УДК 517.53

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДВОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА РАЦІОНАЛЬНІ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

V. K. Dzyadyk's method of generalized moment representations is extended to the case of two-dimensional sequences and used to construct Padé approximants of two-variable functions.

Метод обобщенных моментных представлений В. К. Дзядыка распространен на случай двумерных последовательностей и применен к построению аппроксимаций Паде функций двух переменных.

Узагальнені моментні зображення були введені В. К. Дзядиком [1] у 1981 р. і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]).

Означення 1. *Будемо говорити, що для послідовності комплексних чисел* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$ *за означеною на цьому добутку білінійною формою* $\langle .,. \rangle$, *якщо у просторі* $\mathscr{X}$ *вказано послідовність елементів* $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, *а у просторі* $\mathscr{Y}$ *— послідовність елементів* $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ *такі, що*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

По аналогії з (1) можна визначити узагальнені моментні зображення двовимірних числових послідовностей.

Означення 2. *Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів* $\mathscr{X}$ *та* $\mathscr{Y}$ *за означеною на цьому добутку білінійною формою* $\langle .,. \rangle$, *якщо у просторі* $\mathscr{X}$ *вказано двовимірну послідовність елементів* $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, *а у просторі* $\mathscr{Y}$ *— двовимірну послідовність елементів* $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ *такі, що*

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle, \quad k,\ j,\ m,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

По аналогії з тим, як у відповідність числовій послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можна поставити формальний степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m. \tag{3}$$

Для рядів вигляду (3) можна визначати раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде, за різними схемами (див. [3, с. 323]). При цьому потрібно зафіксувати певні обмежені області $\mathscr{N}$ і $\mathscr{D}$ з $\mathbb{Z}_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_{\mathscr{N}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathscr{N}} p_{k,m} z^k w^m,$$

$$Q_{\mathscr{D}}(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathscr{D}} q_{k,m} z^k w^m$$

таким чином, щоб якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ у розкладі

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{\mathscr{D}}(z,w)} = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2} e_{k,m} z^k w^m$$

дорівнювали нулю. Як і у випадку одновимірних апроксимацій Паде, побудова таких многочленів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Тому якщо вимагати, щоб $e_{k,m} = 0$ при $(k,m) \in \mathscr{E} \subset \mathbb{Z}_+^2$, то в загальному випадку повинна справджуватися рівність

$$\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{N} + \dim \mathscr{D} - 1.$$

Принаймні, в кожному невиродженому випадку ми можемо добитися, щоб виконувалася нерівність

$$\dim \mathscr{E} \geqslant \dim \mathscr{N} + \dim \mathscr{D} - 1.$$

Різноманітні модифікації багатовимірних і, зокрема, двовимірних апроксимацій Паде вивчалися в роботах [4 – 12].

Наступний результат є аналогом теореми В. К. Дзядика [1] для випадку функцій двох змінних.

Теорема 1. *Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд* (3) *і для двовимірної послідовності* $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення вигляду* (2). *Тоді якщо для деяких* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n} \tag{4}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}\rangle = 0 \tag{5}$$

при $(k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$ *і* $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$, *то раціональна функція*

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \right\},$$

де

$$Q_{N_1,N_2}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)}z^jw^n,$$

матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) *для всіх* $(j,n)\in([0,2N_1]\times[0,2N_2])\setminus\{(2N_1,2N_2)\}$.

Доведення. Помножимо рівність (2) на z^kw^m і підсумуємо по k та m від 0 до досить великих чисел $\tilde{k}$ та $\tilde{m}$ відповідно. Справа отримаємо

$$\left\langle\sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}}z^kw^mx_{k,m},y_{j,n}\right\rangle,$$

а зліва будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}}s_{k+j,m+n}z^kw^m=\sum_{k=j}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^{k-j}w^{m-n}=$$

$$=\frac{1}{z^jw^n}\left\{f(z,w)-\sum_{k=j}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^kw^m-\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^kw^m-\right.$$

$$-\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^kw^m-\sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^kw^m-$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty}s_{k,m}z^kw^m-\sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty}s_{k,m}z^kw^m\right\}.$$

Домножимо тепер отримані рівності на коефіцієнти $c_{j,n}^{(N_1,N_2)}$, $j\in[0,N_1]$, $n\in[0,N_2]$, і підсумуємо по j від 0 до N_1 і по n від 0 до N_2. Справа отримаємо

$$\left\langle\sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}}z^kw^mx_{k,m},Y_{N_1,N_2}\right\rangle.$$

Враховуючи, що мають місце співвідношення біортогональності (5), розклад отриманої справа величини в ряд за степенями z та w матиме нульові коефіцієнти при степенях $(k,m)\in$ $\in([0,N_1]\times[0,N_2])\setminus\{(N_1,N_2)\}$.

Зліва одержимо

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}\frac{1}{z^jw^n}\left\{f(z,w)-\sum_{k=j}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^kw^m-\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^kw^m-\right.$$

$$-\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^kw^m-\sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^kw^m-$$

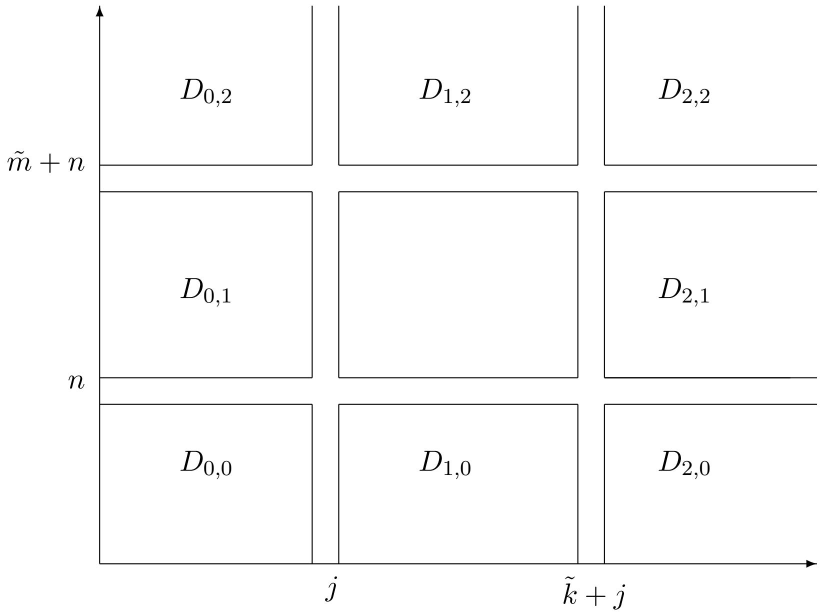

Рис. 1

$$\left. -\sum_{k=0}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty} s_{k,m}z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+1}^{\infty}\sum_{m=\tilde{m}+n+1}^{\infty} s_{k,m}z^k w^m \right\} =$$

$$= \frac{1}{z^{N_1}w^{N_2}}\left\{ f(z,w)Q_{N_1,N_2}(z,w) - \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j}w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D^*} s_{k,m}z^k w^m \right\},$$

