундаментальним, тому відображення θ є неперервним. Крім того, легко бачити, що обидва відображення θ_0 і θ_1 замкнені, внаслідок чого відображення θ також є замкненим. Тому обернене відображення θ^{-1} неперервне і θ є гомеоморфізмом.

Повторюючи з очевидними змінами міркування, використані при доведенні твердження 4, приходимо до висновку, що множина

$$U_{0,w} = \bigcup_{k=1}^{n} \Psi^{-1} \circ \chi_k\big([0, \tau_k)\big)$$

є відкритим околом вершини w в T, який належить до об'єднання суміжних ребер цієї вершини і гомеоморфний множині Q_n. Останнє твердження випливає з того, що за побудовою

$$\hat{Q}_n = \theta \circ \Psi(U_{0,w}) = \left(\bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \hat{\alpha}_k\right) \setminus S_0 = \bigcup\nolimits_{k=1}^{n} \{r_k t \,|\, t \in [0,1)\},$$

а ця множина очевидно гомеоморфна Q_n.

Розглянемо замкнену підмножину $X_w = T \setminus U_{0,w}$ дерева T. Зрозуміло, що множина $\tilde{X}_w = X_w \setminus V_0$ замкнена в $T \setminus V_0$, а її образ $Y_w = \theta \circ \Psi(\tilde{X}_w)$ замкнений в $\theta \circ \Psi(T \setminus V_0)$. Множина $\theta \circ \Psi(T \setminus V_0)$ є замкненою в $\mathbb{R}^2$, тому і $Y_w = (\theta \circ \Psi(T \setminus V_0)) \setminus \hat{Q}_n$ — замкнена підмножина площини.

Позначимо $\mathring{D}_a(0) = \{z \,|\, \rho(z, 0) < a\}$, $a > 0$. За побудовою $0 = \theta \circ \Psi(w) \notin Y_w$, тому існує $\delta > 0$, для якого $Y_w \cap \mathring{D}_\delta(0) = \varnothing$. Очевидно, можна вважати, що $\delta \leq 1$.

Позначимо $\hat{Q}_n(\delta) = \hat{Q}_n \cap D_\delta(0)$. За побудовою $0 = \theta \circ \Psi(w) \in \hat{Q}_n(\delta) = D_\delta(0) \cap \theta \circ \circ \Psi(T \setminus V_0) \subseteq \theta \circ \Psi(U_{0,w})$, Тому множина $U_w = (\theta \circ \Psi)^{-1}(\hat{Q}_n(\delta))$ лежить в об'єднанні ребер графа T, інцидентних вершині w.

Очевидно, $\hat{Q}_n(\delta)$ — відкрита підмножина $\theta \circ \Psi(T \setminus V_0)$, тому U_w є відкритою підмножиною простору $T \setminus V_0$, який сам є відкритим підпростором T. Отже, множина U_w є відкритим околом вершини w в T.

Нарешті, $\theta \circ \Psi$ гомеоморфно відображає простір $T \setminus V_0$ на свій образ (див. доведення твердження 5), тому підмножина U_w простору $\theta \circ \Psi(T \setminus V_0)$ гомеоморфна множині $\hat{Q}_n(\delta)$, а разом з нею і множині Q_n. Враховуючи те, що Q_n — відкрита підмножина простору $T \setminus V_0$, який у свою чергу є відкритим підпростором T, приходимо до висновку, що підпростір U_w простору T гомеоморфний Q_n.

Нехай $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(z) = z/\delta$, $\Theta = L \circ \theta$. Легко бачити, що окіл U_w вершини $w \in V \setminus V_0$ і гомеоморфізм Θ задовольняють умови леми.

(ii) Нехай тепер $w \in V \setminus V_0$, а суміжні вершини графа T відповідають таким умовам: $v_1, \ldots, v_m \in V_0$, $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V \setminus V_0$.

Розглянемо відрізки I_{e_k} з $\hat{T}_0$, які відповідають ребрам $e_k = (w, v_k)$ і параметризовані за допомогою гомеоморфізмів $\varphi_{e_k}\colon [0,1] \to I_{e_k}$, $k = 1, \ldots, m$. Для простоти можна вважати, що $w = \mathrm{pr} \circ \varphi_{e_k}(0)$, $v_k = \mathrm{pr} \circ \varphi_{e_k}(1)$, $k = 1, \ldots, m$.

Очевидно, $\mathrm{pr} \circ \varphi_{e_k}([0, 1/2]) \subset T \setminus V_0$. Тому відображення $\chi'_k\colon [0,1] \to \Psi \circ \mathrm{pr} \circ \varphi_{e_k}([0,1/2])$, $\chi'_k(t) = \Psi \circ \mathrm{pr} \circ \varphi_{e_k}(t/2)$, $t \in [0,1]$, є простою неперервною кривою для кожного $k = 1, \ldots, m$.

Розглядаючи замість вершин $v_k \in V_0$ точки $v'_k = \mathrm{pr} \circ \varphi_{e_k}(1/2) \in T \setminus V_0$, а також криві χ'_k, $k = 1, \ldots, m$, і повторюючи попередні міркування з очевидними змінами, знаходимо окіл U_w вершини $w \in V \setminus V_0$ і гомеоморфізм Θ, які задовольняють умови леми.

1б) Нехай точка $w \in T \setminus V$ лежить на ребрі e. Розглянемо відрізок I_e і його параметризацію $\varphi_e\colon [0,1] \to I_e$. За побудовою $(\mathrm{pr} \circ \varphi_e)^{-1}(V) = \{0, 1\}$, тому знайдуться $0 < t_1 < t_2 < 1$ такі, що $(\mathrm{pr} \circ \varphi_e)^{-1}(w) \in (t_1, t_2)$. Зрозуміло, що $\mathrm{pr} \circ \varphi_e([t_1, t_2]) \subset T \setminus V_0$, тому відображення $\chi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\chi(t) = \Psi \circ \mathrm{pr} \circ \varphi_e(t_2 t + t_1(1-t))$ є простою неперервною кривою. При цьому $\Psi(w) = \chi(t_0)$ для деякого $t_0 \in (0,1)$.

Відомо [4], що кожна проста дуга на площині є дугою деякої жорданової кривої. Зафіксуємо жорданову криву γ, дугою якої є χ. Нехай γ_0 — жорданова крива, що обмежує прямокутник $[-1,1] \times [0,1]$. Легко знайти гомеоморфізм $\eta\colon \gamma \to \gamma_0$ такий, що $\eta \circ \Psi(w) = 0$, $\eta \circ \chi([0,1]) = = [-1,1] \times \{0\}$.

Використаємо теорему про продовження (див. [4]) і продовжимо η до гомеоморфізму площини θ.

Множина $U_w = \mathrm{pr} \circ \varphi((t_1, t_2)) = \Psi^{-1}(\chi((0,1))) = (\theta \circ \Psi)^{-1}((-1,1) \times \{0\})$ відкрита в T і гомеоморфна інтервалу (див. доведення твердження 4).

Задовольнити умову 2 леми допомагають міркування, абсолютно аналогічні (з очевидними змінами) тим, які ми використали у випадку $w \in V \setminus V_0$.

Лему 1 доведено.

Твердження 6. *Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$.*

Якщо під дією Ψ образ деякої точки w ребра e, відмінної від вершини, належить $\mathrm{Fr}\, Q$, то образ його підмножини $e \setminus V_0$ міститься в $\mathrm{Fr}\, Q$.

Доведення. Нехай точка w належить ребру e дерева T. Позначимо $I = [0,1]$, $\mathring{I} = (0,1)$. Розглянемо відображення $\varphi_e\colon I \to I_e$ та $\hat{\varphi}_e = \mathrm{pr} \circ \varphi_e\colon I \to T$. За побудовою $\hat{\varphi}_e(I) \cap V =$

$= \{\hat{\varphi}_e(0), \hat{\varphi}_e(1)\}$. Тому з твердження 4 випливає, що „відкрите” ребро $\hat{\varphi}_e(\mathring{I})$ є зв’язним відкритим околом точки w в T.

Внаслідок леми 1 справедливим є наступне спостереження: *якщо* $\Psi(w') \in \operatorname{Fr} Q$ *для деякого* $w' \in T \setminus V$, *то існує окіл* $V' \ni w'$ *в* T, *для якого* $\Psi(V') \subset \operatorname{Fr} Q$; *у випадку* $\Psi(w'') \notin \operatorname{Fr} Q$, $w'' \in T \setminus V$, *знайдеться окіл* $V'' \ni w''$ *в* T *такий, що* $\Psi(V'') \cap \operatorname{Fr} Q = \varnothing$.

Позначимо $A = \{w' \in \hat{\varphi}_e(\mathring{I}) \,|\, \Psi(w') \in \operatorname{Fr} Q\}$, $B = \{w'' \in \hat{\varphi}_e(\mathring{I}) \,|\, \Psi(w'') \notin \operatorname{Fr} Q\}$. З попереднього спостереження випливає, що ці множини відкриті в T. Очевидно також, що $A \cap B = \varnothing$ і $A \cup B = \hat{\varphi}_e(\mathring{I})$. Множина $\hat{\varphi}_e(\mathring{I})$ зв’язна (вона є образом зв’язної множини $\mathring{I}$ під дією неперервного відображення), тому одна з множин A або B є порожньою. За вибором точки w маємо $B = \varnothing$. Отже, $\Psi \circ \hat{\varphi}_e(\mathring{I}) \in \operatorname{Fr} Q$ і $\Psi(e \setminus V_0) = \Psi(\hat{\varphi}_e(I) \setminus V_0) \subset \overline{\Psi \circ \hat{\varphi}_e(\mathring{I})} \subset$ $\subset \operatorname{Fr} Q$.

