УДК 517.9

Є. Білокопитов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
С. Ф. Коляда (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТРАНЗИТИВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ НА ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРАХ

In the present paper, we consider a classical problem of topological dynamics, i.e., the problem of existence of nonequivalent definitions of topological transitivity and, in particular, the condition imposed on the dynamical system, which follows from all available definitions of this kind. The complete classification of these dynamical systems is the main result of our investigations.

Рассматривается классическая проблема топологической динамики — существование неэквивалентных определений топологической транзитивности, в частности условие на динамическую систему, которое следует из всех имеющихся определений. Полная классификация таких динамических систем является основным результатом данной работы.

1. Вступ. Нехай X — топологічний простір, а $f\colon X \to X$ — неперервне відображення (коротко будемо писати $f \in S(X)$ — простору всіх неперервних відображень X в себе — та позначати відповідну динамічну систему, що задається ітераціями цього відображення, через (X, f)). Розглянемо наступні дві властивості:

(TT) для довільної пари непорожніх відкритих[1] множин U та V в X існує натуральне число n таке, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$,

(DO) існує точка $x_0 \in X$ така, що її орбіта $\{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$ є скрізь щільною в X.

Слід зауважити, що, взагалі кажучи, далеко не всі топологічні простори допускають відображення, що мають такі властивості. Так, простір $X = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$ (зі звичайною метрикою на відрізку $[0,1]$) не допускає неперервних відображень з властивістю (TT), а довільний не сепарабельний простір — з властивістю (DO). Але коли вони мають місце, то здебільшого властивість (TT) беруть за означення *топологічної транзитивності*, хоча деякі автори беруть замість неї (DO). У цьому пункті ми також будемо говорити про топологічну транзитивність динамічної системи, коли вона має властивість (TT).

Довільну точку зі скрізь щільною орбітою будемо називати *транзитивною точкою*. Точку, що не є транзитивною, назвемо *нетранзитивною*. Множину транзитивних чи нетранзитивних точок динамічної системи (X, f) будемо позначати через tr_f чи intr_f відповідно.

Зауважимо, що часто, коли ми говоримо про якусь властивість динамічної системи (X, f), чи використовуємо позначення для неї, будемо автоматично використовувати це і для відповідного відображення f без додаткових означень.

Взагалі, властивості (TT) та (DO) є незалежними. Наприклад, візьмемо простір $X = \{0\} \cup \cup \left\{\dfrac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\right\}$ зі звичайною метрикою та $f\colon X \to X$ означене так, що $f(0) = 0$ і $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Легко бачити, що відображення f є неперервним. Точка $x_0 = 1$ є

[1]Далі будемо використовувати вираз „відкритна множина” замість „непорожня відкрита множина”.

транзитивною точкою для (X, f), але система не топологічно транзитивна $\left(\text{візьмемо, напри-}\right.$ клад, $\left.U = \left\{\frac{1}{2}\right\},\ V = \{1\}\right)$. Тобто з властивості (DO) не випливає властивість (TT).

З властивості (TT) також не випливає властивість (DO). Для цього досить взяти, скажімо, простір $I = [0, 1]$ і стандартне тент-відображення $g(x) = 1 - |2x - 1|$ на I. Нехай X — множина всіх періодичних точок g і $f = g_{|X}$ (точка x є *періодичною* для g, якщо $g^n(x) = x$ для деякого натурального n). Тоді система (X, f) не задовольняє умову (DO), оскільки множина X скрізь щільна в I, в той час як орбіта кожної періодичної точки є скінченною. Але умова (TT) має місце. Це наслідок того факту, що для будь-якого невиродженого інтервалу J в I існує додатне ціле k з $g^k(J) = I$. Таким чином, як тільки J_1 і J_2 — відкритні інтервали в I, то існує періодична орбіта g, що перетне J_1 та J_2. Це дає умови (TT) для (X, f).

Слід зазначити, що за додаткових умов на фазовий простір (чи на відображення) означення (TT) та (DO) еквівалентні одне одному. Насправді має місце такий результат, що належить S. Silverman [8]: якщо метричний простір X без ізольованих точок, то з (DO) випливає (TT). Якщо X — сепарабельний простір другої категорії за Бером, то з (TT) випливає (DO). Також на довільних метричних просторах властивості (TT) та (DO) еквівалентні для сюр'єктивних відображень. Якщо компактний метричний простір допускає транзитивне відображення (тобто якщо існує неперервне відображення f на просторі X, що задовольняє (TT)), то X не має ізольованих точок тоді і тільки тоді, коли простір є нескінченним.

Має місце наступна теорема (див. [1, 6]).

Теорема 1.1. *Нехай (X, f) — динамічна система, X — компактний гаусдорфовий простір, а $f\colon X \to X$ є неперервним. Тоді наступні властивості є еквівалентними*:

f — топологічно транзитивне відображення;

для довільної пари відкритних множин U та V в X існує невід'ємне n таке, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$;

для довільної відкритної множини U в X $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)} = X$;

для довільної відкритної множини U в X $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)} = X$;

для довільної пари відкритних множин U та V в X існує додатне n таке, що $f^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing$;

для довільної пари відкритних множин U та V в X існує невід'ємне n таке, що $f^{-n}(U) \cap \cap V \neq \varnothing$;

для довільної відкритної множини U в X $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)} = X$;

для довільної відкритної множини U в X $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)} = X$;

якщо $E \subset X$ — замкнена множина і $f(E) \subset E$, то $E = X$ або E є ніде не щільною в X;

якщо $U \subset X$ — відкрита множина і $f^{-1}(U) \subset U$, то $U = \varnothing$ або U є скрізь щільною в X;

множина tr_f є G_δ-щільною;

відображення f є сюр'єктивним, а множина tr_f — непорожньою.

Далі, з усіх наведених вище умов випливає, що множина tr_f є непорожньою.

Якщо, додатково, (X, f) задано на просторі без ізольованих точок, то остання умова є також еквівалентною всім попереднім.

Виникає природне запитання: а якими будуть співвідношення між названими властивостями у випадку загального топологічного простору?

Нехай далі X — топологічний простір, а $f \in S(X)$. У роботі [7], яка значною мірою ініціювала написання даної статті, було доведено наступне твердження.

Теорема 1.2. *Якщо існує така точка $x \in X$, що орбіта точки $f(x)$ є скрізь щільною в X, то відображення f є топологічно транзитивним.*

Ця теорема вказує на важливість урахування „нульового моменту часу" при характеризації транзитивних властивостей відображення. З огляду на це візьмемо наступні дві властивості за означення топологічної транзитивності (які, згідно з теоремою 1.1, є еквівалентними для динамічних систем на компактних гаусдорфових просторах):

$(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}}$ для довільної пари відкритних множин U та V в X існує додатне (ціле) число n таке, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$,

$(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}_0}$ для довільної пари відкритних множин U та V в X існує невід'ємне (ціле) число n таке, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Відповідно, якщо має місце властивість $(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}}$, то динамічну систему (X, f) будемо називати (топологічно) $\mathbb{N}$-транзитивною (чи просто топологічно транзитивною), та $\mathbb{N}_0$-транзитивною, якщо має місце властивість $(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}_0}$. Очевидно, $\mathbb{N}$-транзитивні динамічні системи є $\mathbb{N}_0$-транзитивними.