де $D^* = D_{0,0}\cup D_{0,1}\cup D_{1,0}\cup D_{0,2}\cup D_{2,0}\cup D_{1,2}\cup D_{2,1}\cup D_{2,2}$, а

$$D_{0,0} = [0, j-1]\times[0, n-1], \qquad D_{0,1} = [0, j-1]\times[n, \tilde{m}+n],$$

$$D_{1,0} = [j, \tilde{k}+j]\times[0, n-1], \qquad D_{0,2} = [0, j-1]\times[\tilde{m}+n+1, \infty],$$

$$D_{2,0} = [\tilde{k}+j+1, \infty]\times[0, n-1], \qquad D_{1,2} = [j, \tilde{k}+j]\times[\tilde{m}+n+1, \infty],$$

$$D_{2,1} = [\tilde{k}+j+1, \infty]\times[n, \tilde{m}+n], \qquad D_{2,2} = [\tilde{k}+j+1, \infty]\times[\tilde{m}+n+1, \infty]$$

(див. рис. 1).

Тоді

$$f(z,w)Q_{N_1,N_2}(z,w) - \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j}w^{N_2-n} \sum_{k=j}^{\tilde{k}+j}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m}z^k w^m -$$

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j}w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n} s_{k,m}z^k w^m -$$

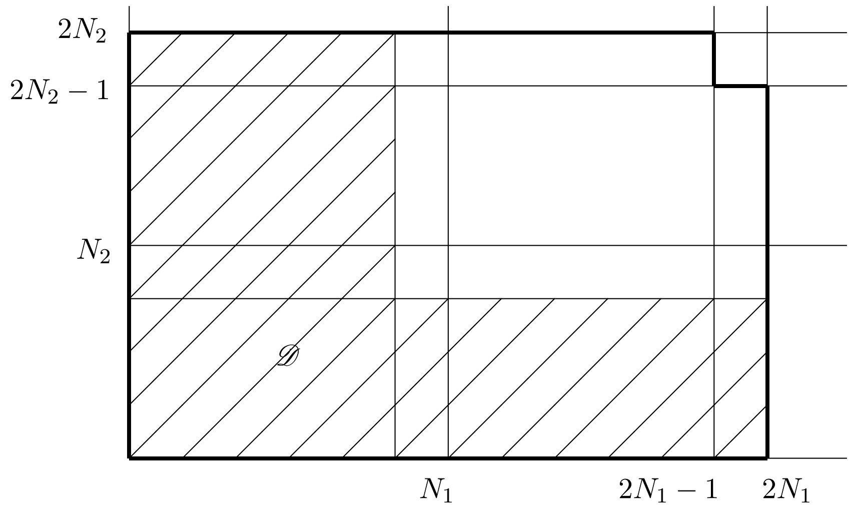

Рис. 2

$$-\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1} s_{k,m} z^k w^m =$$

$$= O\left(w^{\tilde{m}}\right) + O\left(z^{\tilde{k}}\right) + z^{N_1} w^{N_2} \left\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \right\rangle.$$

Звідси за рахунок довільності вибору досить великих $\tilde{k}$ та $\tilde{m}$ і отримаємо твердження теореми.

***Зауваження* 1.** Таким чином, для побудованої в теоремі 1 апроксиманти Паде будемо мати

$$\mathscr{D} = [0, N_1] \times [0, N_2],$$

$$\mathscr{N} = ([0, 2N_1] \times [0, 2N_2]) \setminus ([N_1, 2N_1] \times [N_2, 2N_2]),$$

$$\mathscr{E} = ([0, 2N_1] \times [0, 2N_2]) \setminus \{(2N_1, 2N_2)\}$$

(див. рис. 2; заштрихована частина — це область $\mathscr{N}$, а обмежена жирним контуром — $\mathscr{E}$).

Насправді, в теоремі 1 можна вибирати узагальнений поліном Y_{N_1,N_2} з умов біортогональності до елементів $x_{k,m}$ не для $(k,m) \in ([0,N_1] \times [0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$, а для $(k,m) \in \mathscr{H}$, де $\mathscr{H}$ — певна множина з $\mathbb{Z}_+^2$, обмежена деякою кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, що містить $(N_1+1)(N_2+1) - 1$ точку. При цьому за $\mathscr{N}$ ми можемо вибирати будь-яку множину з $\mathbb{Z}_+^2 \setminus ([N_1,\infty) \times [N_2,\infty))$, що є об'єднанням квадрата $[0, N_1-1] \times [0, N_2-1]$ з множинами вигляду $\{(k,m) : k \in [0, N_1-1],\ m \in [N_2, x(k)]\}$ та $\{(k,m) \colon m \in [0, N_2-1],\ k \in [N_1, y(m)]\}$, де $x(k), y(m)$ — деякі функції з $\mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{Z}_+$ такі, що $x(k) \geqslant N_2$, $y(m) \geqslant N_1$ для всіх k та m (див. рис. 3). Тоді множина $\mathscr{E}$ буде мати вигляд $\mathscr{N} \cup \{\mathscr{H} + (N_1,N_2)\}$, де $\mathscr{H} + (N_1,N_2)$ — множина, отримана паралельним переміщенням множини $\mathscr{H}$, при якому точка $(0,0)$ переходить у точку (N_1,N_2).