Твердження 6 доведено.

Твердження 7. *Нехай* Q — *компонента зв’язності множини* $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$, $v \in V \setminus V_0$, $\Psi(v) \in \operatorname{Fr} Q$. *Припустимо, що окіл* U_v *точки* v *і гомеоморфізм* $\Theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *відповідають лемі* 1.

Тоді рівно один із секторів, на які ділиться відкритий диск $\mathring{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ *множиною* $\Theta \circ \Psi(U_v)$, *лежить в* $\Theta(Q)$.

Доведення. Нехай валентність вершини v дорівнює $n > 1$. З урахуванням зауваження 2, не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що відображення Θ тотожне і множина

$$\Psi(U_v) = \{t\,(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \,|\, t \in [0,1),\ k = 0, \ldots, n-1\}$$

ділить диск $\mathring{D}_0$ на сектори, кожен з яких лежить в доповненні $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$. З умови $0 = \Psi(v) \in \operatorname{Fr} Q$ випливає, що принаймні один із цих секторів лежить в Q.

Нехай $e_k = (v, v_k)$ — ребро дерева T, образ якого містить множину

$$\alpha_k = \{t\,(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \,|\, t \in (0,1)\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Позначимо через Q_k відкритий сектор диска $\mathring{D}_0$, обмежений кривими α_k і α_{k+1}, $k = 1, \ldots, n-1$. Позначимо через Q_n сектор, обмежений кривими α_n і α_1.

Припустимо, що Q_l, $Q_m \in Q$ для деяких $l, m \in \{1, \ldots, n\}$, $l < m$.

Легко знайти просту замкнену криву $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = \gamma(1) = 0 = \Psi(v) \in \operatorname{Fr} Q$, яка відповідає таким умовам:

$\gamma(\mathring{I}) \subset Q$;

існують $\beta' \in (2\pi l/n, 2\pi(l+1)/n)$ і $\tau_l \in \mathring{I}$ такі, що $\gamma(t) = (t\cos\beta', t\sin\beta') \in Q_l$ при $t \in [0, \tau_l)$;

існують $\beta'' \in (2\pi m/n, 2\pi(m+1)/n)$ і $\tau_m \in \mathring{I}$ такі, що $\gamma(t) = ((1-t)\cos\beta', (1-t)\sin\beta') \in$ $\in Q_m$ при $t \in (\tau_m, 1]$.

Нехай крива γ обмежує диск W (рис. 3).

$0 = \Psi(v) \notin \gamma([\tau_l, \tau_m])$, тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $D_\varepsilon(0) \cap \gamma([\tau_l, \tau_m]) = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq$ $\leq \varepsilon\} \cap \gamma([\tau_l, \tau_m]) = \varnothing$. Зрозуміло, що $\varepsilon < \tau_l$ і $1 - \varepsilon > \tau_m$. Позначимо $a' = \gamma(\varepsilon)$, $a'' = \gamma(1-\varepsilon)$, $S_\varepsilon(0) = \operatorname{Fr} D_\varepsilon(0) = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 = \varepsilon\}$. За побудовою $\{a', a''\} = \gamma(I) \cap S_\varepsilon(0)$.

Легко бачити, що або області $\mathring{D}_\varepsilon(0) = \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 < \varepsilon\}$ і W не перетинаються, або принаймні одна з двох дуг, на які коло $S_\varepsilon(0)$ ділиться точками a' і a'', лежить у W. Зі співвідношення $0 \in \operatorname{Fr} W \cap \mathring{D}_\varepsilon(0)$ випливає, що $W \cap \mathring{D}_\varepsilon(0) \neq \varnothing$, внаслідок чого одна з компонент множини $S_\varepsilon(0) \setminus \{a', a''\}$ лежить у W.

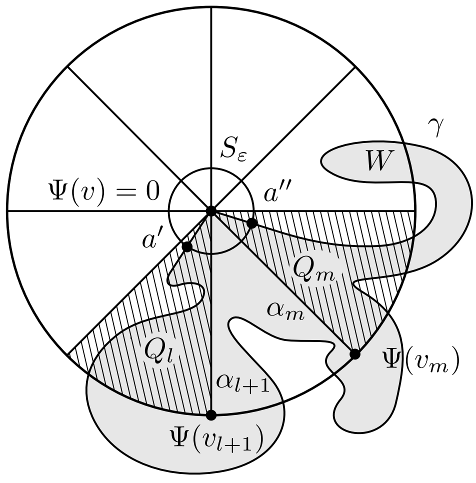

Рис. 3. Крива γ.

Позначимо $N' = \{k \in \mathbb{N} \,|\, (1 \le k \le l) \vee (m < k \le n)\}$, $N'' = \{k \in \mathbb{N} \,|\, l < k \le m\}$. Зрозуміло, що при $1 \le l < m \le n$ обидві множини непорожні.

Зауважимо, що одна з дуг множини $S_\varepsilon(0) \setminus \{a', a''\}$ перетинається з α_k для кожного $k \in N'$, інша дуга перетинається з α_k для всіх $k \in N''$. Ми вже довели вище, що одна з цих дуг є підмножиною W, отже, існує $j \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $\alpha_j \cap W \ne \varnothing$. За побудовою зв'язна множина α_j не перетинається з $\operatorname{Fr} W = \gamma(I)$, отже, $\alpha_j \subset W$.

Розглянемо відображення $\varphi_j = \varphi_{e_j} \colon I \to I_j = I_{e_j}$ та $\hat{\varphi}_j = \operatorname{pr} \circ \varphi_j \colon I \to T$, які реалізують вкладення ребра e_j у простір T. Для простоти будемо вважати, що $\hat{\varphi}_j(0) = v$, $\hat{\varphi}_j(1) = v_j$.

За побудовою $\varnothing \ne \alpha_j \subset W \cap \Psi \circ \hat{\varphi}_j(\mathring{I})$. З іншого боку, $\operatorname{Fr} W \cap \Psi(T \setminus V_0) = \gamma(I) \cap \Psi(T \setminus V_0) = \Psi(v) = \Psi \circ \hat{\varphi}_j(0)$ і $\Psi \circ \hat{\varphi}_j(\mathring{I}) \cap \Psi \circ \hat{\varphi}_j(0) = \varnothing$, тому зв'язна множина $\Psi \circ \hat{\varphi}_j(\mathring{I})$ лежить у W.

За означенням плоского відображення

$$\Phi \circ \hat{\varphi}_j|_{\mathring{I}} = \psi \circ \Psi \circ \hat{\varphi}_j|_{\mathring{I}} \colon \mathring{I} \to S \setminus \{s\}\,.$$

Тому якщо $v_j \in V_0$, то за означенням $\Phi(v_j) = \Phi \circ \hat{\varphi}_j(1) = s$, внаслідок чого $s \in \overline{\Phi \circ \hat{\varphi}_j(\mathring{I})}$, і множина $\Psi \circ \hat{\varphi}_j(\mathring{I})$ повинна бути необмеженою. Але ця множина міститься в обмеженій області W, отже, $v_j \notin V_0$ і визначено точку $\Psi(v_j) = \Psi \circ \hat{\varphi}_j(1) \in \overline{W}$. Зі співвідношень $\Psi(v_j) \ne \Psi(v)$ і $\operatorname{Fr} W \cap \Psi(T \setminus V_0) = \Psi(v)$ випливає, що $\Psi(v_j) \in W$.

Розглянемо множину $\psi(W)$. Це відкритий диск на сфері, обмежений кривою $\psi \circ \gamma$. Зрозуміло, що $\overline{\psi(W)} = \psi(W) \cup \psi \circ \gamma(I) \subset \psi(\mathbb{R}^2) = S \setminus \{s\}$. Тому $s \notin \overline{\psi(W)}$. Отже, з одного боку, $\psi \circ \gamma(I) \cap \Phi(T \setminus V_0) = \psi \circ \gamma(I) \cap \psi \circ \Psi(T \setminus V_0) = \psi \circ \Psi(v) = \Phi(v)$, а з іншого — $\Phi(V_0) = s \notin \psi \circ \gamma(I)$. Об'єднуючи ці співвідношення, отримуємо $\operatorname{Fr} \psi(W) \cap \Phi(T) = \Phi(v)$.

Вилучимо з дерева T вершину v і суміжні їй ребра $e_1, \ldots, e_n$. Отримаємо незв'язний граф T', який є диз'юнктним об'єднанням дерев $T_1, \ldots, T_n$, до того ж v_i є вершиною дерева T_i, $i = 1, \ldots, n$ (див. твердження 3). З викладеного вище випливає, що $\Phi(T') \cap \operatorname{Fr} \psi(W) = \varnothing$.

Множина $\Phi(T_j)$ зв'язна, $\Phi(T_j) \cap \operatorname{Fr} \psi(W) = \varnothing$ і $\varnothing \ne \{\Phi(v_j)\} \subset \Phi(T_j) \cap \psi(W)$. Внаслідок цього $\Phi(T_j) \subset \psi(W)$. Оскільки $s = \Phi(V_0)$ і $s \notin \psi(W)$, то $T_j \subset T \setminus V_0$ і коректно визначено множину $\Psi(T_j)$.