Введемо для зручності ряд нових позначень. Орбітою підмножини $A \subset X$ будемо називати $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(A)$ та позначати через $f^+(A)$, відповідно множину всіх її прообразів $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(A)$ — через $f^-(A)$, а їх об'єднання $f^+(A) \bigcup f^-(A)$ — через $f^{\pm}(A)$. У випадку, коли множина складається з однієї точки ($A = \{x\}$), замість $(\{x\})$ будемо писати просто (x).

Наступні твердження вказують на зв'язки між (TT) та (DO) в означеннях транзитивності (їх доведення див. у пункті 2).

Твердження 1.1. *Наступні властивості є еквівалентними*:

(i) f — $\mathbb{N}_0$-*транзитивне відображення*;

(ii) *для довільної відкритної множини U в X* $\overline{f^+(U)} = X$;

(iii) *для довільної відкритної множини U в X* $\overline{f^-(U)} = X$.

Твердження 1.2. *Наступні властивості є еквівалентними*:

(i) f — $\mathbb{N}$-*транзитивне відображення*;

(ii) *для довільної відкритної множини U в X* $\overline{f^+\left(f(U)\right)} = X$;

(iii) *для довільної відкритної множини U в X* $\overline{f^-\left(f^{-1}(U)\right)} = X$.

У випадку гомеоморфізмів на некомпактних (метричних) просторах в означеннях транзитивного (чи мінімального) гомеоморфізму (як правило, через властивість (DO)) використовується скрізь щільність повної орбіти точки простору. Як деяку аналогію розглянемо наступну властивість транзитивності:

$(\mathrm{TT})_{\mathbb{Z}}$ для довільної пари відкритних множин U та V в X існує ціле число n таке, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Очевидно, що з властивостей $(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}}$, $(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}_0}$ динамічної системи випливає її $\mathbb{Z}$-транзитивність (тобто виконання для неї властивості $(\mathrm{TT})_{\mathbb{Z}}$).

Це означення ми ввели ще і з наступних міркувань: „множинні" означення та критерії для обох введених перед цим транзитивностей виявляють симетрію між поведінкою образів та прообразів (тобто між „майбутнім" та „минулим"). Саме тому ми будемо вивчати такий клас динамічних систем, означення якого є аналогічним означенню топологічної транзитивності, але в той же час є симетричним само по собі.

Основною метою даної статті є класифікація $\mathbb{Z}$-транзитивних динамічних систем. У пунктах 2 – 7 досліджуються властивості означених класів транзитивних динамічних систем. Однак, перед тим як переходити до їх читання, рекомендуємо ознайомитись із пунктами 8 – 10, які є допоміжними для розуміння результатів основних пунктів. У пункті 8 вивчаються деякі властивості орбіт та інваріантних множин, у пункті 9 — властивості так званих *множин візитів* та *блукаючих множин* (див. означення у пункті 2). В цих двох пунктах розглядаються самовідображення просторів без жодних додаткових структур на них. У пункті 10 наведено деякі допоміжні топологічні факти, зокрема уточнення результатів пунктів 8 та 9 для випадку, коли простір є топологічним, а відображення — неперервним.

2. Про основні співвідношення між різними властивостями транзитивності динамічних систем. Для підмножин A та B простору X означимо так звані *множини візитів* (див. також [2]) множини A до множини B: $n_f(A,B) := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid A \bigcap f^{-n}(B) \neq \varnothing\}$, $N_f(A,B) :=$ $:= \{n \in \mathbb{Z} \mid A \bigcap f^{-n}(B) \neq \varnothing\}$. Легко також бачити, що $n_f(A,B) = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid f^n(A) \bigcap B \neq \varnothing\}$, а $N_f(A,B) = \{n \in \mathbb{Z} \mid f^n(A) \bigcap B \neq \varnothing\}$. Якщо з контексту зрозуміло, про яку f іде мова, нижнім індексом біля n_f та N_f можна нехтувати.

Зрозуміло, що $n(\cdot,\cdot)$ та $N(\cdot,\cdot)$ — це відображення з аргументами в $2^X \times 2^X$ та значеннями в $2^{\mathbb{Z}}$. Далі ми часто будемо проводити із множинами цілих чисел не тільки звичайні теоретико-множинні дії, а ще й арифметичні. Тобто, наприклад, якщо $M, N \subset \mathbb{Z}$, а $k \in \mathbb{Z}$, то $M + N :=$ $:= \{m + n \mid m \in M,\ n \in N\}$, $M + k := \{m + k \mid m \in M\}$. Ми також будемо застосовувати дію множення для $M, N \subset \mathbb{Z}$ та $k \in \mathbb{Z}$.

Використавши ці введені позначення, запишемо означення трьох властивостей транзитивності у наступному вигляді: система є $\mathbb{N}$-, $\mathbb{N}_0$- та $\mathbb{Z}$-транзитивною, якщо для довільної пари відкритних множин U та V в X $n(U,V) \setminus \{0\} \neq \varnothing$, $n(U,V) \neq \varnothing$ та $N(U,V) \neq \varnothing$ відповідно.

Перейдемо до доведення дещо розширених версій тверджень 1.1 та 1.2.

Твердження 2.1. *Наступні властивості є еквівалентними*:

(i) f — $\mathbb{N}_0$-*транзитивне відображення*;

(ii) *для довільної відкритної множини* U *в* X $\overline{f^+(U)} = X$;

(iii) *для довільної відкритної множини* U *в* X $\overline{f^-(U)} = X$;

(iv) *якщо* $f(A) \subset A$, *то* A *або скрізь щільна, або ніде не щільна множина*;

(v) *якщо* $F \neq X$ — *замкнена множина та* $f(F) \subset F$, *то* $\operatorname{int} F = \varnothing$;

(vi) *якщо* $f^{-1}(B) \subset B$, *то* $\operatorname{int} B$ *або порожня, або скрізь щільна множина*;

(vii) *якщо* U — *відкритна множина та* $f^{-1}(U) \subset U$, *то* U — *скрізь щільна множина.*

Доведення. Легко бачити, що властивості (ii) та (iii) рівносильні відповідно таким умовам: для довільної пари відкритних множин U та V в X $f^+(U)\bigcap V \neq \varnothing$ та для довільної пари відкритних множин U та V в X $f^-(U)\bigcap V \neq \varnothing$, які очевидно, еквівалентні $\mathbb{N}_0$-транзитивності.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Нехай $f(A) \subset A$. Згідно з твердженням 10.2 $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A}$. Тому з твердження 8.2 маємо $f^+\left(\overline{A}\right) = \overline{A}$, а отже, $\overline{f^+\left(\operatorname{int}\overline{A}\right)} \subset \overline{A}$. Якщо $\operatorname{int}\overline{A} \neq \varnothing$, то $X = \overline{f^+\left(\operatorname{int}\overline{A}\right)} \subset \overline{A}$.

(v) $\Rightarrow$ (ii). Нехай U — відкритна множина. Тоді з твердження 10.2 маємо, що $f\left(\overline{f^+(U)}\right) \subset$ $\subset \overline{f^+(U)}$ і $\varnothing \neq U \subset \operatorname{int}\overline{f^+(U)}$, а отже, $\overline{f^+(U)} = X$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) є очевидним, а для переходу від (vi) (та (vii)) до (iv) (та (v)) відповідно достатньо розглянути множини $F = X\backslash U$, $A = X\backslash B$ та застосувати твердження 8.2.