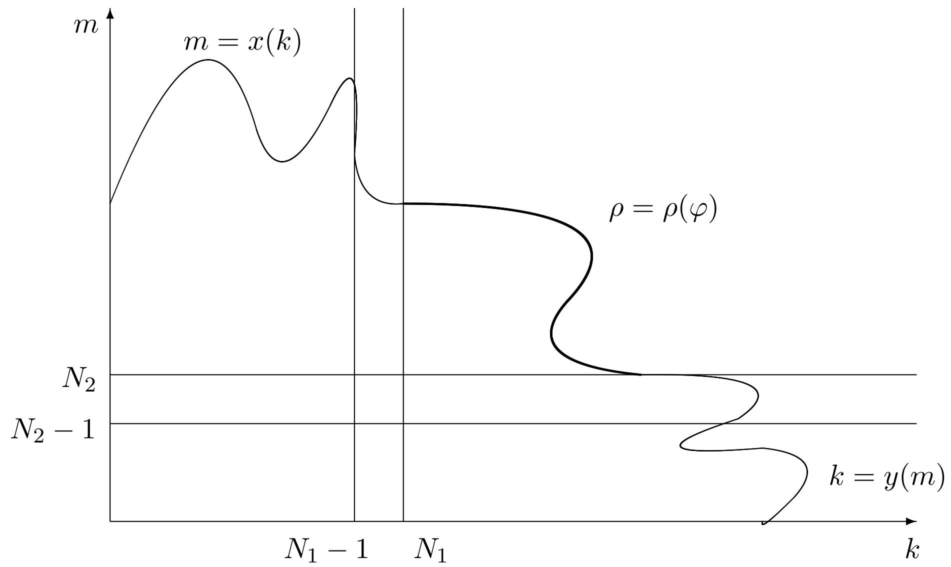

Рис. 3

А саме, має місце наступне узагальнення теореми 1.

Теорема 1$'$. *Нехай за умов теореми* 1 *при деяких* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *існує нетривіальний узагальнений поліном*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \rangle = 0$$

при $(k, m) \in \mathscr{H}$, *де область* $\mathscr{H} \subset \mathbb{Z}_+^2$ *обмежена графіком деякої функції* $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *і містить* $(N_1 + 1)(N_2 + 1) - 1$ *точку, і при цьому* $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$. *Тоді раціональна функція*

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \left\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} + \right.$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$\left. + w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \right\},$$

де

$$Q_{N_1,N_2}(z,w)=\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)}z^jw^n,$$

матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) *для всіх* $(j,n)\in\mathscr{E}$.

Доведення. В процесі доведення теореми 1 було встановлено рівність

$$\left\langle\sum_{k=0}^{\tilde{k}}\sum_{m=0}^{\tilde{m}}z^kw^mx_{k,m},Y_{N_1,N_2}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{z^{N_1}w^{N_2}}\left\{f(z,w)Q_{N_1,N_2}(z,w)-\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{(k,m)\in D^*}s_{k,m}z^kw^m\right\}.$$

Суми, що відповідають областям $D_{0,2}$, $D_{1,2}$, $D_{2,2}$, $D_{2,1}$ та $D_{2,0}$, при досить великих $\tilde{k}$, $\tilde{m}$ будуть містити лише z^kw^m при $(k,m)\notin\mathscr{E}$.

Розглянемо

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{(k,m)\in D_{0,0}}s_{k,m}z^kw^m=$$

$$=z^{N_1}w^{N_2}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=1}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{n-1}s_{k,m}z^{k-j}w^{m-n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)}s_{k-j,m-n}.$$

Далі

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{(k,m)\in D_{0,1}}s_{k,m}z^kw^m=$$

$$=z^{N_1}w^{N_2}\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{m=n}^{\tilde{m}+n}s_{k,m}z^{k-j}w^{m-n}=$$

$$=w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\tilde{m}}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2}c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)}s_{k-j,m+n}.$$

Аналогічно по області $D_{1,0}$:

$$\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c_{j,n}^{(N_1,N_2)}z^{N_1-j}w^{N_2-n}\sum_{(k,m)\in D_{1,0}}s_{k,m}z^kw^m=$$

$$= z^{N_1} \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}.$$

Формуючи чисельник двовимірної апроксиманти Паде, ми включаємо до нього першу суму повністю. З другої суми візьмемо

$$w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n},$$

а решта

$$w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=x(k)-N_2+1}^{\tilde{m}} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}$$

потрапить до залишку.

З третьої суми беремо

$$z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n},$$

решта

$$z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=y(m)-N_1+1}^{\tilde{k}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}$$

також потрапляє до залишку.

Враховуючи умови біортогональності, накладені на узагальнений поліном Y_{N_1,N_2}, приходимо до висновку про справедливість твердження теореми.

Зауважимо, що, як і у випадку одновимірних узагальнених моментних зображень, задача про двовимірні узагальнені моментні зображення може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими і в просторі $\mathscr{X}$ існують комутуючі між собою обмежені оператори $A, B\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ такі, що

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m},$$

$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1}$$

при всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Нехай у просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені оператори $A^\star, B^\star\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$, спряжені до операторів A та B відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ в тому розумінні, що для будь-яких $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{Y}$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\star y \rangle,$$

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x, B^\star y \rangle.$$

Тоді зображення (2) можна записати у вигляді

$$s_{k,m} = \left\langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle, \quad k,\, m \in \mathbb{Z}_+,$$

і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(z,w) = \left\langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, y_{0,0} \right\rangle,$$

де резольвентна функція $\widehat{R_z}(A)$ визначається рівністю $\widehat{R_z}(A) = (I - zA)^{-1}$.

У такому випадку за умов теореми 1 матиме місце формула для похибки апроксимації

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \Bigg\{ z^{N_1} w^{N_2} \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, Y_{N_1,N_2}\rangle +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \Bigg\}.$$

За умов теореми $1'$ ця формула набирає вигляду

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}(z,w)} \Bigg\{ z^{N_1} w^{N_2} \langle \widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{0,0}, Y_{N_1,N_2}\rangle +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=y(m)-N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=x(k)-N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n} \Bigg\}.$$

Розглянемо окремі приклади зображень вигляду (2) та застосуємо їх до побудови раціональних апроксимацій.