$\Psi(T_j) = \psi^{-1}(\Phi(T_j))$ є підмножиною компакта $\overline{W}$, тому дерево T_j є скінченним (див. твердження 5). За побудовою всі вершини дерева T_j, крім v_j, мають в T_j ту саму валентність, що й у T. Вершина ж v_j має в T_j валентність на 1 меншу, ніж в T. Отже, або дерево T_j має єдину вершину v_j і $v_j \in V_0$, або до T_j можна застосувати твердження 2. У будь-якому випадку існує вершина v' дерева T_j, яка має в T валентність 1. Але це суперечить співвідношенню $T_j \subset T \setminus V_0$.

Отримана суперечність доводить, що два різних сектори, на які ділиться відкритий диск $\mathring{D}_0$ множиною $\Theta \circ \Psi(U_v)$, не можуть одночасно належати $\Theta(Q)$.

Твердження 7 доведено.

Лема 2. *Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$.*

Існує простий максимальний ланцюжок $C = \{e_k\}_{k \in A}$, який має наступні властивості:

межа $\operatorname{Fr} Q$ області Q в $\mathbb{R}^2$ має вигляд $\Psi(C \setminus V_0)$;

межа $\operatorname{Fr} \psi(Q)$ в S^2 має вигляд $\Phi(C) \cup \{s\}$ і гомеоморфна колу.

Доведення. 1. Перевіримо, що існує ребро T, образ якого міститься в $\operatorname{Fr} Q$.

З твердження 5 випливає, що образ множини вершин дерева T в $\mathbb{R}^2$ є дискретною множиною. Тому знайдеться $w \in T \setminus V$ така, що $\Psi(w) \in \operatorname{Fr} Q$. Нехай e_0 — ребро дерева T, яке містить точку w. З твердження 6 випливає, що $\Psi(e_0 \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q$.

Зараз ми побудуємо простий максимальний ланцюжок $\{e_k\}_{k \in A}$ такий, що $\Psi(e_k \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q$ для кожного $k \in A$.

Нехай для деякого $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, вже побудовано шлях $e_0 = (v_{-1}, v_0), \ldots, e_k = (v_{k-1}, v_k)$ такий, що $\Psi(e_\lambda \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q$ для кожного $\lambda \in \{0, \ldots, k\}$.

Якщо $v_k \in V_0$, то позначимо $M = k$ і на цьому зупинимось.

Якщо $v_k \notin V_0$, то валентність n вершини v_k більша за одиницю і цій вершині інцидентне принаймні ще одне ребро крім e_k. Використавши лему 1, знайдемо гомеоморфізм $\Theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такий, що $\Theta \circ \Psi(v_k) = 0$ і множина $\Psi(T \setminus V_0)$ ділить диск $\mathring{D}_0$ на n секторів. Внаслідок твердження 7 перетин $Q \cap \mathring{D}_0$ збігається з одним із цих секторів. Нехай це буде сектор Q_j.

Межа сектора Q_j за побудовою належить об'єднанню образів двох ребер, інцидентних вершині v_k. Кожне інше ребро, інцидентне v_k, має точку, яка не є вершиною, і її образ не належить $\operatorname{Fr} Q$. Тому воно може перетинатися з множиною $\operatorname{Fr} Q$ лише по підмножині своїх кінців (див. твердження 6). Внаслідок цього e_k — одне з двох ребер, образи яких межують з Q_j. Позначимо інше через $e_{k+1} = (v_k, v_{k+1})$. З твердження 6 випливає, що $\Psi(e_{k+1} \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q$, оскільки e_{k+1} має точку, яка не є вершиною і образ якої лежить у $\operatorname{Fr} Q$.

Зауважимо, що на підставі викладеного вибір ребра e_{k+1} не залежить від вибору гомеоморфізму Θ.

Будемо повторювати цю процедуру до тих пір, поки не зупинимось, або ж до нескінченності.

За допомогою аналогічної індуктивної процедури або виберемо ребра

$$e_m = (v_{m-1}, v_m), \ldots, e_{-1} = (v_{-2}, v_{-1}), \qquad m < 0, \quad v_{m-1} \in V_0,$$

або знайдемо $e_k = (v_{k-1}, v_k)$ для кожного $k < 0$.

Об'єднуючи побудовані ланцюжки для $k \geq 0$ і для $k < 0$, отримуємо послідовність ребер $C = \{e_k = (v_{k-1}, v_k)\}_{k \in A}$, для якої виконується співвідношення $\Psi(e_k \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q$, $k \in A$.

Очевидно, набір індексів A є допустимим діапазоном. За побудовою $e_k \neq e_{k+1}$ для всіх допустимих значень індексу. Тому з означення дерева випливає, що $e_k \neq e_l$ при $k \neq l$, $k, l \in A$, і послідовність ребер C є ланцюжком.

Зазначимо, що в дереві кожен шлях є простим, тому наш ланцюжок теж є простим. Нарешті, за побудовою ланцюжок C є максимальним.

2. Побудуємо неперервне відображення $\gamma\colon [-1,1]\to S^2$, для якого $\gamma([-1,1])=\Phi(C)\cup\{s\}$, і перевіримо, що γ — проста замкнена крива.

Введемо кілька позначень. Нехай $k\in A$, $\varphi_k=\varphi_{e_k}\colon I\to I_k=I_{e_k}\subset\hat{T}_0$ — вкладення з означення простору T, $\hat{\varphi}_k=\mathrm{pr}\circ\varphi_k\colon I\to T$, $\chi_k=\Phi\circ\hat{\varphi}_k\colon I\to S^2$. Можемо вважати, що $\hat{\varphi}_k(0)=v_{k-1}$, $\hat{\varphi}_k(1)=v_k$.

Розглянемо кілька можливостей.

(i) $|A|=1$. Тоді $C=e=(v',v'')$ і $v',v''\in V_0$. Нехай $\varphi_e\colon I\to I_e\subset\hat{T}_0$ — вкладення, $\chi_e=\Phi\circ\mathrm{pr}\circ\varphi_e\colon I\to S^2$. Означимо $\gamma\colon[-1,1]\to S^2$ таким чином: $\gamma(t)=\chi_e((t+1)/2)$, $t\in[-1,1]$. Легко бачити, що це потрібне нам відображення. З означення плоского відображення випливає, що воно є простою замкненою кривою.

(ii) $|A|>1$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $0\in A$ і $1\in A$.

Побудуємо окремо обмеження $\gamma_+=\gamma|_{[0,1]}$ і $\gamma_-=\gamma|_{[-1,0]}$.

Припустимо спочатку, що існує $M=\max_{k\in A}k$. Тоді з означень випливає, що $v_k\notin V_0$ при $k=0,\ldots,M-1$ і $v_M\in V_0$. Означимо для $t\in[0,1]$

$$\gamma_+(t)=\gamma(t)=\chi_k(Mt-k+1),\quad \text{якщо}\quad t\in\left[\frac{k-1}{M},\frac{k}{M}\right].$$

З означення простого ланцюжка випливає, що якщо $e_k\cap e_j\neq\varnothing$ при $j<k$, то $k=j+1$ і $e_k\cap e_j=v_{k-1}$. Внаслідок цього γ_+ є простою неперервною кривою, що з'єднує точки $\Psi(v_0)$ і $s=\Psi(v_M)$.

Нехай тепер $\mathbb{N}\subset A$. Тоді $v_k\notin V_0$ для всіх $k\in\mathbb{N}$. Означимо для $t\in[0,1]$

$$\gamma_+(t)=\gamma(t)=$$

$$=\begin{cases}\chi_k(2^k(t-1)+2), & \text{якщо}\quad t\in\left[\dfrac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}},\dfrac{2^k-1}{2^k}\right],\\ s, & \text{якщо}\quad t=1\,.\end{cases}$$

Повторюючи попередні міркування (з очевидними змінами), легко бачити наступне. По-перше, $\gamma(t)\neq s$ для кожного $t\in[0,1)$. По-друге, для кожного $\tau\in(0,1)$ відображення $\gamma|_{[0,\tau]}\colon[0,\tau]\to S^2$ є простою неперервною кривою. Отже, відображення γ_+ ін'єктивне і неперервне для всіх $t<1$.

Очевидно, для кожного відкритого околу W виділеної точки $s\in S^2$ прообраз $\psi^{-1}(S^2\setminus W)$ є компактною підмножиною площини. З твердження 5 і означення плоского відображення випливає, що існує $N(W)\in\mathbb{N}$ таке, що $\Phi(e_k)\subset W$ для всіх $k\geq N(W)$. Внаслідок цього відображення γ_+ є неперервним при $t=1$.

Таким чином, і в цьому випадку γ_+ є простою неперервною кривою, що з'єднує точки $\Psi(v_0)$ і $s=\Psi(v_M)$.

Зрозуміло, що $\gamma_+([0,1])=\bigcup_{k>0,k\in A}\Phi(e_k)\cup\{s\}$.

Аналогічно будується і проста неперервна крива $\gamma_-\colon[-1,0]\to S^2$, яка з'єднує точки s і $\Psi(v_0)$ і така, що $\gamma_-([-1,0])=\bigcup_{k\leq 0,k\in A}\Phi(e_k)\cup\{s\}$.