Твердження 2.2. *Наступні властивості є еквівалентними*:

(i) (X, f) — $\mathbb{N}$-*транзитивна система*;

(ii) *для довільної відкритної множини* U *в* X $\overline{f^+\left(f(U)\right)} = X$;

(iii) *для довільної відкритної множини* U *в* X $\overline{f^-\left(f^{-1}(U)\right)} = X$;

(iv) (X, f) — $\mathbb{N}_0$-*транзитивна система та для довільної відкритної множини* U *в* X $f^{-1}(U) \neq \varnothing$;

(v) (X, f) — $\mathbb{N}_0$-*транзитивна система та* $\overline{f(X)} = X$;

(vi) *для довільних відкритних множин* U, V *в* X *множина* $n(U, V)$ *є нескінченною.*

Доведення. Еквівалентність пунктів (i), (ii) та (iii) доводиться так само, як і в твердженні 2.1. Очевидно також, що пункти (iv) та (v) еквівалентні між собою та випливають з пункту (i), а з пункту (vi) випливає пункт (i).

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Для довільної відкритної U $f^{-1}(U)$ — відкритна множина, тому $\overline{f^-\left(f^{-1}(U)\right)} = X$.

(iv) $\Rightarrow$ (vi). Нехай існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $n(U, V) \subset [0, N]$. $f^{-N-1}\left(V\right) \neq \varnothing$, тому $\varnothing \neq$ $\neq n\left(U, f^{-N-1}\left(V\right)\right) = \left(n(U, V)\backslash\left[0, N\right]\right) - N - 1$. Суперечність.

Множину $A \subset X$ називають *блукаючою*, якщо $N\left(A, A\right) \subset \{0\}$. Топологічно транзитивні системи мають також наступні властивості, що є наслідками попереднього твердження.

***Наслідок* 2.1.** (i) *Якщо* f — $\mathbb{N}$-*транзитивне відображення, то для довільного* $n \in \mathbb{N}_0$ *має місце* $\overline{f^n(X)} = X$.

(ii) *Якщо* f — $\mathbb{N}$-*транзитивне відображення, то для довільної відкритної* U *і довільного* $n \in \mathbb{N}_0$ *має місце* $\overline{f^-\left(f^{-n}(U)\right)} = \overline{f^+\left(f^{-n}(U)\right)} = \overline{f^-\left(f^n(U)\right)} = \overline{f^+\left(f^n(U)\right)} = X$.

(iii) *В* $\mathbb{N}$-*транзитивних системах немає відкритних блукаючих множин.*

Доведення. Пункт (i) є безпосереднім наслідком попереднього твердження.

(ii). Скрізь щільність перших трьох множин є очевидною. Якщо $\overline{f^+\left(f^n(U)\right)} \neq X$, то $V :=$ $:= X\backslash\overline{f^+\left(f^n(U)\right)}$ — відкритна множина та $n(U, V) \subset [0, n]$, що суперечить твердженню.

(iii). Якщо U — відкрита блукаюча множина, то $n\left(U, U\right) \setminus \{0\} = \varnothing$, що дає $U = \varnothing$.

Перейдемо до дослідження властивостей $\mathbb{Z}$-транзитивних динамічних систем та їх зв'язку з $\mathbb{N}$- і $\mathbb{N}_0$-транзитивністю.

Твердження 2.3. *Наступні властивості є еквівалентними*:

(i) f — $\mathbb{Z}$-*транзитивне відображення*;

(ii) *для довільної відкритної множини* U *в* X $\overline{f^{\pm}(U)} = X$;

(iii) *для довільних відкритних* U, V *в* X $f^-(U)\bigcap f^-\left(V\right) \neq \varnothing$;

(iv) X *не містить двох диз'юнктних відкритних зворотно інваріантних множин;*

(v) X *не можна зобразити як об'єднання двох власних замкнених інваріантних підмножин*;

(vi) *для довільних відкритих U, V, W в X виконується „нерівність трикутника”*: $N(U, W) \subset N(U,V) + N(V,W)$.

Доведення. Обидві умови (i) та (ii) еквівалентні тому, що для довільних відкритих U, V $f^{\pm}(U) \bigcap V \neq \varnothing$. Умови (iii) та (iv) еквівалентні, бо кожна зворотна орбіта відкритої множини є зворотно інваріантною та відкритою, а кожна зворотно інваріантна множина слугує зворотною орбітою для самої себе. Умови (iv) та (v) є двоїстими умовами.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Насправді з $\mathbb{Z}$-транзитивності випливає сильніша умова: для довільних відкритих U, V в X $f^{-}(U) \bigcap V \bigcup f^{-}(V) \bigcap U \neq \varnothing$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Розглянемо довільні відкритні U, V в X. За умовою існують такі $m, n \in \mathbb{N}_0$, що $f^{-n}(U) \bigcap f^{-m}(V) \neq \varnothing$. Тоді якщо, наприклад, $n \geq m$, $n \in n(f^{-m}(V), U) \subset n(V,U) + m$, то $n(V,U) \neq \varnothing$. Аналогічно, якщо $m \geq n$, то $n(U,V) \neq \varnothing$, отже, в будь-якому випадку $N(U,V) \neq \varnothing$.

(vi) $\Rightarrow$ (i). Оскільки $0 \in N(U,U) \subset N(U,V) + N(V,U)$, маємо $N(U,V) \neq \varnothing$.

(i) $\Rightarrow$ (vi). Нехай $n \in n(U,W)$. Тоді $S := f^{-n}(W) \bigcap U$ — відкритна, а тому існує $m \in \in N(S,V) \subset N(f^{-n}(W), V) \bigcap N(U,V) \subset (N(W,V) + n) \bigcap N(U,V)$. Звідси $m \in N(U,V)$, $m - n \in N(W,V)$, а отже, $n(U,W) \subset N(U,V) + N(V,W)$. Аналогічно з $n(W,U) \subset N(W,V) + + N(V,U)$ випливає, що $-n(W,U) \subset N(U,V) + N(V,W)$, а отже, $N(U,W) = n(U,W) \bigcup \bigcup (-n(W,U)) \subset N(U,V) + N(V,W)$.

Наступне твердження та його наслідок взято з [4].

Твердження 2.4. *Якщо f — $\mathbb{Z}$-транзитивне відображення, то для довільних відкритних U, V в X існує відкритна W така, що $N(W,W) \subset N(U,U) \bigcap N(V,V)$.*

Доведення. Нехай $n \in N(U,V)$. Тоді якщо $n \geq 0$, то $W := f^{-n}(V) \bigcap U$ — відкритна і $N(W,W) \subset N(f^{-n}(V), f^{-n}(V)) \bigcap N(U,U) \subset N(V,V) \bigcap N(U,U)$. Якщо $n \leq 0$, то для $W := f^{n}(U) \bigcap V$ включення перевіряється аналогічно попередньому.

Наслідок 2.2. *Якщо f — $\mathbb{N}$-транзитивне відображення, то для довільних відкритних в X $U_1, U_2, \ldots, U_n$ $\bigcap_{k=1}^{n} n(U_k, U_k) \neq \{0\}$.*

Доведення. При $n = 1$ це твердження міститься в наслідку 2.1. Далі доведення проводиться за індукцією з використанням твердження 2.4.