Нехай $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = L_2([0,1], d\mu)$ для деякої міри, що визначається неспадною функцією $\mu(t)$, яка має нескінченну кількість точок зростання на $[0,1]$. Визначимо у просторі $\mathscr{X}$ два оператори

$$(A\varphi)(t) = (B\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Їх резольвентні функції мають вигляд

$$\left(\widehat{R}_z(A)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - zt},$$

$$\left(\widehat{R}_w(B)\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1 - wt}.$$

Таким чином,

$$f(z,w)=\int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-zt)(1-wt)}=\frac{wg(w)-zg(z)}{w-z}, \tag{6}$$

де

$$g(z)=\int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-zt}.$$

Наприклад, для $\mu(t)=t$ маємо $g(z)=-\dfrac{\ln(1-z)}{z}$ і, отже,

$$f(z,w)=\frac{\ln\dfrac{1-z}{1-w}}{w-z}.$$

Функції $x_{k,m}(t)$ при цьому мають вигляд

$$x_{k,m}(t)=t^{k+m}$$

і, отже,

$$s_{k,m}=\int\limits_0^1 t^{k+m}d\mu(t). \tag{7}$$

При

$$d\mu(t)=t^{\nu}(1-t)^{\sigma}dt, \quad \nu,\, \sigma>-1, \tag{8}$$

маємо

$$s_{k,m}=\int\limits_0^1 t^{k+m+\nu}(1-t)^{\sigma}dt=\frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)},$$

і, отже, отримана функція

$$f(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}z^k w^m \tag{9}$$

з точністю до сталого множника збігатиметься з гіпергеометричним рядом Аппеля

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+m}(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!}z^k w^m$$

(див. [13, с. 219], формула (6)) при $\alpha=\nu+1$, $\beta=1$, $\beta'=1$, $\gamma=\nu+\sigma+2$.

Оскільки функція $f(z,w)$ вигляду (6) є симетричною відносно своїх змінних, то має сенс наближати її симетричними агрегатами. Отже, обмежимось випадком $N_1=N_2=N$. Для знаходження апроксиманти Паде для $f(z,w)$ вигляду (6) за теоремами 1, $1'$ нам потрібно побудувати

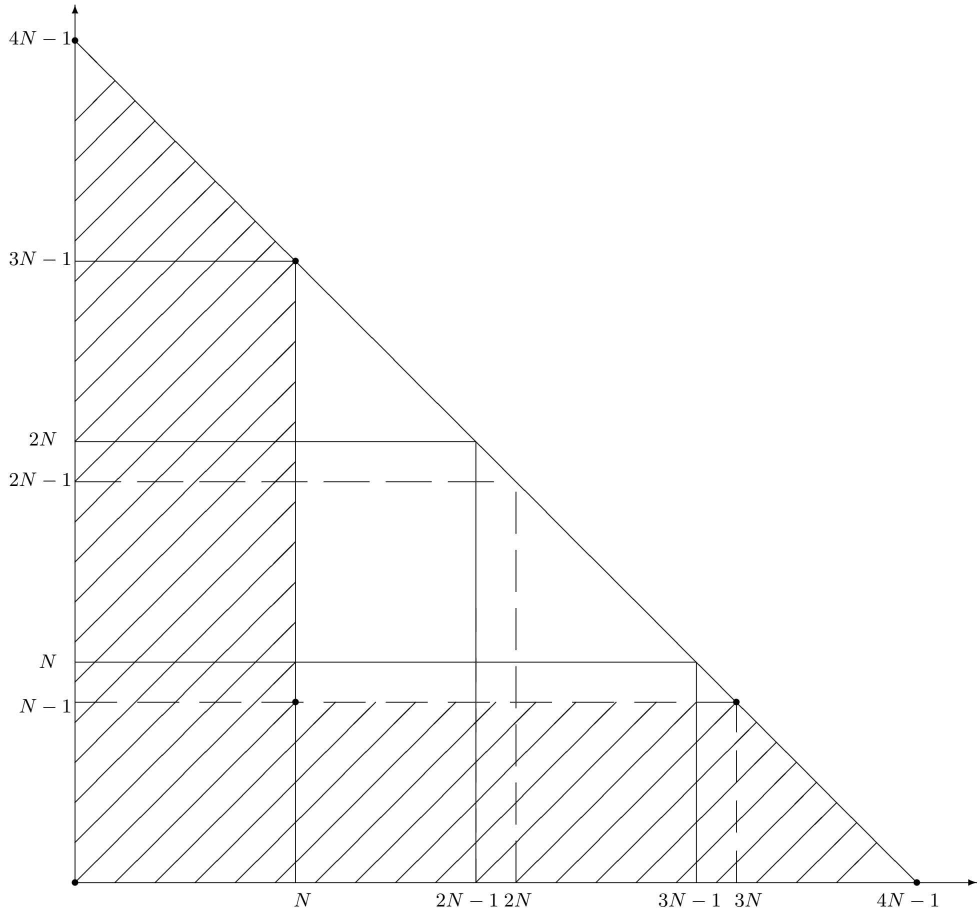

Рис. 4

узагальнений поліном вигляду (4), для якого виконуються умови біортогональності (5). Оскільки $Y_{N,N}(t)$ в даному випадку буде алгебраїчним многочленом степеня $2N$, який ортогональний до многочленів степеня $\leqslant 2N-1$, то він збігатиметься з точністю до сталого множника з многочленом, ортонормованим на $[0,1]$ за мірою $d\mu(t)$, а у випадку міри (8) — з ортонормованим зсунутим на $[0,1]$ многочленом Якобі (див. [14, с. 268]).

Зауважимо, що поліном $Y_{N,N}(t) = P_{2N}(t)$ при цьому буде ортогональним не лише до $x_{k,m}(t), (k,m) \in ([0,N]\times[0,N]) \setminus \{(N,N)\}$, але і до $x_{k,m}(t)$ при $(k,m) \in \big\{(k,m) \in \mathbb{Z}_+, k+ + m \leqslant 2N-1\big\}$. Тому при побудові апроксиманти Паде функцій вигляду (6) має сенс вибирати коефіцієнти чисельника не з множини

$$\mathscr{N} = ([0,2N]\times[0,2N]) \setminus ([N,2N]\times[N,2N]),$$

як пропонується в теоремі 1, а з множини (див. рис. 4)

$$\mathscr{N}_1 = \big\{(k,m)\colon k+m \leqslant 4N-1\big\} \backslash \big\{(k,m)\colon k,m \geqslant N\big\}.$$

Нехай функція $f(z,w)$ має вигляд (6). Тоді

$$Y_{N,N}(t) = P_{2N}(t),$$

де $P_{2N}(t)$ — многочлен степеня $2N$, ортогональний на $[0,1]$ за мірою $d\mu(t)$.