Враховуючи те, що C — простий ланцюжок, зрозуміло, що $\gamma_-([-1,0])\cap\gamma_+([0,1])=$ $=\{\Psi(v_0),s\}$. Отже, відображення $\gamma\colon[-1,1]\to S^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_-(t), & \text{якщо} \quad t \in [-1, 0), \\ \gamma_+(t), & \text{якщо} \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

є простою замкненою кривою і відповідає співвідношенню $\gamma([-1, 1]) = \Phi(C) \cup \{s\}$.

3. Перевіримо рівність $\gamma([-1, 1]) = \operatorname{Fr} \psi(Q)$.

Нагадаємо, що за побудовою $\Psi(e_k \backslash V_0) \subset \operatorname{Fr} Q$ для кожного $k \in A$. Тому $\Phi(e_k \backslash V_0) \subset \operatorname{Fr} \psi(Q)$ для кожного $k \in A$. Внаслідок цього $\gamma((-1, 1)) = \Phi(C \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} \psi(Q)$. З неперервності γ випливає, що $\gamma([-1, 1]) \subseteq \operatorname{Fr} \psi(Q)$.

Множина $S = \gamma([-1, 1])$ ділить сферу S^2 на дві відкриті області W_1 і W_2, і вона є їх спільною межею (див. [4]). Відкрита зв'язна множина $\psi(Q)$ є підмножиною однієї з цих областей. Нехай $\psi(Q) \subseteq W_1$. Щоб довести рівність $S = \operatorname{Fr} \psi(Q)$, нам достатньо перевірити, що $W_1 \cap \Phi(T) = \varnothing$.

Якщо всі вершини дерева T лежать в C, то зрозуміло, що $T = C$ і $\psi(Q) = W_1$.

Нехай існує вершина $v \in V$, яка не лежить в C. Тоді знайдеться $k \in A$ таке, що $v_k \notin V_0$. Дійсно, якщо всі вершини T, які лежать в C, мають валентність 1, то за означенням C зводиться до єдиного ізольованого ребра дерева T і $T = C$.

З'єднаємо в T вершини v і v_k шляхом $g_1 = (v, w_1) = (w_0, w_1)$, $g_2 = (w_1, w_2), \ldots, g_n = (w_{n-1}, w_n) = (w_{n-1}, v_k)$. Очевидно, існують індекси $l \in \{1, \ldots, n\}$ і $j \in A$ такі, що $w_l = v_j \in C$ і $w_i \notin C$ при $i < l$. Тоді для шляху $P = g_1, \ldots, g_l$ справедливе включення $\Phi(P \setminus \{v, w_l\}) \subset S^2 \setminus S$.

Відмітимо, що $v_j \notin V_0$. Дійсно, або $v_j = v_k$, або $l < n$ і вершина v_j інцидентна принаймні двом ребрам g_l і g_{l+1}. Внаслідок цього $j + 1 \in A$.

Зафіксуємо окіл U точки v_j і гомеоморфізм $\Theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, які відповідають лемі 1. Ми вже знаємо, що рівно один із секторів, на які ділиться відкритий диск $\mathring{D}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ множиною $\Theta \circ \Psi(U)$, лежить в $\Theta(Q)$. Позначимо його Q_j. За побудовою цей сектор обмежений в $\mathring{D}_0$ образами ребер $\Theta \circ \Psi(e_j \setminus V_0)$ і $\Theta \circ \Psi(e_{j+1} \setminus V_0)$.

Диск $\mathring{D}_0$ розбивається множиною $\Theta \circ \Psi((e_j \cup e_{j+1}) \setminus V_0)$ на дві відкриті області Q_j і $\hat{Q}_j$. Згідно з побудовою ланцюжка C, якщо g — ребро, інцидентне вершині v_j, то або g лежить в C, або $\mathring{D}_0 \cap \Theta \circ \Psi(g \setminus (V_0 \cup \{v_j\})) \subset \hat{Q}_j$. Ребро g_l не належить ланцюжку C, тому $\mathring{D}_0 \cap \Theta \circ \Psi(g_l \setminus \{v, v_j\}) \subset \hat{Q}_j$.

Позначимо $B = \psi \circ \Theta^{-1}(\mathring{D}_0)$, $R_j = \psi \circ \Theta^{-1}(Q_j)$, $\hat{R}_j = \psi \circ \Theta^{-1}(\hat{Q}_j)$. Відображення $\psi \circ \Theta^{-1}$ є гомеоморфізмом площини на $S^2 \setminus \{s\}$. Легко бачити, що $\Phi(C) \cap B = \Phi(e_j \cup e_{j+1}) \cap B$, тому відкритий диск B розбивається кривою S на дві компоненти R_j і $\hat{R}_j$, причому $R_j \subset \psi(Q) \subseteq W_1$ і $\hat{R}_j \subset W_2$. З попереднього випливає, що $\Phi(g_l \setminus \{v, v_j\}) \subset \hat{R}_j$. Тому $\Phi(P \setminus \{v, w_l\}) \subset W_2$.

Якщо $v \notin V_0$, то $\Phi(v) \in \overline{W_2} \cap (S^2 \setminus S) = W_2$. Тоді і всі ребра дерева T, які інцидентні вершині v, лежать в $\overline{W_2} = S^2 \setminus W_1$.

Якщо ж $v \in V_0$, то за побудовою g_1 єдине ребро, інцидентне v, теж лежить в $\overline{W_2}$ і не перетинається з W_1.

Отже, для всіх вершин і ребер дерева T, які не належать до C, їх образи в S^2 містяться в $S^2 \setminus W_1$. Внаслідок цього $\psi(Q) = W_1$ і $\operatorname{Fr} \psi(Q) = S = \gamma([-1, 1])$.

Для завершення доведення леми залишилось нагадати, що за означенням $\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi$, ψ гомеоморфно відображає $\mathbb{R}^2$ на $S^2 \setminus \{s\}$ і $\Phi^{-1}(s) = V_0$. Тому межа $\operatorname{Fr} Q$ області Q в $\mathbb{R}^2$ має вигляд $\psi^{-1}(S \setminus \{s\}) = \Psi \circ \Phi^{-1}(S \setminus \{s\}) = \Psi(C \setminus V_0)$.

Лему 2 доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай Q' і Q'' — дві різні компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$. Спільна частина їх межі $\operatorname{Fr} Q' \cap \operatorname{Fr} Q''$ є зв'язною множиною.*

Доведення. Нехай $C' = \{e'_k\}_{k \in A'}$ і $C'' = \{e''_l\}_{l \in A''}$ — прості максимальні ланцюжки з леми 2, образи яких обмежують області Q' і Q'' відповідно.

Припустимо, що множина $\operatorname{Fr} Q' \cap \operatorname{Fr} Q''$ не зв'язна. Тоді знайдуться вершини $v', v'' \in C' \cap C''$, образи яких лежать у різних компонентах зв'язності $\operatorname{Fr} Q' \cap \operatorname{Fr} Q''$. Зрозуміло, що $v', v'' \notin V_0$.

З означення ланцюжка випливає, що в C' існує шлях P', який з'єднує вершини v' і v''. Аналогічно, v' і v'' в C'' можна з'єднати шляхом P''. За побудовою $P' \cap V_0 = P'' \cap V_0 = \varnothing$. Тому коректно визначено зв'язні множини $\Psi(P') \in \operatorname{Fr} Q'$ і $\Psi(P'') \in \operatorname{Fr} Q''$, які з'єднують точки $\Psi(v')$ і $\Psi(v'')$.

Відмітимо, що шляхи P' і P'' різні. Дійсно, якщо б $P' = P''$, то $\Psi(P') = \Psi(P'') \subset$ $\subset \operatorname{Fr} Q' \cap \operatorname{Fr} Q''$ і точки v', v'' належали б до однієї компоненти зв'язності $\operatorname{Fr} Q' \cap \operatorname{Fr} Q''$.

З іншого боку, з означення дерева випливає, що дві його вершини не можна з'єднати двома різними шляхами.

Наслідок 2 доведено.

Нехай $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — набір всіх компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$.

Означення 7. *Назвемо області $Q', Q'' \in \mathcal{Q}$ суміжними, якщо існує ребро e дерева T таке, що $\Psi(e \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q' \cap \operatorname{Fr} Q''$.*

Скажемо, що області $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{Q}$, $n \geq 1$, утворюють ланцюжок в $\mathcal{Q}$, якщо Q_{k-1} і Q_k суміжні для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Твердження 8. *Нехай Q', Q'' належать $\mathcal{Q}$. Існує ланцюжок $Q' = Q_0,\ Q_1, \ldots,\ Q_n = Q''$ елементів $\mathcal{Q}$, який їх з'єднує.*

Доведення. Зрозуміло, що відношення на множині $\mathcal{Q}$ *„бути з'єднаними ланцюжком"* є транзитивним. Тому для доведення досить знайти скінченну послідовність елементів $\mathcal{Q}$, яка починається з Q', закінчується Q'' і кожні два сусідні елементи якої можна з'єднати ланцюжком елементів $\mathcal{Q}$.

Нехай $v \in V \setminus V_0$ — деяка вершина T валентності $n > 1$. Знайдемо її окіл U_v в T, а також гомеоморфізм $\Theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, які відповідають лемі 1. З твердження 7 випливає, що існує рівно n елементів $\mathcal{Q}$, межа яких містить точку $\Psi(v)$. З огляду на твердження 6 приходимо до висновку, що елементи $\mathcal{Q}$, яким відповідають сусідні сектори множини $\mathring{D}_0 \setminus \Theta \circ \Psi(U_v)$, є суміжними в сенсі означення 7. Внаслідок цього будь-які дві області з $\mathcal{Q}$, межа яких містить точку $\Psi(v)$, можуть бути з'єднані ланцюжком в $\mathcal{Q}$.