Твердження 2.5. *Якщо f — $\mathbb{Z}$-транзитивне відображення, а $Y \subset X$ — канонічно замкнена[2] інваріантна множина, то $g := f_{|Y}$ також $\mathbb{Z}$-транзитивне.*

Доведення. Нехай $U := \operatorname{int} Y$, а V, W — відкритні множини в Y. Оскільки Y — канонічно замкнена множина, то згідно з твердженням 10.4 $V \bigcap U$ і $W \bigcap U$ — відкритні в X і $\varnothing \neq \neq N(V \bigcap U, W \bigcap U) \subset N(V,W)$ ($N_f = N_g$, див. твердження 9.6). Внаслідок довільності V, W має місце $\mathbb{Z}$-транзитивність g.

Як буде видно пізніше, наявність у фазовому просторі X підмножин спеціального типу, які ми будемо називати атомами, є дуже принциповою. Підмножину $A \subset X$ будемо називати *топологічним атомом* (скорочено *атомом*), якщо для довільної $B \subset A$ маємо або $\overline{A} = \overline{B}$, або $\overline{A} = \overline{A \backslash B}$. Очевидно, що всі одноточкові множини та $\varnothing$ є топологічними атомами.

Далі, зокрема, буде доведено, що поняття $\mathbb{N}$- та $\mathbb{N}_0$-транзитивності не збігаються лише на дуже патологічних просторах, а точніше, коли X — не атом, поняття $\mathbb{N}$- та $\mathbb{N}_0$-транзитивності збігаються. Також буде показано, що поняття $\mathbb{N}$- та $\mathbb{Z}$-транзитивності на непатологічних просторах тісно пов'язані, точніше, має місце наступна теорема, що є основним результатом даної роботи.

[2]Така, що є замиканням своєї внутрішності. Аналогічно, відкрита множина називається *канонічно відкритою*, якщо вона є внутрішністю свого замикання.

Теорема 2.1 (зв'язок між $\mathbb{Z}$- та $\mathbb{N}$-транзитивністю). *Нехай (X, f) — $\mathbb{Z}$-транзитивна система. Якщо V — об'єднання всіх відкритих атомів (яке можна зобразити як не більш ніж зліченне об'єднання), то $Y := \overline{X \backslash \overline{V}}$ — інваріантна (можливо, порожня) множина і $\left(Y, f_{|Y}\right)$ — $\mathbb{N}$-транзитивна система.*

Доведення цієї теореми ми наведемо після теореми 7.2.

***Наслідок* 2.3.** *У просторах без відкритних атомів поняття $\mathbb{N}$- та $\mathbb{Z}$-транзитивності збігаються.*

Типовим прикладом таких просторів є гаусдорфів простір без ізольованих точок.

3. Топологічні атоми. Цей пункт присвячено дослідженню властивостей атомів у топологічних просторах.

Твердження 3.1 (характеризація атомів). *Нехай $A \subset X$. Наступні твердження є еквівалентними*:

(i) *A — атом*;

(ii) *$\overline{A}$ — атом*;

(iii) *якщо E, F — замкнені підмножини в X та $A \subset E \bigcup F$, то або $A \subset E$, або $A \subset F$*;

(iv) *якщо $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — замкнені підмножини в X та $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, то існує $k \in \overline{1, n}$ таке, що $A \subset F_k$*;

(v) *якщо $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність замкнених множин в X та $A \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}$, то або існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $A \subset F_n$, або $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k}$*;

(vi) *якщо для U, V, відкритих підмножин в X, $A \bigcap U \neq \varnothing$ та $A \bigcap V \neq \varnothing$, то $V \bigcap A \bigcap U \neq$ $\neq \varnothing$*;

(vii) *якщо для $U_1, U_2, \ldots, U_n$, відкритих підмножин в X, і всіх $k \in \overline{1, n}$ $\;A \bigcap U_k \neq \varnothing$, то $A \bigcap \bigcap_{k=1}^{n} U_k \neq \varnothing$*;

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (iii). Нехай $A \subset E \bigcup F$, але $A \not\subset E$. Тоді $\overline{A} \neq \overline{A \bigcap E}$, тому $\overline{A} = \overline{A \backslash E} \subset F$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Якщо A — не атом, то існує $B \subset A$ таке, що $\overline{A} \neq \overline{B} =: E$, $\overline{A} \neq \overline{A \backslash B} =: F$ і $A \subset \overline{A} = E \bigcup F$.

(iii) $\Rightarrow$ (v). Припустимо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ $A \not\subset F_n$, і покажемо, що тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ $A \subset E_n := \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k}$. Доведемо це за індукцією: $E_1 = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k} \supset A$. Нехай $A \subset E_m$. $E_m = E_{m+1} \bigcup F_m$, тому, оскільки $A \not\subset F_m$, $A \subset E_{m+1}$. Отже, $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n =$ $= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k}$.

(v) $\Rightarrow$ (iv). Достатньо покласти $F_k = \varnothing$ при $k > n$.

(iv) $\Rightarrow$ (vii). Припустимо, що $A \bigcap \bigcap_{k=1}^{n} U_k = \varnothing$. Тоді $A \subset X \backslash \bigcap_{k=1}^{n} U_k = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, де $F_k := X \backslash U_k$. Звідси випливає, що існує $k \in \overline{1, n}$ таке, що $A \subset F_k = X \backslash U_k$. Тобто $A \bigcap U_k = \varnothing$. Суперечність.

(vii) $\Rightarrow$ (vi). Доведення є очевидним.

(vi) $\Rightarrow$ (iii). Потрібно припустити протилежне і розглянути $U = X \backslash E$ та $V = X \backslash F$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). A та $\overline{A}$ одночасно або є, або не є підмножинами замкнених множин. Тому всі включення у (iii) виконуються для A та $\overline{A}$ одночасно.

***Наслідок* 3.1.** *Якщо A — атом, то для всіх відкритих U і таких, що $A \bigcap U \neq \varnothing$, має місце $\overline{A} \subset \overline{U}$, але не навпаки.*

Доведення. $V := X \backslash \overline{U}$ — відкрита множина. $U \bigcap A \bigcap V = \varnothing$, тому $\varnothing = A \bigcap V = A \backslash \overline{U}$. Звідси $A \subset \overline{U}$.

Доведемо, що зворотне твердження не є справедливим. Нехай $X = Y \times Y$, $Y = [-1, 1]$ — простір, що наділений коскінченною топологією. Легко бачити, що Y — атом. Тому з твердження 3.1 випливає, що X також атом. Отже, будь-яка відкритна множина в X є скрізь щільною. Тобто всі підмножини X задовольняють умову (i) твердження 3.1. Водночас з твердження 3.1 випливає, що $A = \{(x, y) \in X \,|xy = 0\}$ не є атомом, бо $E = \{(x, y) \subset X \,|y = 0\}$ та $F = \{(x, y) \subset X \,|x = 0\}$ — дві замкнені множини, що не містять A поодинці, але містять її в об'єднанні.

За деяких умов зворотна імплікація з наслідку 3.1 все ж виконується.

Твердження 3.2. *Нехай* $A \subset X$.

(i) *Якщо* $\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing$, *то* A — *атом тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритної* U, *що перетинає* A, *має місце* $\overline{A} \subset \overline{U}$.

(ii) *Якщо* $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, *то* A — *атом тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритної* U, *що міститься в* A, *має місце* $\overline{A} = \overline{U}$.