Запишемо його у вигляді

$$P_{2N}(t) = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j.$$

Отже, маємо

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j.$$

З цієї рівності коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}, k,m = \overline{0,N}$, можна визначити багатьма способами. Оскільки функція $f(z,w)$ симетрична, нас будуть цікавити тільки симетричні розв'язки. Виокремимо з них наступні три:

Спосіб (a). Будемо вибирати коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$ таким чином, щоб при $k+m = k_1+m_1$ виконувались рівності

$$c_{k,m}^{(N,N)} = c_{k_1,m_1}^{(N,N)}.$$

У цьому випадку ортогональний многочлен $P_{2N}(t)$ можна розкласти таким чином:

$$P_{2N}(t) = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N-k} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{m=N-k+1}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} t^m \sum_{k=0}^{m} c_{k,m-k}^{(N,N)} + t^{N+1} \sum_{m=0}^{N-1} t^m \sum_{k=0}^{N-m-1} c_{N-k,m+k+1}^{(N,N)}.$$

В результаті отримаємо співвідношення

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+m+1} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } \ k+m \leqslant N, \\ \dfrac{1}{2N-k-m+1} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } \ k+m > N. \end{cases}$$

Спосіб (b). Будемо вибирати коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$ таким чином, щоб коефіцієнти з номерами, що знаходяться строго всередині квадрата $[0,N]\times[0,N]$, були нульовими, тобто

$$\sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j = \sum_{k=0}^{N-1} c_{k,0}^{(N,N)} t^k + t^N \sum_{m=0}^{N} c_{N,m}^{(N,N)} t^m + \sum_{m=1}^{N-1} c_{0,m}^{(N,N)} t^m + t^N \sum_{k=0}^{N-1} c_{k,N}^{(N,N)} t^k,$$

так що

$$c_{0,0}^{(N,N)} = p_0^{(2N)}, \qquad c_{N,N}^{(N,N)} = p_{2N}^{(2N)},$$

а для решти коефіцієнтів

$$c_{k,0}^{(N,N)} = \frac{1}{2} p_k^{(2N)}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$c_{N,m}^{(N,N)} = \frac{1}{2} p_{N+m}^{(2N)}, \quad m = \overline{0, N-1},$$

$$c_{0,m}^{(N,N)} = \frac{1}{2} p_m^{(2N)}, \quad m = \overline{1, N-1},$$

$$c_{k,N}^{(N,N)} = \frac{1}{2} p_{k+N}^{(2N)}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Спосіб (*c*). Цей спосіб відрізняється від способу (*a*) тим, що на відрізках $k + m = p$, що лежать у квадраті $[0, N] \times [0, N]$, будемо вважати коефіцієнти не рівними між собою, а пропорціональними біноміальним коефіцієнтам, так що

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+m}} \dbinom{k+m}{k} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } \ k + m \leqslant N, \\[2ex] \dfrac{1}{2^{2N-k-m}} \dbinom{2N-k-m}{N-k} p_{k+m}^{(2N)} & \text{при } \ k + m > N. \end{cases}$$

Побудуємо апроксиманти вказаних типів для функцій вигляду (6). Зазначимо, що для вибраної конфігурації області $\mathscr{N}_1$ в теоремі $1'$ ми повинні покласти $x(k) = 4N - 1 - k$, $y(m) = 4N - 1 - m$.

Для випадку (*a*) отримаємо

$$Q_{N,N}(z, w) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=N-j}^{N} \frac{1}{2N - j - n + 1} p_{2N-j-n}^{(2N)} z^j w^n + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-j-1} \frac{1}{j + n + 1} p_{2N-j-n}^{(2N)} z^j w^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m+1} p_m^{(2N)} \sum_{j=0}^{m} z^{N-j} w^{N-(m-j)} + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m+1} p_{2N-m}^{(2N)} \sum_{j=0}^{m} z^j w^{m-j}.$$

Підрахуємо чисельник:

$$P_{\mathscr{N}_1}(z, w) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=N-m}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N} \sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{j+n+1} s_{k+j-N,m+n-N} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=N-k}^{N-1} \sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{2N-j-n+1} s_{k+j-N,m+n-N} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{j+n+1} s_{k+j,m+n-N} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{2N-j-n+1} s_{k+j,m+n-N} +$$

$$+ w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{k} \sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{j+n+1} s_{k+j-N,m+n} +$$

$$+ w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{p_{j+n}^{(2N)}}{2N-j-n+1} s_{k+j-N,m+n}.$$

Для випадку (b) одержимо

$$Q_{N,N}(z,w) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_{j,n}^{(N,N)} z^{N-j} w^{N-n} =$$

$$= c_{0,0}^{(N,N)} z^N w^N + c_{N,N}^{(N,N)} + z^N \sum_{n=1}^{N} c_{0,n}^{(N,N)} w^{N-n} + w^N \sum_{j=1}^{N} c_{j,0}^{(N,N)} z^{N-j} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N-1} c_{N,n}^{(N,N)} w^{N-n} + \sum_{j=0}^{N-1} c_{j,N}^{(N,N)} z^{N-j} =$$

$$= p_0^{(2N)} z^N w^N + p_{2N}^{(2N)} + \frac{1}{2} z^N \sum_{n=1}^{N} p_n^{(2N)} w^{N-n} + \frac{1}{2} w^N \sum_{j=1}^{N} p_j^{(2N)} z^{N-j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} p_{N+n}^{(2N)} w^{N-n} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} p_{N+j}^{(2N)} z^{N-j}.$$

Обчислимо чисельник:

$$P_{\mathcal{N}_1}(z,w)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m}c_{N-j,N-n}^{(N,N)}s_{k-j,m-n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N}c_{N-j,n}^{(N,N)}s_{k-j,m+n}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m}c_{j,N-n}^{(N,N)}s_{k+j,m-n}=$$

$$=p_{2N}^{(2N)}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^ms_{k,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^ms_{k,m+N}+\right.$$

$$\left.+\,z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^ms_{k+N,m}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{n=1}^{m}p_{2N-n}^{(2N)}s_{k,m-n}+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{n=1}^{m}p_{2N-n}^{(2N)}s_{k+N,m-n}+\right.$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=1}^{N-1}p_{N+n}^{(2N)}s_{k,m+n}+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=1}^{k}p_{2N-j}^{(2N)}s_{k-j,m}+$$

$$\left.+\,z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=1}^{N}p_{j+N}^{(2N)}s_{k+j,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{j=1}^{k}p_{2N-j}^{(2N)}s_{k-j,m+N}\right\}.$$