Нехай $C' = \{e'_k\}_{k \in A'}$ і $C'' = \{e''_l\}_{l \in A''}$ — прості максимальні ланцюжки з леми 2, образи яких обмежують області Q' і Q'' відповідно.

Нехай ланцюжок C' зводиться до єдиного ребра e. Тоді за означенням вершини v_1 і v_2, інцидентні e в T, мають валентність 1. Внаслідок цього e — єдине ребро дерева T, $C' = C'' =$ $= \{e\}$ і $\operatorname{Fr} Q' = \operatorname{Fr} Q'' = \Psi(e \setminus \{v_1, v_2\})$. Отже, області Q' і Q'' є суміжними.

Нехай тепер множина ребер графа T містить більше ніж один елемент. Тоді кожен із ланцюжків C' і C'' містить більше ніж одне ребро і знайдуться вершини $v', v'' \in V \setminus V_0$ такі, що $\Psi(v') \in \operatorname{Fr} Q'$ і $\Psi(v'') \in \operatorname{Fr} Q''$. Дійсно, якщо $e'_{k-1}, e'_k \in C'$, то за означенням ланцюжка вони мають спільну вершину $v' = v'_k$, і її валентність більша за 1. Тоді з леми 2 випливає, що $\Psi(v') \in \operatorname{Fr} Q'$. Аналогічні міркування справедливі і для C''.

З'єднаємо вершини v' і v'' в T шляхом $e_1 = (v', v_1) = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_l =$ $= (v_{l-1}, v_l) = (v_{l-1}, v'')$.

З леми 1 і твердження 6 випливає, що знайдуться $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_l \in \mathcal{Q}$ такі, що $\Psi(e_k) \subset \operatorname{Fr} \hat{Q}_k$, $k = 1, \ldots, l$. Очевидно, $\Psi(v_{k-1}) \in \Psi(e_{k-1}) \cap \Psi(e_k) \subset \operatorname{Fr} \hat{Q}_{k-1} \cap \operatorname{Fr} \hat{Q}_k$. З викладеного вище робимо висновок, що області $\hat{Q}_{k-1}$ і $\hat{Q}_k$ можна з'єднати ланцюжком в $\mathcal{Q}$, $k = 2, \ldots, l$. Аналогічні міркування доводять, що ланцюжком в $\mathcal{Q}$ можна з'єднати області Q' і $\hat{Q}_1$, а також $\hat{Q}_l$ і Q''.

Отже, існує ланцюжок в $\mathcal{Q}$, який з'єднує Q' і Q''.

Твердження 8 доведено.

Твердження 9. *Припустимо, що валентність кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим за 2.*

Тоді для довільного замкненого ланцюжка $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q_0$ елементів $\mathcal{Q}$ число n є парним.

Доведення. Скажемо, що замкнений ланцюжок $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q_0$ *є простим*, якщо $Q_k \neq Q_l$ при $k \neq l$, $k, l = 1, \ldots, n$.

1. Спочатку доведемо твердження для випадку, коли ланцюжок $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q_0$ є простим.

Існують ребра $e_1, \ldots, e_n$ дерева T такі, що $\Psi(e_k \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q_{k-1} \cap \operatorname{Fr} Q_k$, $k = 1, \ldots, n$. Зафіксуємо для кожного k точку $w_k \in e_k \setminus V$. З простоти ланцюжка елементів $\mathcal{Q}$ і з леми 1 випливає, що $w_k \neq w_l$ при $k \neq l$.

Відомо, що для довільної пари різних точок жорданової кривої на двовимірній сфері існує розріз області, обмеженої даною кривою між цією парою точок (див. [4]). Тому з леми 2 випливає, що точки $\Phi(w_{k-1})$ і $\Phi(w_k)$ можуть бути з'єднані розрізом $\hat{\nu}_k \colon I \to \overline{\psi(Q_k)}$ області $\psi(Q_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Зрозуміло, що $\hat{\nu}_k(I) \subset S^2 \setminus \{s\}$ для кожного k, тому проста неперервна крива $\nu_k = \psi^{-1} \circ \hat{\nu}_k \colon I \to \mathbb{R}^2$ є розрізом області Q_k між точками $\Psi(w_{k-1})$ і $\Psi(w_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

З того, що ланцюжок $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q_0$ є простим, випливає, що криві з сім'ї $\{\nu_k\}$ можуть перетинатися лише в точках $\Psi(w_1), \ldots, \Psi(w_n)$. Внаслідок цього відображення $\mu \colon I \to \mathbb{R}^2$,

$$\mu(t) = \nu_k(nt - k + 1), \quad \text{якщо} \quad t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right],$$

є простою замкненою кривою. Позначимо через W відкриту область в $\mathbb{R}^2$, яку обмежує крива μ.

Відмітимо, що за побудовою $\mu(I) \cap \overline{Q_k} = \nu_k(I)$ і $\mu(I) \cap \operatorname{Fr} Q_k = \operatorname{Fr} W \cap \operatorname{Fr} Q_k = \{\nu_k(0), \nu_k(1)\} = \{\Psi(w_{k-1}), \Psi(w_k)\}$.

Нехай $e_k = (v_k', v_k'')$, $k = 1, \ldots, n$. Перевіримо, що рівно одна з двох вершин $v_k', v_k'' \in V$ міститься у множині $\Psi^{-1}(W)$ (рис. 4).

Якщо $v_k', v_k'' \in V_0$, то e_k — єдине ребро дерева T, $\mathcal{Q} = \{Q_{k-1}, Q_k\}$ і існує єдиний (з точністю до циклічної перестановки індексів) замкнений простий ланцюжок Q_{k-1}, Q_k, $Q_{k+1} = Q_{k-1}$. Внаслідок цього $n = 2$ і твердження виконується.

Далі ми будемо вважати, що принаймні одна з двох вершин v_k', v_k'' має валентність, більшу за 1.

За означенням плоского відображення $\Phi(e_k)$ — неперервний образ відрізка, до того ж обмеження $\Phi|_{e_k \setminus V_0}$ є ін'єктивним. З попереднього припущення випливає, що обмеження Φ на e_k також є ін'єктивним. Ребро e_k є компактом, тому обмеження $\Phi|_{e_k}$ є гомеоморфізмом на свій образ.

Нехай $\gamma_k \colon [-1, 1] \to S^2$ — жорданова крива, яка обмежує область $\hat{Q}_k = \psi(Q_k)$ в S^2 (див. лему 2). За побудовою вона містить точки $\Phi(w_{k-1}) = \gamma_k(\tau_{k-1})$ і $\Phi(w_k) = \gamma_k(\tau_k)$. Змінивши при необхідності параметризацію кривої γ_k, ми можемо вважати, що $\tau_{k-1} < \tau_k$.

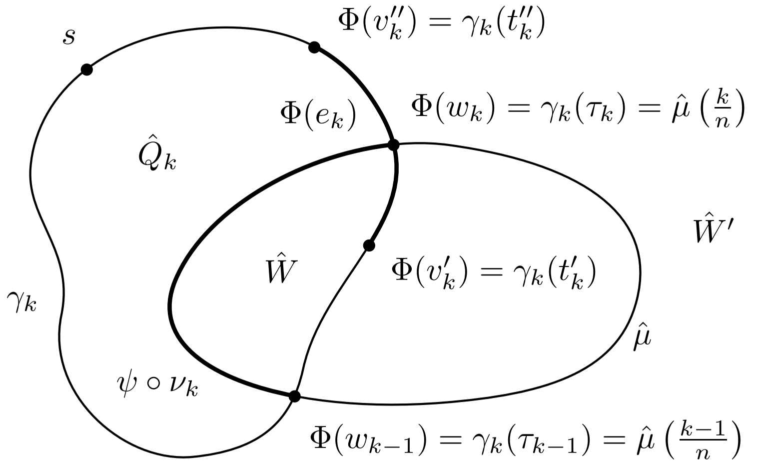

Рис. 4. Взаємне розташування області $\hat{W}$ і образу ребра дерева T, яке перетинається з її межею.

Також з леми 2 випливає, що $\Phi(e_k) \subset \gamma_k([-1,1])$. Тому $\Phi(v'_k) = \gamma(t'_k)$ і $\Phi(v''_k) = \gamma(t''_k)$ для деяких $t'_k, t''_k \in [-1,1]$. Змінюючи позначення вершин v'_k і v''_k, будемо вважати, що $t'_k < t''_k$. Ми перевірили вище, що відображення $\Phi(e_k)$ — гомеоморфний образ відрізка, до того ж точки $\Phi(v'_k)$ і $\Phi(v''_k)$ є образами його кінців. Тому $\Phi(e_k) = \gamma_k([t'_k, t''_k])$.

З того, що $w_{k-1} \notin e_k$ і $w_k \in (e_k \setminus V)$, випливає, що виконуються нерівності $-1 \le \tau_{k-1} < < t'_k < \tau_k < t''_k \le 1$.

Жорданова крива $\hat{\mu} = \psi \circ \mu$ ділить сферу S^2 на дві області $\hat{W}$ і $\hat{W}'$. Зрозуміло, що $s \notin \hat{\mu}(I)$. Нехай $s \in \hat{W}'$. Тоді з означень випливає, що $\hat{W} = \psi(W)$.