(iii) *Будь-яка відкрита підмножина атома* A (*зокрема,* $\operatorname{int}(A)$) *також є атомом.*

(iv) *Якщо атом* A *не є ніде не щільним, то* $\overline{A}$ *є канонічно замкненим.*

Доведення. *Необхідність* (i) доведено в наслідку 3.1, а *необхідність* (ii) є її очевидним наслідком. Пункт (iii) випливає з (ii) та твердження 3.1.

Доведемо *достатність* (i). Нехай U, V — відкриті і такі, що $A \bigcap U \neq \varnothing$ та $A \bigcap V \neq \varnothing$. Згідно з твердженням 10.4 $\operatorname{int} \overline{U \bigcap A \bigcap V} = \operatorname{int} \left(\overline{\overline{U \bigcap A} \bigcap \overline{V}} \right) = \operatorname{int} \overline{U \bigcap A} \bigcap \operatorname{int} \overline{V} = \operatorname{int} \overline{U} \bigcap$ $\bigcap \operatorname{int} \overline{A} \bigcap \operatorname{int} \overline{V} \supset \operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing$. Тому $U \bigcap A \bigcap V \neq \varnothing$. З твердження 3.1 маємо атомарність A.

Достатність (ii). Очевидно $A \subset \overline{\operatorname{int} A}$. Нехай U — відкрита множина, що перетинає A. З твердження 10.4 випливає, що $V := U \bigcap \operatorname{int} A$ — відкритна множина, що міститься в A. За умови $\overline{A} = \overline{V} \subset \overline{U}$. Отже, з (i) випливає, що A — атом.

(iv). З твердження 10.4 випливає, що $A \bigcap \operatorname{int}\left(\overline{A}\right) \neq \varnothing$. Тому $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right) \subset \overline{A} \subset \overline{\operatorname{int}\left(\overline{A}\right)}$.

Введемо на класі відкритих атомів наступне відношення еквівалентності: $S \sim T$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{S} = \overline{T}$.

Наслідок 3.2. (i) *Для відкритних атомів* S *та* T $S \sim T$ *тоді і тільки тоді, коли* $S \bigcap T \neq \varnothing$.

(ii) *Класом, якому належить відкритний атом* T, *є клас відкритних підмножин* $\operatorname{int} \overline{T}$ (*тому довільне об'єднання та скінченний перетин зберігають належність до класу*).

Доведення. (i). *Достатність*. З наслідку 3.1 випливає, що якщо $S \bigcap T \neq \varnothing$, то $\overline{S} = \overline{S \bigcap T} = \overline{T}$. *Необхідність* випливає з твердження 10.4. Умова (ii) випливає з твердження 10.4 та (i).

Твердження 3.3. *Якщо* Y — *замкнена підмножина* X, *то* $A \subset Y$ — *атом в* Y *тоді і тільки тоді, коли* A — *атом в* X.

Доведення випливає з твердження 3.1 та того, що якщо Y — замкнена підмножина X, то замикання A в X та Y збігаються.

Твердження 3.4. *Нехай* Y — *топологічний простір.*

(i) *Якщо* $f \in C\,(X, Y)$ *та* $A \subset X$ — *атом, то* $f(A)$ *також атом.*

(ii) *Якщо* $A \subset X \times Y$ *така, що* $\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing$, *то* A — *атом тоді і тільки тоді, коли його проекції* $\operatorname{pr}_X A$ *та* $\operatorname{pr}_Y A$ *відповідно на* X *та* Y *є атомами.*

Доведення. (i). Нехай $U, V \subset Y$ — відкриті множини такі, що $f(A) \bigcap U \neq \varnothing \neq f(A) \bigcap V$. Тоді $f^{-1}(U) \bigcap A \neq \varnothing \neq f^{-1}(V) \bigcap A$, а $f^{-1}(U)$ та $f^{-1}(V)$ — відкриті. Тому з твердження 3.1 маємо $f^{-1}(U) \bigcap A \bigcap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, а отже, $V \bigcap f(A) \bigcap U \neq \varnothing$. Знову ж згідно з твердженням 3.1 $f(A)$ — атом.

(ii). *Необхідність* є наслідком (i), адже проекції є неперервними відображеннями. Доведемо *достатність*. Нехай $B := \mathrm{pr}_X A$, $C := \mathrm{pr}_Y A$ — атоми і U — відкрита множина, що перетинає A. Легко бачити, що існують V та W, відкриті в X та Y відповідно, такі, що $V \times W \subset U$ та $V \times W \bigcap A \neq \varnothing$, адже такі прямокутники утворюють базу топології. Очевидно $B \bigcap V \neq \varnothing$, звідки з урахуванням наслідку 3.1 $\overline{B} \subset \overline{V}$. Аналогічно доводиться, що $\overline{C} \subset \overline{W}$. Тому $\overline{A} \subset \subset \overline{B} \times \overline{C} \subset \overline{V} \times \overline{W} \subset \overline{U}$. Отже, згідно з твердженням 3.2 A — атом.

У твердженні 3.4 (ii) вимога $\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing$ є суттєвою. В якості контрприкладу підходить множина з наслідку 3.1. Зауважимо також, що водночас твердження 3.1 та 3.4 (i) показують, що атоми є деяким посиленням поняття зв'язних множин.

4. Топологічні атоми в динамічних системах. Нехай (X, f) — динамічна система, T — відкритий атом. Для класифікації поведінки топологічних атомів у динамічній системі введемо деякі означення. Будемо називати T *блукаючим атомом*, якщо T — блукаюча множина, і *періодичним* — у протилежному випадку. *Періодом* періодичного атома T будемо називати $\min(n(T, T) \setminus \{0\})$ (що очевидно існує). T будемо називати *квазіперіодичним*, якщо існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $f^n(T) \subset \overline{T}$ (найменше таке n будемо називати *квазіперіодом*). Очевидно, що ця умова еквівалентна $f^n\left(\overline{T}\right) \subset \overline{T}$. З цього, зокрема, випливає, що будь-який атом, еквівалентний квазіперіодичному, є квазіперіодичним з тим самим квазіперіодом.

Твердження 4.1. *Будь-який періодичний атом є квазіперіодичним, і їх квазіперіод є не більшим за період.*

Доведення. Нехай T — періодичний атом з періодом n, тоді $f^n(T) \bigcap T \neq \varnothing$. Оскільки $f^n(T)$ — атом, а T — відкритий атом, то з наслідку 3.1 маємо $f^n(T) \subset \overline{T}$.

Насправді, в цьому випадку квазіперіод збігається з періодом, про що свідчить пункт (v) наступного твердження.

Твердження 4.2. *Нехай T — квазіперіодичний атом з квазіперіодом n. Тоді*:

(i) $\overline{f^+(T)} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{f^k(T)}$;

(ii) $\overline{f^k(T)} \not\subset \overline{f^l(T)}$ *при* $0 \leq k < l < n$;

(iii) $N(T, T) \subset n\mathbb{Z}$;

(iv) $S := T \setminus \overline{f^n(T)}$ — *блукаючий атом*;

(v) *якщо T — періодичний, то його період — n.*

Доведення. (i). Оскільки $f^n\left(\overline{T}\right) \subset \overline{T}$, то згідно з твердженням 8.2 маємо $f^+\left(\overline{T}\right) = = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k\left(\overline{T}\right)$. Отже, з твердження 10.3 випливає, що $\overline{f^+(T)} = \overline{f^+\left(\overline{T}\right)} = \overline{\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k\left(\overline{T}\right)} = = \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{f^k(T)}$.