Для випадку (c), як і у випадку (a), отримаємо

$$Q_{N,N}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{2N-j-n}^{(2N)}z^jw^n+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{2N-j-n}^{(2N)}z^jw^n,$$

$$P_{\mathcal{N}_1}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{m} \sum_{n=N-m}^{N-j} \frac{1}{2^{j+n}} \binom{j+n}{n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j,m+n-N} +$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=N-j+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \binom{2N-j-n}{N-n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j,m+n-N} +$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{k} \sum_{j=N-k}^{N-n} \frac{1}{2^{j+n}} \binom{j+n}{n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n} +$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=N-n+1}^{N} \frac{1}{2^{2N-j-n}} \binom{2N-j-n}{N-n} p_{j+n}^{(2N)} s_{k+j-N,m+n}.$$

Таким чином, встановлено наступний результат.

Теорема 2. *Для аналітичної функції* $f(z,w)$, *що має інтегральне зображення* (7), *при довільному* $N \in \mathbb{N}$ *раціональні функції*

$$\pi_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q_{N,N}(z,w)}$$

такі, що

$$Q_{N,N}(z,w) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n,$$

$$P_{\mathscr{N}_1}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+w^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n},$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$, $k,m=\overline{0,N}$, *задовольняють рівності*

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} t^{k+m} = \sum_{j=0}^{2N} p_j^{(2N)} t^j,$$

де $p_j^{(2N)}$ — *коефіцієнти алгебраїчного многочлена* $P_{2N}(t)$, *ортогонального на* $[0,1]$ *з вагою* $d\mu(t)$, *матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду* (3) *для функції* (6) *для всіх* $(j,n) \in \mathscr{E} = \left\{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2,\ j+n \leqslant 4N-1\right\}$. *Зокрема, це справедливо для наступних раціональних функцій*:

$$\pi^{(a)}_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w)=\frac{P^{(a)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q^{(a)}_{N,N}(z,w)},$$

де

$$Q^{(a)}_{N,N}(z,w)=$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}\frac{1}{j+n+1}p^{(2N)}_{2N-j-n}z^jw^n+\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}\frac{1}{2N-j-n+1}p^{(2N)}_{2N-j-n}z^jw^n,$$

$$P^{(a)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{p^{(2N)}_{j+n}}{j+n+1}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{p^{(2N)}_{j+n}}{2N-j-n+1}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-m-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{p^{(2N)}_{j+n}}{j+n+1}s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-m-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{p^{(2N)}_{j+n}}{2N-j-n+1}s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-k-1}z^kw^m\sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n}\frac{p^{(2N)}_{j+n}}{j+n+1}s_{k+j-N,m+n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-k-1}z^kw^m\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N}\frac{p^{(2N)}_{j+n}}{2N-j-n+1}s_{k+j-N,m+n},$$

$$\pi^{(b)}_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}(z,w)=\frac{P^{(b)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q^{(b)}_{N,N}(z,w)}.$$

Тут у свою чергу

$$Q^{(b)}_{N,N}(z,w)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(z^n+w^n)\left(p^{(2N)}_n z^{N-n}w^{N-n}+p^{(2N)}_{2N-n}\right),$$

$$P^{(b)}_{\mathscr{N}_1}(z,w)=p^{(2N)}_{2N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^ms_{k,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^ms_{k,m+N}+\right.$$

$$\left.+\,z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^ms_{k+N,m}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^k w^m\sum_{n=1}^{m}p_{2N-n}^{(2N)}s_{k,m-n}+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^k w^m\sum_{n=1}^{m}p_{2N-n}^{(2N)}s_{k+N,m-n}+\right.$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^k w^m\sum_{n=1}^{N-1}p_{N+n}^{(2N)}s_{k,m+n}+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^k w^m\sum_{j=1}^{k}p_{2N-j}^{(2N)}s_{k-j,m}+$$

$$\left.+\,z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^k w^m\sum_{j=1}^{N}p_{j+N}^{(2N)}s_{k+j,m}+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^k w^m\sum_{j=1}^{k}p_{2N-j}^{(2N)}s_{k-j,m+N}\right\},$$

$$\pi_{\mathscr{N}_1,\mathscr{D}}^{(c)}(z,w)=\frac{P_{\mathscr{N}_1}^{(c)}(z,w)}{Q_{N,N}^{(c)}(z,w)},$$

де

$$Q_{N,N}^{(c)}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{2N-j-n}^{(2N)}z^j w^n+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{2N-j-n}^{(2N)}z^j w^n,$$

$$P_{\mathscr{N}_1}^{(c)}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^k w^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^k w^m\sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n-N}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^k w^m\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^k w^m\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j,m+n-N}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^k w^m\sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^k w^m\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}p_{j+n}^{(2N)}s_{k+j-N,m+n}.$$

***Зауваження* 2.** Для отриманих апроксимацій будемо мати

$$\dim \mathscr{D}^{(a)} = \dim \mathscr{D}^{(c)} = (N+1)^2,$$

$$\dim \mathscr{D}^{(b)} = 4N,$$

$$\dim \mathscr{N}_1 = \frac{2N(6N+1)}{2},$$

$$\dim \mathscr{E} = \frac{4N(4N+1)}{2}.$$

Очевидно,

$$\dim \mathscr{E} - (\dim \mathscr{N}_1 + \dim \mathscr{D}^{(a)} - 1) = N(N-1),$$

$$\dim \mathscr{E} - (\dim \mathscr{N}_1 + \dim \mathscr{D}^{(b)} - 1) = 2(N-1)\left(N - \frac{1}{2}\right).$$

Ці величини при $N > 1$ будуть строго більші за 0. Це, вочевидь, викликано тією обставиною, що функції вигляду (6) зображаються у вигляді лінійних комбінацій функцій однієї змінної (див., наприклад, [15]).