За побудовою $Q_k \cap \mu(I) = \nu_k(\mathring{I}) \neq \varnothing$, тому $\hat{Q}_k \cap \hat{\mu}(I) \neq \varnothing$. Внаслідок цього $\hat{Q}_k \cap \hat{W} \neq \varnothing$.

Відмітимо, що $\gamma_k([-1,1]) \cap \hat{\mu}(I) = \operatorname{Fr}\hat{Q}_k \cap \operatorname{Fr}\hat{W} = \{\Phi(w_{k-1}), \Phi(w_k)\} = \{\gamma_k(\tau_{k-1}), \gamma_k(\tau_k)\}$. Ця множина ділить жорданову криву γ_k на дві дуги, причому за побудовою точки $\Phi(v'_k) = = \gamma_k(t'_k)$ і $\Phi(v''_k) = \gamma_k(t''_k)$ належать різним дугам. Точка $\Phi(v''_k)$ лежить на тій же дузі, що й точка $s = \gamma_k(-1) = \gamma_k(1)$, тому $\Phi(v''_k) \in \hat{W}'$.

Якщо ми припустимо, що й $\Phi(v'_k) \in \hat{W}'$, то $\gamma_k([-1,1]) \setminus \{\gamma_k(\tau_{k-1}), \gamma_k(\tau_k)\} \subset \hat{W}'$. Тоді $\gamma_k([-1,1]) \subset S^2 \setminus \hat{W}$ і $\operatorname{Fr}\hat{Q}_k \cap \hat{W} = \varnothing$. Внаслідок цього або $\hat{W} \subset \hat{Q}_k$, або $\hat{Q}_k \cap \hat{W} = \varnothing$. Ми знаємо, що

$$\mu\left(\frac{t+r-1}{n}\right) = \nu_r(t) \in Q_r$$

при $r \neq k$ для кожного $t \in (0,1)$. Тому $\operatorname{Fr} W \cap \operatorname{Int}(\mathbb{R}^2 \setminus Q_k) \neq \varnothing$ і $W \cap (\mathbb{R}^2 \setminus Q_k) \neq \varnothing$. Отже, $\hat{W} \cap (S^2 \setminus \hat{Q}_k) \neq \varnothing$ і повинно виконуватися співвідношення $\hat{Q}_k \cap \hat{W} = \varnothing$, що неможливо.

Отримана суперечність доводить, що $(e_k \cap V) \cap \Phi^{-1}(\hat{W}) = (e_k \cap V) \cap \Psi^{-1}(W) = \{v'_k\}$, $k = 1, \ldots, n$.

Зазначимо, що для різних індексів k і l вершини v'_k і v'_l можуть збігатися. Також можуть збігатися при $k \neq l$ вершини v''_k і v''_l.

Нехай $e \cap \Psi^{-1}(W) \neq \varnothing$ для деякого ребра e дерева T. Тоді або e збігається з одним із ребер $e_1, \ldots, e_n$, або $e \subset \Psi^{-1}(W)$. Перевіримо це.

Відображення ψ за означенням є ін'єктивним, тому

$$\Phi^{-1}(\hat{W}) = \Phi^{-1}(\psi(W)) = (\psi \circ \Psi)^{-1}(\psi(W)) = \Psi^{-1}(\psi^{-1}(\psi(W))) = \Psi^{-1}(W)\,.$$

Аналогічно $\Phi^{-1}(\operatorname{Fr}\hat{W}) = \Psi^{-1}(\operatorname{Fr}W)$.

Нехай $e \notin \{e_1, \ldots, e_n\}$. Тоді $e \cap \Psi^{-1}(\operatorname{Fr}W) = e \cap \Phi^{-1}(\operatorname{Fr}\hat{W}) = \varnothing$. З іншого боку, множина e є зв'язною. Отже, з нерівності $\Phi(e) \cap \hat{W} \neq \varnothing$ випливає, що $\Phi(e) \subset \hat{W}$ і визначено $\Psi(e) = = \psi^{-1} \circ \Phi(e) \subset \psi^{-1}(\hat{W}) = W$.

Розглянемо підграф Γ_0 дерева T, ребрами якого є всі ребра дерева T, що перетинаються з множиною $\Psi^{-1}(W)$. З твердження 5 випливає, що граф Γ_0 є скінченним. Додамо до Γ_0 скінченну множину вершин $u_1, \ldots, u_n$. Вилучимо з Γ_0 ребра $e_1, \ldots, e_n$ і додамо замість них ребра $g_1 = (v'_1, u_1), \ldots, g_n = (v'_n, u_n)$. Отримаємо скінченний граф Γ.

З викладеного вище легко випливає, що вершини $u_1, \ldots, u_n$ мають в Γ валентність 1, всі інші вершини належать множині $\Psi^{-1}(W)$ і мають в Γ ту ж валентність, що й у T. Отже, з означення плоского відображення випливає, що валентність 1 у графі Γ мають лише вершини $u_1, \ldots, u_n$, всі ж інші вершини мають парну валентність, більшу за 2. Тому з наслідку 1 випливає, що число n повинно бути парним.

2. Доведемо твердження для довільного замкненого ланцюжка $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q_0$ елементів $\mathcal{Q}$ за допомогою індукції по його довжині.

База індукції. За означенням ланцюжка елементів $\mathcal{Q}$ області Q_{k-1} і Q_k повинні бути суміжними, отже, $Q_{k-1} \neq Q_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Внаслідок цього всі замкнені ланцюжки довжини $n \leq 3$ є простими, і для таких n твердження є правильним.

Крок індукції. Припустимо, що при деякому $n > 3$ відомо, що довжина кожного замкненого ланцюжка $Q'_0,\, Q'_1, \ldots, Q'_m = Q'_0$ є парним числом, якщо $m < n$.

Нехай існує замкнений ланцюжок $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q_0$ елементів $\mathcal{Q}$ довжини n.

Якщо ланцюжок є простим, то, як встановлено вище, n повинно бути парним числом, і крок індукції завершено.

Якщо ланцюжок не є простим, знайдуться $l \neq m,\ l, m \in \{1, \ldots, n\}$, для яких $Q_l = Q_m$. Змінюючи циклічно нумерацію елементів ланцюжка, можемо вважати, що $Q_0 = Q_k$ для деякого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. З означення ланцюжка випливає, що насправді $2 \leq k \leq n-2$.

Очевидно, послідовності $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k = Q_0$ і $Q_k, Q_{k+1}, \ldots, Q_n = Q_0 = Q_k$ елементів $\mathcal{Q}$ утворюють два замкнених ланцюжки, довжини яких k і $n-k$ відповідно. Згідно з вибором k виконуються нерівності $k < n$ і $n-k < n$. Тому згідно з припущенням індукції числа k і $n-k$ повинні бути парними. Внаслідок цього і $n = k + (n-k)$ є парним числом.

Твердження 9 доведено.

Лема 3. *Припустимо, що валентність кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим ніж 2.*

Тоді існує відображення $\operatorname{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \{-1, 1\}$, *для якого виконується наступна умова*: *якщо множина* $\operatorname{Fr}Q_{\lambda_1} \cap \operatorname{Fr}Q_{\lambda_2}$ *містить більше ніж одну точку, то* $\operatorname{Sign}(Q_{\lambda_1}) \neq \operatorname{Sign}(Q_{\lambda_2})$, $\lambda_1,\, \lambda_2 \in \Lambda,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доведення. Побудуємо функцію Sign.

Зафіксуємо компоненту Q множини $\mathbb{R}^2 \backslash \Psi(T \backslash V_0)$ і зіставимо їй який-небудь знак, наприклад $\operatorname{Sign} Q = 1$.

Нехай для іншої компоненти Q' існує ланцюжок $Q = Q_0,\ Q_1, \ldots Q_n = Q'$ елементів $\mathcal{Q}$. Тоді

$$\operatorname{Sign} Q' = (-1)^n \operatorname{Sign} Q = \begin{cases} \operatorname{Sign} Q, & \text{якщо } n \quad \text{є парним,} \\ -\operatorname{Sign} Q, & \text{якщо } n \quad \text{є непарним.} \end{cases}$$

Перевіримо коректність цього означення.

Припустимо, що існують два ланцюжки $Q = Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q'$ і $Q = Q'_0, Q'_1, \ldots, Q'_m = Q'$ елементів $\mathcal{Q}$, які з'єднують Q з Q'. Тоді, очевидно, послідовність

$$Q = Q_0, Q_1, \ldots, Q_n = Q' = Q'_m, Q'_{m-1}, \ldots, Q'_1, Q'_0 = Q'$$

є замкненим ланцюжком елементів $\mathcal{Q}$ довжини $n + m$. З твердження 9 випливає, що число $n + m$ є парним. Отже, числа n і m мають однакову парність і $\operatorname{Sign} Q'$ не залежить від вибору ланцюжка елементів $\mathcal{Q}$, який з'єднує Q з Q'.

Внаслідок твердження 8 відображення Sign визначено на всьому $\mathcal{Q}$.

Якщо для деяких $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$ перетин $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$ містить більше ніж одну точку, то Q_λ і Q_μ суміжні в $\mathcal{Q}$.