(ii). Нехай це не так, тобто $\overline{f^k(T)} \subset \overline{f^l(T)}$ для деяких $0 \leq k < l < n$. Тоді $\overline{f^{n+k-l}(T)} = = \overline{f^{n-l}\left(f^k(T)\right)} \subset \overline{f^{n-l}\left(f^l(T)\right)} = \overline{f^n(T)} \subset \overline{T}$. Оскільки $k < l$, то $n + k - l < n$. Останнє суперечить тому, що квазіперіодом T є n.

(iii). Для довільного $k \in \overline{1, n-1}$ $f^{-k}(T) \bigcap T = \varnothing$ (бо навіть якщо T є періодичним, його період більший за $n - 1$). Оскільки $f^{-k}(T)$ — відкрита множина, а для довільного $l \in \mathbb{N}_0$ $f^{ln}(T) \subset \overline{T}$, то $f^{-k}(T) \bigcap f^{ln}(T) = \varnothing$. Звідси $T \bigcap f^{-ln-k}(T) = \varnothing$, а отже, $n(T, T) \subset n\mathbb{N}_0$ і $N(T, T) \subset n\mathbb{Z}$.

(iv). Очевидно S — відкритий атом. При цьому для довільного $k \in \mathbb{N}$ $S \bigcap f^{kn}(S) \subset \subset S \bigcap \overline{f^{kn}(T)} \subset S \bigcap \overline{f^{n}(T)} = \varnothing$. Тому $n\,(S,S) \bigcap n\mathbb{N} = \varnothing$. Водночас $n\,(S,S) \subset n(T,T) \subset n\mathbb{N}_0$, а отже, $n\,(S,S) = \{0\}$.

(v). Якщо n не є періодом T, то $T \bigcap \overline{f^{n}(T)} = \varnothing$. Звідси з урахуванням пункту (iv) маємо $T = T \backslash \overline{f^{n}(T)}$ — блукаючий атом. Прийшли до суперечності.

Розглянемо більш детально класифікацію атомів, увівши наступні поняття. Атом T будемо називати *сильно періодичним (блукаючим)*, якщо будь-який відкритий атом, що еквівалентний T, також періодичний (блукаючий). Зрозуміло, що сильно періодичний (блукаючий) атом є періодичним (блукаючим). Всі інші періодичні (блукаючі) атоми будемо називати *слабко періодичними (блукаючими)*.

Твердження 4.3. (i) *T — сильно блукаючий атом тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{int} \overline{T}$ *— блукаючий атом.*

(ii) *Якщо T — квазіперіодичний атом, то T — сильно періодичний атом тоді і тільки тоді, коли* $\overline{f^{n}(T)} = \overline{T}$ *(де n — квазіперіод).*

Доведення. (i). З наслідку 3.2 маємо $\operatorname{int} \overline{T} \sim T$ (*необхідність*). Якщо $S \sim T$, то $S \subset \operatorname{int} \overline{T}$. Тому з $n\left(\operatorname{int} \overline{T}, \operatorname{int} \overline{T}\right) = \{0\}$ випливає $n\,(S,S) = \{0\}$ (*достатність*).

(ii). *Необхідність*. Якщо $\overline{f^{n}(T)} \neq \overline{T}$, то з твердження 4.2 випливає, що $S := T \backslash \overline{f^{n}(T)}$ — блукаючий атом, що еквівалентний до T.

Достатність. Згідно з твердженням 10.1 з того, що $\overline{S} = \overline{T}$, випливає, що $\overline{f^{n}(S)} = \overline{f^{n}(T)} = = \overline{T} = \overline{S}$. Отже, $f^{n}(S) \bigcap S \neq \varnothing$ (з твердження 10.4).

Пункт (i) показує, що якщо канонічно відкритий атом є блукаючим, то він є сильно блукаючим.

***Наслідок* 4.1.** *Якщо T — сильно періодичний атом, то* $\overline{f^{kn+l}(T)} = \overline{f^{l}(T)}$ *для довільних* $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Слід застосувати твердження 10.1 до $f^{kn}(T)$ та T (для відображення f^{l}).

5. Прості динамічні системи. Динамічну систему (X, f) будемо називати *простою динамічною системою*, якщо існує квазіперіодичний атом T з квазіперіодом n такий, що $X = \overline{f^{+}(T)}$. Нехай далі у цьому пункті (X, f) є простою динамічною системою, а $T_k := \operatorname{int} \overline{f^{k}(T)}$ для довільного $k \in \overline{0, n-1}$ є відкритими атомами.

Твердження 5.1. (i) $T_l = X \backslash \bigcup_{k \in \overline{0,n-1}, k \neq l} \overline{T_k}$ *для довільного* $l \in \overline{0, n-1}$, *тобто атоми T_k диз'юнктні для різних k, а їх об'єднання є скрізь щільною множиною в X.*

(ii) $\partial \overline{f^{l}(T)} = \overline{f^{l}(T)} \bigcap \bigcup_{k \in \overline{0,n-1} \backslash \{l\}} \overline{T_k}$ *для довільного* $l \in \overline{0, n-1}$.

(iii) *Динамічна система (X, f) є $\mathbb{Z}$-транзитивною.*

Доведення. (i). З твердження 4.2 $\overline{T_l} \not\subset \overline{T_k}$ для $0 \leq l < k < n$. Тому $\overline{T_l} \neq \overline{T_k}$, що згідно з наслідком 3.2 дає диз'юнктність. Скрізь щільність є очевидною.

(ii). Випливає з (i) та $\partial \overline{f^{l}(T)} = \overline{f^{l}(T)} \backslash T_l$.

(iii). Нехай U — відкритна множина в X. Оскільки $\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{k}(T)$ скрізь щільна в X, то існує $m \in \overline{0, n-1}$ таке, що $f^{m}(T) \bigcap U \neq \varnothing$. Звідси $\overline{f^{m}(T)} \subset \overline{U}$. Також для довільного $k \in \overline{0, m}$ $\overline{f^{k}(T) \bigcap f^{k-m}}(U) \neq \varnothing$. Тому з відкритості $f^{k-m}(U)$ та атомарності $\overline{f^{k}}(T)$ маємо $\overline{f^{k}(T)} \subset \subset \overline{f^{k-m}(U)}$. Очевидно, що також для довільного $k \in \overline{m, n-1}$ $\overline{f^{k}(T)} \subset \overline{f^{k-m}(U)}$. Отже, $X = \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{f^{k}(T)} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{f^{m-k}(U)} \subset \overline{f^{\pm}(U)}$, звідки випливає $\mathbb{Z}$-транзитивність (X, f).

Твердження 5.2. (i) *$f^{-1}(T) \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли T — періодичний атом.*

(ii) *Якщо атом T є періодичним, то* $\overline{f^{-l}(T)} = \overline{f^{n-l}(T)}$ *для будь-якого* $l \in \overline{1, n-1}$.