Перейдемо тепер до розгляду наближення функції $f(z, w)$ вигляду (6) для випадку ваги

$$d\mu(t) = (1-t)^{\sigma} t^{\nu} dt, \quad \delta,\, \nu > -1.$$

У цьому випадку ортогональний многочлен, що фігурує в формулюванні теореми 2, як вже зазначалося, буде збігатися з точністю до сталого множника з ортонормованим зсунутим на $[0, 1]$ многочленом Якобі степеня $2N$. Коефіцієнти цього многочлена можна записати в явному вигляді (див. [16, с. 581]). Будемо мати

$$P_{2N}(t; \sigma, \nu) = C_N \sum_{m=0}^{2N} (-1)^m t^m \binom{2N}{m} \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + m)}{\Gamma(\sigma + 1 + m)}.$$

Отже, отримаємо

$$p_k^{(2N)} = (-1)^k \binom{2N}{k} \frac{\Gamma(2N + \sigma + \nu + 1 + k)}{\Gamma(\sigma + 1 + k)}.$$

Це дозволяє на основі теореми 2 ефективно будувати раціональні апроксиманти описаного раніше вигляду для рядів Аппеля (9), а саме, має місце наступний результат (наведемо його лише щодо апроксимант, що отримуються за варіантом (c)).

Теорема 3. *Для гіпергеометричного ряду Аппеля* (9) *при будь-якому* $N \in \mathbb{N}$ *раціональна функція*

$$\pi^{(c)}_{\mathscr{N}_1, \mathscr{D}}(z, w) = \frac{P^{(c)}_{\mathscr{N}_1}(z, w)}{Q^{(c)}_{N,N}(z, w)},$$

де

$$Q_{N,N}^{(c)}(z,w)=\sum_{j=0}^{N}\sum_{n=N-j}^{N}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}\binom{2N}{2N-j-n}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-j-n)}{\Gamma(2N+\sigma+1-j-n)}z^jw^n+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-j-1}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}\binom{2N}{2N-j-n}\frac{\Gamma(4N+\sigma+\nu+1-j-n)}{\Gamma(2N+\sigma+1-j-n)}z^jw^n,$$

$$P_{\mathcal{N}_1}^{(c)}(z,w)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=N-m}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}\binom{2N}{j+n}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\frac{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}z^kw^m\sum_{j=N-k}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}\binom{2N}{j+n}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\frac{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-2N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{m}\sum_{n=N-m}^{N-j}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}\binom{2N}{j+n}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+z^N\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m}z^kw^m\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=N-j+1}^{N}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}\binom{2N}{j+n}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=0}^{k}\sum_{j=N-k}^{N-n}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{j+n}}\binom{j+n}{n}\binom{2N}{j+n}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)}\frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)}+$$

$$+w^N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k}z^kw^m\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{j=N-n+1}^{N}(-1)^{j+n}\frac{1}{2^{2N-j-n}}\binom{2N-j-n}{N-n}\binom{2N}{j+n}\times$$

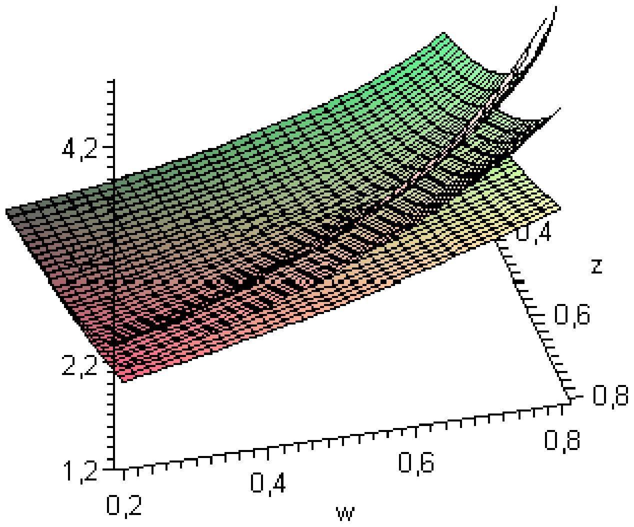

Рис. 5

$$\times \frac{\Gamma(2N+\sigma+\nu+1+j+n)}{\Gamma(\sigma+1+j+n)} \frac{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+j+m+n-N+\nu+\sigma+2)},$$

матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (9) *для всіх* $(j,n) \in \mathscr{E} = \left\{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2,\ j+n \leqslant 4N-1\right\}$.

Щоб проілюструвати цей результат, розглянемо частинний випадок $\nu = \sigma = 0$ і варіант апроксимації (c). Тоді, як було зазначено раніше, функція $f(z,w)$ матиме вигляд

$$f(z,w) = \frac{\ln \dfrac{1-z}{1-w}}{w-z}. \tag{10}$$

Покладемо спочатку $N = 1$. Отримаємо раціональну апроксимацію

$$\frac{P_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q_{1,1}(z,w)} = \frac{w^3+z^3+w^2+z^2+12}{2zw-6z-6w+12}.$$

Порівняємо значення наближуваної функції (10), частинної суми степеневого ряду

$$P_3(z,w) = 1 + \frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{3}(z^2+zw+w^2) + \frac{1}{4}(z^3+z^2w++zw^2+w^3)$$

та побудованої нами апроксимації в точках квадрата $[0.8] \times [0.8]$ (див. табл. 1 та рис. 5).

Візьмемо тепер $N = 2$. Отримаємо раціональну функцію

$$\frac{P_{\mathscr{N}_1}(z,w)}{Q_{2,2}(z,w)} = (60z^7 + 60w^7 - 48z^6w - 48zw^6 + 68z^6 + 68w^6 - 56z^5w - 56zw^5 +$$

$$+79z^5 + 79w^5 - 67z^4w - 67zw^4 + 96z^4 + 96w^4 - 84z^3w - 84zw^3 + 130z^3 + 130w^3 -$$