Дійсно, якщо $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$ містить дві вершини v' і v'', то з леми 2 і наслідку 2 випливає, що $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$ містить також образ єдиного шляху в T, який з'єднує v' і v'' (зокрема, і образ кожного ребра цього шляху). Якщо ж у $\operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$ лежить образ точки $w \in T$, яка не є вершиною, то з твердження 6 випливає, що $\Psi(e \setminus V_0) \subset \operatorname{Fr} Q_\lambda \cap \operatorname{Fr} Q_\mu$, де e — ребро T, якому належить точка w.

Тоді $\operatorname{Sign} Q_\lambda \neq \operatorname{Sign} Q_\mu$, тому що послідовність $Q_\lambda = Q_0, Q_1 = Q_\mu$ є за означенням ланцюжком елементів $\mathcal{Q}$.

Лему 3 доведено.

2.3. Побудова псевдогармонічної функції. Припустимо, що валентність кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом, більшим за 2.

Нехай $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — набір всіх компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$.

Розглянемо наступні підмножини площини:

$$W_+ = \mathbb{R} \times [0, +\infty), \quad W_- = \mathbb{R} \times (-\infty, 0], \quad R = \mathbb{R} \times \{0\} = \operatorname{Fr} W_+ = \operatorname{Fr} W_- .$$

Твердження 10. *Для кожного* $\lambda \in \Lambda$ *існує такий гомеоморфізм* $h_\lambda \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *що* $h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) = W_+$.

Доведення. Легко бачити, що множина $\overline{\psi(R)} \subset S^2$ гомеоморфна колу і містить точку s. З леми 2 відомо, що множина $\operatorname{Fr} \psi(Q_\lambda)$ теж гомеоморфна колу і містить s.

Зафіксуємо гомеоморфізм $\hat{g}_\lambda \colon \operatorname{Fr} \psi(Q_\lambda) \to \overline{\psi(R)}$ такий, що $\hat{g}_\lambda(s) = s$. Скористаємось теоремою про продовження (див. [4]) і продовжимо $\hat{g}_\lambda$ до гомеоморфізму $\hat{h}_\lambda \colon S^2 \to S^2$.

Очевидно, $\hat{h}_\lambda(s) = s$, тому визначено відображення

$$h_\lambda = \psi^{-1} \circ \hat{h}_\lambda|_{S^2 \setminus \{s\}} \circ \psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 .$$

За побудовою $\hat{h}_\lambda|_{S^2 \setminus \{s\}}$ є гомеоморфізмом, тому відображення h_λ теж є гомеоморфізмом.

Зрозуміло, що $h_\lambda(\operatorname{Fr} Q_\lambda) = R = \operatorname{Fr} W_+$. Тому або $h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) = W_-$, або $h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) = W_+$. Якщо $h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) = W_-$, то замінимо h_λ на відображення $r \circ h_\lambda$, де $r \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = (-x, -y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Твердження 10 доведено.

Позначимо через $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ координатні проекції. Візьмемо функцію $\mathrm{Sign}\colon \mathcal{Q} \to \to \{-1, 1\}$, яка відповідає лемі 3. Для кожного $\lambda \in \Lambda$ побудуємо функцію $f_\lambda \colon \overline{Q_\lambda} \to \mathbb{R}$ таким чином:

$$f_\lambda(z) = \mathrm{Sign}\, Q_\lambda(z) \cdot \mathrm{pr}_2 \circ h_\lambda(z), \quad z \in \overline{Q_\lambda}\,. \tag{1}$$

Очевидно, всі f_λ є неперервними.

З леми 1 випливає, що $\Psi(T \setminus V_0) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{Q_\lambda}$. Тому $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{Q_\lambda} = \mathbb{R}^2$.

Очевидно, $f_\lambda^{-1}(0) = h_\lambda^{-1}(R) = \mathrm{Fr}\, Q_\lambda$ для кожного λ. Крім того, за означенням $Q_{\lambda_1} \cap Q_{\lambda_2} = = \varnothing$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Внаслідок цього коректно визначено функцію $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(z) = f_\lambda(z), \quad \text{якщо} \quad z \in \overline{Q_\lambda}, \tag{2}$$

яка відповідає додатковій умові

$$f^{-1}(0) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Fr}\, Q_\lambda.$$

З леми 1 випливає, що замкнене покриття $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ площини $\mathbb{R}^2$ є локально скінченним. Відомо [3], що таке покриття є фундаментальним. Внаслідок цього функція f є неперервною.

Доведемо, що f — псевдогармонічна функція. Ми скористаємося наступним топологічним критерієм того, що функція є псевдогармонічною (див. [7]).

Нехай F — двовимірна поверхня, $f\colon F \to \mathbb{R}$ — функція. Позначимо через $L_c = \{z \in \in F \mid f(z) = c\}$, $c \in f(F)$, множину рівня функції f.

Означення 8 (див. [7]). *Сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ множин рівня функції f називається одностайно локально зв'язною в точці $z \in F$, якщо для кожного околу W точки z на F знайдеться інший окіл $W' \subset W$ точки z такий, що для будь-якого $c \in f(F)$ кожну пару точок з $L_c \cap W'$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини L_c.*

Якщо сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ одностайно локально зв'язна в кожній точці $z \in F$, кажуть, що $\{L_c\}$ одностайно локально зв'язна на F.

Теорема 2 (Tôki). *Функція $f\colon F \to \mathbb{R}$ є псевдогармонічною на F тоді й лише тоді, коли виконуються наступні умови*:

1) *функція f є неперервною*;

2) *відображення f є відкритим*;

3) *сім'я $\{L_c\}_{c\in f(F)}$ множин рівня функції f одностайно локально зв'язна на F, можливо за винятком деякого дисконтинууму $E \subset F$.*

Неперервність функції (2) ми вже перевірили. Доведемо, що f є відкритим відображенням.

Очевидно, множини

$$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0], \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$$

утворюють скінченне замкнене покриття простору $\mathbb{R}$. Відомо [3], що таке покриття є фундаментальним.

За побудовою

$$f(\overline{Q_\lambda}) = f_\lambda(\overline{Q_\lambda}) = \begin{cases} \mathbb{R}_-, & \text{якщо} \quad \mathrm{Sign}\, Q_\lambda = -1, \\ \mathbb{R}_+, & \text{якщо} \quad \mathrm{Sign}\, Q_\lambda = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Зрозуміло, що $f(\overline{Q_\lambda}) \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$, якщо $\mathrm{Sign}\, Q_\lambda = 1$, а також $f(\overline{Q_\lambda}) \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$, якщо $\mathrm{Sign}\, Q_\lambda = -1$.

Очевидно, всі відображення

$$\tilde{h}_\lambda\colon \overline{Q_\lambda} \to W_+, \quad \tilde{h}_\lambda(z) = h_\lambda(z), \quad z \in \overline{Q_\lambda},$$

відкриті. Площина $\mathbb{R}^2$ має топологію прямого добутку, тому координатна проекція $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є відкритим відображенням. З цього випливає, що

$$\tilde{f}_\lambda\colon \overline{Q_\lambda} \to f(\overline{Q_\lambda}), \quad \tilde{f}_\lambda(z) = f_\lambda(z) = f(z), \quad z \in \overline{Q_\lambda},$$

відкрите в $\overline{Q_\lambda}$ для кожного $\lambda \in \Lambda$.

Нехай $\Lambda_- = \{\lambda \in \Lambda \mid \operatorname{Sign} Q_\lambda = -1\}$, $\Lambda_+ = \{\lambda \in \Lambda \mid \operatorname{Sign} Q_\lambda = 1\}$,

$$Q_- = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_-} Q_\lambda, \quad Q_+ = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_+} Q_\lambda\,.$$

Внаслідок локальної скінченності покриття $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ простору $\mathbb{R}^2$ маємо

$$\overline{Q_-} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_-} \overline{Q_\lambda}, \quad \overline{Q_+} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_+} \overline{Q_\lambda}\,.$$

За означенням множина $\Psi(T \setminus V_0)$ замкнена в $\mathbb{R}^2$, тому $\operatorname{Fr} Q_\lambda \subset \Psi(T \setminus V_0)$ для кожного $\lambda \in \Lambda$ і $f^{-1}(0) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{Fr} Q_\lambda \subset \Psi(T \setminus V_0)$. З іншого боку, з лем 1 і 3 випливає, що для кожного $w \in T \setminus V_0$ існують $\lambda' \in \Lambda_-$ і $\lambda'' \in \Lambda_+$, для яких $\Psi(w) \in \overline{Q_{\lambda'}} \cap \overline{Q_{\lambda''}}$. Внаслідок цього виконуються рівності

$$\operatorname{Fr} Q_- = \operatorname{Fr} Q_+ = \Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)\,. \tag{4}$$

Отже, $\overline{Q_-} \cap \overline{Q_+} = \Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

Позначимо

$$f_- = f|_{\overline{Q_-}}\colon \overline{Q_-} \to \mathbb{R}_-, \qquad f_+ = f|_{\overline{Q_+}}\colon \overline{Q_+} \to \mathbb{R}_+.$$

Відображення f_- є відкритим відображенням простору $\overline{Q_-}$ на $\mathbb{R}_-$ внаслідок того, що $f_-(A \cap \cap \overline{Q_-}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_-} \tilde{f}_\lambda(A \cap \overline{Q_-})$ для кожного $A \in \mathbb{R}^2$ і всі відображення $\tilde{f}_\lambda$ відкриті. Аналогічно, f_+ є відкритим відображенням простору $\overline{Q_+}$ на $\mathbb{R}_+$.