Доведення. Нехай $f^{-1}(T) \neq \varnothing$. Тоді $f^{-1}(T)$ — відкритна множина. Тому $\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(T) \bigcap \bigcap f^{-1}(T) \neq \varnothing$. Отже, $n\left(T, f^{-1}(T)\right) \neq \varnothing$, з чого випливає періодичність T. Якщо ж T — періодичний атом, то $f^{-l}(T)$ — відкритна множина для довільного $l \in \overline{1, n-1}$. Тому $f^{-l}(T) \bigcap \bigcap \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(T) \neq \varnothing$. Оскільки $n\left(T, f^{-l}(T)\right) \bigcap [0, n-1] = \{n-l\}$, то $f^{-l}(T) \subset \subset X \backslash \bigcup_{0 \leq k < n, k \neq n-l} f^k(T)$. З останнього та відкритності $f^{-l}(T)$ випливає, що $f^{-l}(T) \subset \subset X \backslash \overline{\bigcup_{0 \leq k < n, l \neq n-l} f^k(T)} = T_{n-l}$. Тому з твердження 3.2 маємо $\overline{f^{-l}(T)} = \overline{f^{n-l}(T)}$.

Оскільки характеристики системи не залежать від того, який атом із класу еквівалентності ми візьмемо в якості „породжуючого”, схожі властивості мають місце і у випадку, коли T — слабко блукаючий атом. Наступне твердження об'єднує ці два випадки.

Твердження 5.3. (i) *$f^{-1}\left(\operatorname{int} \overline{T}\right) \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли T — не сильно блукаючий атом.*

(ii) *Якщо T — не сильно блукаючий атом, то $T_l \neq \varnothing$ для всіх $l \in \overline{0, n-1}$ та $f\left(\partial T_l\right) \subset \partial T_{l+1}$* $(\operatorname{mod} n)$.

(iii) *Якщо T — не сильно блукаючий атом, а $S \subset X$ — відкритий атом, то $N\left(S, S\right) \subset n\mathbb{Z}$.*

Доведення. (i), (ii). Згідно з твердженнями 4.3 та 5.2 T — не сильно блукаючий атом тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{int} \overline{T}$ — періодичний атом. Останнє має місце тоді і тільки тоді, коли $f^{-1}\left(\operatorname{int} \overline{T}\right) \neq \varnothing$. Можна стверджувати навіть більше: у цьому випадку $T_l = \operatorname{int} \overline{f^{l-n}\left(\operatorname{int} \overline{T}\right)} \neq \neq \varnothing$ для довільного $l \in \overline{0, n-1}$.

Згідно з твердженням 5.1 $\partial T_l = \overline{T_l} \bigcap \bigcup_{k \in \overline{0,n-1}, k \neq l} \overline{T_k}$. Тому

$$f\left(\partial T_l\right) \subset f\left(\overline{T_l}\right) \bigcap f\left(\bigcup_{k \in \overline{0,n-1}, k \neq l} \overline{T_k}\right) \subset \overline{T_{l+1}} \bigcap \bigcup_{k \in \overline{0,n-1}, k \neq l} \overline{T_{k+1}} = \partial T_{l+1}$$

(додавання одиниці розуміється по модулю n, і ми тут користуємося тим, що згідно з твердженням 4.3 $\overline{f\left(T_{n-1}\right)} \subset \overline{T_0}$).

(iii). Нехай S — відкритний атом, тоді існує $m \in \overline{0, n-1}$ таке, що $S \subset \overline{f^m(T)}$. Звідси також $S \subset T_m$. Тому з твердження 10.3 маємо $n\left(S, S\right) \subset n\left(\overline{f^m(T)}, T_m\right)$. Оскільки з твердження 5.1 $T_m = X \backslash \bigcup_{k \in \overline{0,n-1}, k \neq m} \overline{T_k} = X \backslash \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0, k \neq m \ mod \ n} \overline{f^k(T)}$, то $n\left(f^m(T), T_m\right) \subset n\mathbb{N}_0$. Звідси $N\left(S, S\right) \subset n\mathbb{Z}$.

Пункт (ii) попереднього твердження, зокрема, показує, що для систем розглянутого класу n залежить лише від X.

Твердження 5.4. (i) *Якщо T — періодичний атом, то в X може існувати сильно блукаючий атом.*

(ii) *Якщо T — блукаючий атом, то в X може існувати сильно періодичний атом. Також можливо, що $f\left(\partial \overline{f^l(T)}\right) \not\subset \partial \overline{f^{l+1}(T)}$ для деякого $l \in \mathbb{N}_0$.*

Доведення. (i). Нехай $X = \{1, 2, 3, 4\}$, замкнені множини там такі: $\varnothing$, X, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{4\}$, а відображення $f(x) := \begin{cases} x+1, & x < 4, \\ 4, & x = 4. \end{cases}$ Неперервність f легко перевіряється. $T := \{1, 3\}$ — періодичний атом з періодом 2, а $S = \{2\}$ — канонічно відкритий блукаючий атом.

(ii). Нехай $X = \{1, 2, 3\}$, замкнені множини там такі: $\varnothing$, X, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$, $\{2\}$, а відображення $f(x) := \begin{cases} 3, & x < 3, \\ 2, & x = 3. \end{cases}$ Неперервність f легко перевіряється. $T := \{1\}$ — блукаючий атом, але $S := \{3\}$ — сильно періодичний атом з періодом 2. Також $f\left(\partial \overline{f^2(T)}\right) = f(\partial\{2\}) = f(\{2\}) = \{3\} \not\subset \varnothing = \partial\overline{f^3(T)}$.

Описані патології не зустрічаються в наступному класі.

Твердження 5.5. (i) *T — сильно періодичний атом тоді і тільки тоді, коли (X, f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система.*

(ii) *Якщо T — сильно періодичний атом і $S \subset X$ — відкритий атом, то $N(S, S) = n\mathbb{Z}$.*

(iii) *Якщо T — сильно періодичний атом, то $f\left(\partial\overline{f^l(T)}\right) \subset \partial\overline{f^{l+1}(T)}$ для довільного $l \in \mathbb{N}_0$.*

Доведення. (i). *Необхідність*. Нехай U — відкритна множина в X. Тоді існує $l \in \overline{0, n-1}$ таке, що $f^l(T) \bigcap U \neq \varnothing$. Тому для будь-якого $k \in \overline{0, n-1}$ $\overline{f^{k+l}(T)} \subset \overline{f^k(U)}$, а отже, $X = \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{f^k(T)} = \bigcup_{k=l}^{l+n-1} \overline{f^k(T)} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{f^k(U)} \subset \overline{f^+(U)}$, що означає транзитивність (X, f). *Достатність* випливає з відсутності у транзитивних систем блукаючих відкритних множин, що було доведено у наслідку 2.1.

(ii). За умови існує $m \in \overline{0, n-1}$ таке, що $\overline{S} = \overline{f^m(T)}$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ мають місце $\overline{f^{kn}(S)} = \overline{f^{kn+m}(T)} = \overline{f^m(T)} = \overline{S}$. Звідси згідно з твердженням 10.4 маємо $f^{kn}(S) \bigcap S \neq \varnothing$. Отже, $n\mathbb{N}_0 \subset N(S, S)$ і тому $n\mathbb{Z} \subset N(S, S)$. Включення в інший бік ми вже встановили у твердженні 5.2.

(iii). Випливає з наслідку 4.1 та твердження 5.3.