$$-130z^2w - 130zw^2 + 260z^2 + 260w^2 - 40zw - 840z - 840w + 1680)\times$$

***Таблиця* 1**

w	z				
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	1 1 1.000000000	1.115717756 1.115333333 1.115555556	1.277064060 1.269333333 1.273333333	1.527151220 1.474000000 1.497142857	2.011797390 1.741333333 1.826666667
0.2	1.115717756 1.115333333 1.115555556	1.25 1.247999999 1.249586777	1.438410362 1.423333333 1.433644860	1.732867952 1.653333333 1.696774194	2.310490602 1.949999999 2.088607595
0.4	1.277064060 1.269333333 1.273333333	1.438410362 1.423333333 1.433644860	1.666666667 1.623999999 1.655319149	2.027325540 1.883333333 1.975308642	2.746530722 2.213333333 2.458823529
0.6	1.527151220 1.474000000 1.497142857	1.732867952 1.653333333 1.696774194	2.027325540 1.883333333 1.975308642	2.5 2.176000000 2.382608696	3.465735903 2.543333333 3.010526316
0.8	2.011797390 1.741333333 1.826666667	2.310490602 1.949999999 2.088607595	2.746530722 2.213333333 2.458823529	3.465735903 2.543333333 3.010526316	5 2.951999999 3.886956522

$$\times(24z^2w^2 - 240zw^2 - 240z^2w + 540z^2 + 540w^2 + 1080zw - 1680z - 1680w + 1680)^{-1}.$$

Значення наближуваної функції (10), частинної суми степеневого ряду

$$P_7(z,w) = 1 + \frac{1}{2}(z+w) + \frac{1}{3}(z^2 + zw + w^2) +$$

$$+\frac{1}{4}(z^3 + z^2w + zw^2 + w^3) + \frac{1}{5}(z^4 + z^3w + z^2w^2 + zw^3 + w^4) +$$

$$+\frac{1}{6}(z^5 + z^4w + z^3w^2 + z^2w^3 + zw^4 + w^5) + \frac{1}{7}(z^6 + z^5w + z^4w^2 + z^3w^3 + z^2w^4 + zw^5 + w^6) +$$

$$+\frac{1}{8}(z^7 + z^6w + z^5w^2 + z^4w^3 + z^3w^4 + z^2w^5 + zw^6 + w^7) =$$

$$= \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k} z^m w^{k-m}$$

та побудованої апроксимації наведено в табл. 2 та на рис. 6.

Таблиця 2

w	z				
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	1	1.115717756	1.277064060	1.527151220	2.011797390
0.0	1	1.115717409	1.276949943	1.523044343	1.941530209
	1.000000000	1.115717633	1.277013333	1.524834792	1.960940469
	1.115717756	1.25	1.438410362	1.732867952	2.310490602
0.2	1.115717409	1.249996798	1.438182476	1.726707809	2.216801140
	1.115717633	1.249999930	1.438370451	1.730591604	2.254184731
	1.277064060	1.438410362	1.666666667	2.027325540	2.746530722
0.4	1.276949943	1.438182476	1.665574402	2.015233143	2.606110476
	1.277013333	1.438370451	1.666626430	2.025280391	2.684240361
	1.527151220	1.732867952	2.027325540	2.5	3.465735903
0.6	1.523044343	1.726707809	2.015233143	2.458009601	3.196987809
	1.524834792	1.730591604	2.025280391	2.497044927	3.397215406
	2.011797390	2.310490602	2.746530722	3.465735903	5
0.8	1.941530209	2.216801140	2.606110476	3.196987809	4.161139198
	1.960940469	2.254184731	2.684240361	3.397215406	4.854606766

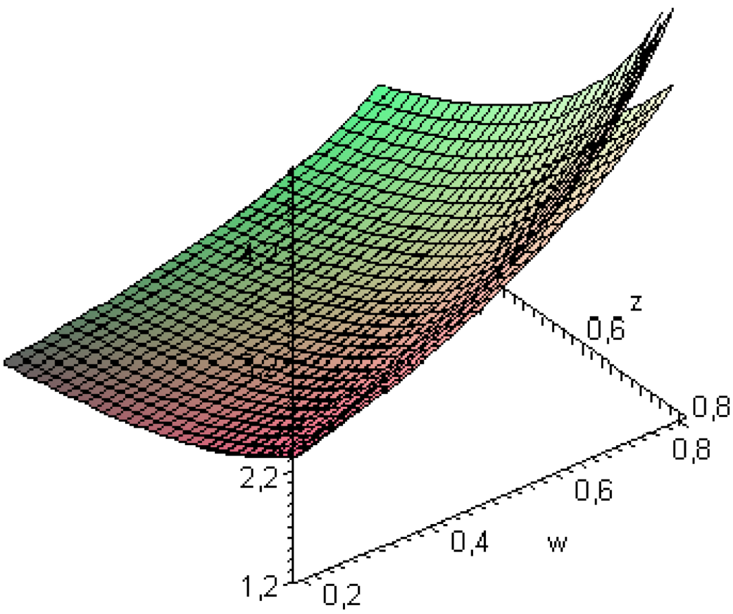

Рис. 6

1. *Дзядик В.К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. – 1981. – **6**. – С. 8 – 12.
2. *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 222 с.
3. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Alabiso C., Butera P.* N-variable rational approximants and method of moments // J. Math. Phys. – 1975. – **16**, № 4. – P. 840 – 845.
5. *Chisholm J. S.* Rational approximants defined from double power series // Math. Comput. – 1973. – **27**. – P. 841 – 848.
6. *Graves-Morris P. R., Hughes Jones R.* An analysis of two variable rational approximants // J. Comput. and Appl. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 41 – 48.
7. *Cuyt A.* How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case? // J. Comput. and Appl. Math. – 1999. – **105**, № 1-2. – P. 25 – 50.
8. *Cuyt A., Driver K., Tan J., Verdonk B.* Exploring multivariate Padé approximants for multiple hypergeometric series // Adv. Comput. Math. – 1999. – **10**, № 1. – P. 29 – 49.
9. *Hughes Jones R.* General rational approximants in N variables // J. Approxim. Theory. – 1976. – **16**. – P. 201 – 233.
10. *Lutterodt C.* A two-dimensional analogue of Padé approximant theory // J. Phys. A.: Math. – 1974. – **7**. – P. 1027 – 1037.
11. *Zhou P.* Explicit construction for multivariate Padé approximants // J. Comput. and Appl. Math. – 1997. – **79**. – P. 1 – 17.
12. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, 2010. – 217 с.
13. *Бейтмен Г, Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
14. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
15. *Cuyt A., Tan J., Zhou P.* General order multivariate Padé approximants for pseudo-multivariate functions // Math. Comput. – 2006. – **75**, № 254. – P. 727 – 741.
16. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Одержано 25.06.12