Нехай множина $U \subset \mathbb{R}^2$ є відкритою.

1. Припустимо, що $0 \notin f(U)$. Тоді $f(U \cap \overline{Q_+}) \cap \mathbb{R}_- = \varnothing$ і $f(U) \cap \mathbb{R}_- = f(U \cap \overline{Q_-}) \cap \mathbb{R}_- = f_-(U \cap \overline{Q_-})$. Аналогічно $f(U) \cap \mathbb{R}_+ = f_+(U \cap \overline{Q_+})$. Множини $U \cap \overline{Q_-}$ і $U \cap \overline{Q_+}$ відкриті у просторах $\overline{Q_-}$ і $\overline{Q_+}$ відповідно. Тому $f_-(U \cap \overline{Q_-})$ і $f_-(U \cap \overline{Q_-})$ є відкритими підмножинами просторів $\mathbb{R}_-$ і $\mathbb{R}_+$ відповідно. Отже, $f(U) \cap \mathbb{R}_-$ і $f(U) \cap \mathbb{R}_+$ є відкритими підмножинами $\mathbb{R}_-$ і $\mathbb{R}_+$ відповідно. З того, що покриття $\{\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+\}$ простору $\mathbb{R}$ є фундаментальним, випливає, що множина $f(U)$ відкрита в $\mathbb{R}$.

2. Нехай $0 \in f(U)$. Тоді з (4) випливає, що існує $w \in T \setminus V_0$ таке, що $\Psi(w) \in U$. З одного боку, ми знаємо, що $f(U \cap \overline{Q_+}) \cap \mathbb{R}_- \subseteq \{0\}$. З іншого боку, з (4) випливає, що $0 = f(w) \in \in f(U \cap \overline{Q_-})$. Отже, $f(U \cap \overline{Q_+}) \cap \mathbb{R}_- \subset f_-(U \cap \overline{Q_-})$ і $f(U) \cap \mathbb{R}_- = f_-(U \cap \overline{Q_-})$. Аналогічно $f(U) \cap \mathbb{R}_+ = f_+(U \cap \overline{Q_+})$. Повторюючи міркування з пункту 1, робимо висновок, що і у випадку 2 множина $f(U)$ є відкритою в $\mathbb{R}$.

Внаслідок довільності у виборі відкритої множини $U \in \mathbb{R}^2$ приходимо до висновку, що відображення $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є відкритим.

Перевіримо, що f одностайно локально зв'язна скрізь на площині, крім точок множини $\Psi(V \setminus V_0)$.

Нагадаємо, що $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{Q_\lambda}$. Нехай $z \in \overline{Q_\lambda}$ для деякого $\lambda \in \Lambda$, U — відкритий окіл z в $\mathbb{R}^2$. Тоді множина $\tilde{U}_\lambda = \tilde{h}_\lambda(U \cap \overline{Q_\lambda}) = h_\lambda(U \cap \overline{Q_\lambda})$ є відкритим околом точки $h_\lambda(z)$ у просторі W_+.

З рівності $W_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ випливає, що у просторах $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}_+$ існують зв'язні відкриті околи U_1 і U_2 точок $\mathrm{pr}_1 \circ h_\lambda(z)$ і $\mathrm{pr}_2 \circ h_\lambda(z)$ відповідно такі, що $h_\lambda(z) \in U_1 \times U_2 \subset \tilde{U}_\lambda$.

Очевидно, множини рівня функції

$$\tilde{\mathrm{pr}}_2 = \mathrm{pr}_2|_{W_+}\colon W_+ \to \mathbb{R}_+$$

є горизонтальними прямими і довільні дві точки з множини $U_1 \times U_2$, які належать одній множині рівня $\tilde{\mathrm{pr}}_2$, можна з'єднати в $U_1 \times U_2$ (а тим більше в $\tilde{U}_\lambda$) прямолінійним відрізком, який належить тій же множині рівня функції $\tilde{\mathrm{pr}}_2$.

Зрозуміло, що аналогічне зауваження справедливе і для функції $\mathrm{Sign}\, Q_\lambda \cdot \tilde{\mathrm{pr}}_2$.

Гомеоморфізм $\tilde{h}_\lambda\colon \overline{Q_\lambda} \to W_+$ відображає множини рівня функції $\tilde{f}_\lambda$ на множини рівня $\mathrm{Sign}\, Q_\lambda \cdot \tilde{\mathrm{pr}}_2$. Тому окіл $U' = (\tilde{h}_\lambda)^{-1}(U_1 \times U_2) \subset (\tilde{h}_\lambda)^{-1}(\tilde{U}_\lambda) = U \cap \overline{Q_\lambda}$ відповідає означенню 8 відносно околу $U \cap \overline{Q_\lambda}$ точки z у просторі $\overline{Q_\lambda}$.

Внаслідок довільності вибору точки z і її околу U для кожного $\lambda \in \Lambda$ функція $\tilde{f}_\lambda$ є одностайно локально зв'язною на $\overline{Q_\lambda}$.

Нехай $z \notin \Psi(T \setminus V_0)$. Тоді $z \in Q_\lambda$ для деякого $\lambda \in \Lambda$. За означенням множина $\Psi(T \setminus V_0)$ замкнена в $\mathbb{R}^2$, тому компонента Q_λ доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_0)$ відкрита і для кожного відкритого околу U точки z в $\mathbb{R}^2$ множина $U \cap Q_\lambda \subset U$ є відкритим околом z як в $\mathbb{R}^2$, так і в $\overline{Q_\lambda}$. З урахуванням цього зауваження одностайно локальна зв'язність функції f в точці z є безпосереднім наслідком одностайно локальної зв'язності функції $\tilde{f}_\lambda = f|_{\overline{Q_\lambda}}$ у цій точці.

Нехай $z \in \Psi(T \setminus V_0)$ і $\Psi^{-1}(z) \notin V$. Тоді згідно з лемою 1 існують $\lambda, \mu \in \Lambda$ і відкритий окіл U_z точки z в $\mathbb{R}^2$ такі, що $U_z \subset \overline{Q_\lambda} \cup \overline{Q_\mu}$ і $z \in \Psi(T \setminus V_0) \cap U_z \subset \overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu}$.

Нехай U — відкритий окіл точки z в $\mathbb{R}^2$. Позначимо $G_\lambda = U \cap U_z \cap \overline{Q_\lambda}$, $G_\mu = U \cap U_z \cap \overline{Q_\mu}$. Зрозуміло, що множини G_λ і G_μ є відкритими околами точки z у просторах $\overline{Q_\lambda}$ і $\overline{Q_\mu}$ відповідно. Візьмемо відкриті околи $G'_\lambda \subset G_\lambda$ і $G'_\mu \subset G_\mu$ точки z у просторах $\overline{Q_\lambda}$ і $\overline{Q_\mu}$ відповідно, які задовольняють означення 8 по відношенню до околів G_λ і G_μ.

За означенням індукованої топології на підпросторі існують відкриті підмножини U'_λ і U'_μ простору $\mathbb{R}^2$, для яких $G'_\lambda = U'_\lambda \cap \overline{Q_\lambda}$ і $G'_\mu = U'_\mu \cap \overline{Q_\mu}$. Розглянемо окіл

$$U' = U \cap U_z \cap U'_\lambda \cap U'_\mu$$

точки z в $\mathbb{R}^2$.

З леми 3 випливає, що $\mathrm{Sign}\, Q_\lambda \neq \mathrm{Sign}\, Q_\mu$. Тому якщо $L_c \cap U_z \neq \varnothing$ для деякого $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то або $L_c \cap \overline{Q_\lambda} = \varnothing$, або $L_c \cap \overline{Q_\mu} = \varnothing$. Крім того, $L_0 \cap U_z = \Psi(T \setminus V_0) \cap U_z \subset \overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu}$ згідно з вибором U_z. Внаслідок цього якщо $L_c \cap U_z \neq \varnothing$ для деякого $c \in \mathbb{R}$, то $L_c \cap U_z \subset \overline{Q_\lambda}$ або $L_c \cap U_z \subset \overline{Q_\mu}$.

Отже, якщо $L_c \cap U' \neq \varnothing$ для деякого $c \in \mathbb{R}$, то або $L_c \cap U' \in G'_\lambda$, або $L_c \cap U' \in G'_\mu$ і довільні дві точки з $L_c \cap U'$ можна з'єднати зв'язною множиною в $L_c \cap U$.

Таким чином, функція f одностайно локально зв'язна в кожній точці множини $\Psi(T \setminus V) = \Psi(T \setminus V_0) \setminus \Psi(V \setminus V_0)$.

З твердження 5 випливає, що множина $\Psi(V \setminus V_0)$ дискретна в $\mathbb{R}^2$, і ми можемо застосувати теорему 2, яка стверджує, що f є псевдогармонічною функцією.

Теорему 1 доведено.

1. *Morse M.* Topological methods in the theory of functions of a complex variable. – Princeton, 1947. – 145 p.
2. *Polulyakh E., Yurchuk I.* On the pseudo-harmonic functions defined on a disk // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2009. – **80**. – 151 с.
3. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 488 с.
4. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964. – 214 p.
5. *Берж К.* Теория графов и ее приложения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 320 с.
6. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
7. *Tôki Y.* A topological characterization of pseudo-harmonic functions // Osaka Math. J. – 1951. – **3**, № 1. – P. 101 – 122.

Одержано 16.07.12