Наслідок 5.1. *Якщо X — атом, то (X, f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система тоді і тільки тоді, коли $\overline{f(X)} = X$, і тоді і тільки тоді, коли для довільних відкритних множин U, V в X $N(U, V) = \mathbb{Z}$.*

Нам залишилось розглянути ще один клас простих динамічних систем. У пунктах (i) та (ii) наступного твердження описуються їх загальні властивості, в пункті (iii) — патології, що можуть виникати, а в пункті (iv) — найрегулярніші системи цього класу.

Твердження 5.6. *Якщо T — сильно блукаючий атом, то*:

(i) *існує $m \in \overline{0, n-1}$ таке, що $T_k \neq \varnothing$ для довільного $k \in \overline{0, m}$ і $\operatorname{int}\overline{f^k(T)} = \varnothing$ для довільного $k > m$*;

(ii) *в динамічній системі (X, f) немає сильно періодичних атомів*;

(iii) *може статись, що $m < n-1$; для деякого $l \in \mathbb{N}_0$ $f\left(\partial\overline{f^l(T)}\right) \not\subset \partial\overline{f^{l+1}(T)}$; можуть існувати періодичні атоми*;

(iv) *якщо $m = n-1$, то $f\left(\partial\overline{f^l(T)}\right) \subset \partial\overline{f^{l+1}(T)}$ для всіх $l \in \mathbb{N}_0$ та в системі немає періодичних атомів.*

Доведення. (i). Нехай $m \in \overline{0, n-1}$ — найменше число з можливих таких, що $\operatorname{int}\overline{f^{m+1}(T)} = \varnothing$ (таке завжди існує, адже $\operatorname{int}\overline{f^n(T)} = \varnothing$). Доведемо, що для довільного $k > m$ $\operatorname{int}\overline{f^k(T)} = \varnothing$. Якщо $m < n-1$, то $f^{m+1}(T) \subset \bigcup_{l \in \overline{0,n-1}} \overline{T_l}$. Оскільки $f^{m+1}(T)$ — атом, то (з твердження 3.1) існує $l \in \overline{0, n-1}$ таке, що $f^{m+1}(T) \subset \overline{T_l}$. Оскільки з твердження 4.2 випливає, що $f^{m+1}(T) \not\subset \overline{f^l(T)}$ для $l \in \overline{m+2, n-1}$, а $T_{m+1} = \varnothing$, то $l \in \overline{0, m}$. Тоді можна зробити висновок, що T_l — квазіперіодичний атом. Насправді з твердження 4.2 маємо $\overline{f^+(T_l)} = \bigcup_{i=l}^{m} \overline{T_i}$, а отже, $X = \overline{f^+(T)} = \bigcup_{i=0}^{l-1} \overline{T_i} \bigcup \overline{f^+(T_l)} = \bigcup_{i=0}^{m} \overline{T_i}$. Насамкінець з твердження 5.1 випливає, що $\operatorname{int}\overline{f^k(T)} = \varnothing$ для довільного $k \in \overline{m+1, n-1}$.

Тепер якщо $k = np + r$, $0 \leq r < n$, $p \in \mathbb{N}$, то $f^k(T) = f^{np+r}(T) = f^r((f^n)^p(T)) \subset f^r\left(\partial\overline{T}\right) = f^r\left(\overline{T} \bigcap \bigcup_{l \in \overline{1,m}} \overline{f^l(T)}\right) \subset \overline{f^r(T)} \bigcap \bigcup_{l \in \overline{1,m}} \overline{f^{r+l}(T)}$. З тверджень 3.4 та 3.1 випливає, що існує $l \in \overline{1, m}$ таке, що $f^k(T) \subset \overline{f^r(T)} \bigcap \overline{f^{r+l}(T)}$. Звідси $\operatorname{int}\overline{f^k(T)} \subset T_r \bigcap \operatorname{int}\overline{f^{r+l}(T)}$. Якщо $l \in \overline{1, m-r}$, то $\operatorname{int}\overline{f^{r+l}(T)} = T_{r+l}$. Якщо $l \in \overline{m-r+1, n-r-1}$, то $\operatorname{int}\overline{f^{r+l}(T)} = \varnothing$.

Для $l \in \overline{n-r, m}$ маємо $\operatorname{int} \overline{f^{r+l}(T)} \subset T_{r+l-n}$. Легко бачити, що при таких l ці множини не перетинаються з T_r, і тому $\operatorname{int} \overline{f^k(T)} = \varnothing$.

(ii). З твердження 5.1 достатньо перевірити лише T_k. $\overline{f^l(T_k)} = \overline{f^l(f^k(T))} = \overline{f^{l+k}(T)}$ для $l \in \mathbb{N}_0$. Множина $\overline{f^{l+k}(T)}$ ніде не щільна в X, якщо $l > m-k$, та міститься в T_{k+l}, якщо $l \in \overline{1, m-k}$. Тому $\overline{f^{l+k}(T)} \neq T_k$, а отже, з твердження 4.3 випливає, що T_k — не сильно періодичний атом.

(iii). Нехай $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, замкнені множини там такі: $\varnothing$, X, $\{5\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$, $\{1,5,6\}$, $\{3,5,6\}$, $\{2,4,5\}$ та всі можливі їх об'єднання, а відображення

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & x<5, \\ 5, & x=5, \\ 4, & x=6. \end{cases}$$

Неперервність f легко перевіряється. $T := \{1\}$ — канонічно відкритий атом. Оскільки $\overline{T} = \{1,5,6\}$, $f^5(T) = \{5\} \subset \partial T = \{5,6\}$, то T — сильно блукаючий, але квазіперіодичний з квазіперіодом $n = 5$ атом. Оскільки $f^4(T) = \{4\} \Rightarrow \overline{f^4(T)} = \{4,5\}$, то $\operatorname{int} \overline{f^4(T)} = \varnothing$. При цьому $S = \{2,4\}$ — періодичний з періодом 2 відкритий атом, а також $f\left(\partial \overline{T}\right) = f(\{5,6\}) = \{5,4\} \not\subset \{5\} = \partial\{2,5,4\} = \partial \overline{f(T)}$.

(iv). Так само, як і при доведенні твердження 5.3, можна показати, що $f(\partial T_l) \subset \partial T_{l+1} \pmod n$ для довільного $l \in \overline{0, n-1}$. Тому $f\left(\partial \overline{f^l(T)}\right) \subset \partial \overline{f^{l+1}(T)}$ випливає з цього та з того, що $\partial \overline{f^l(T)} = \overline{f^l(T)}$ при $l \geq n$. Відсутність періодичних атомів випливає з $\overline{f^+(f(T_l))} = \bigcup_{k=l+1}^{n-1} \overline{T_k} \bigcup \bigcup_{k=0}^{n-1} \partial T_k$.

6. Топологічні атоми в транзитивних динамічних системах.

Твердження 6.1. *Нехай (X, f) — $\mathbb{Z}$-транзитивна система.*

(i) *Якщо T — відкрита блукаюча множина, то T — атом.*

(ii) *Якщо A — інваріантна множина, то $V := \operatorname{int}\left(f^{-1}(A) \backslash A\right)$ — атом.*

Доведення. (i). Якщо T — не атом, то в ньому знайдуться неперетинні відкритні підмножини U, V такі, що $0 \notin N(U,V) \subset N(T,T) = \{0\}$. Тому $N(U,V) = \varnothing$, що суперечить $\mathbb{Z}$-транзитивності.

(ii). Оскільки A — інваріантна множина, то $f^+(f(V)) \subset A \subset X \backslash V$, отже V — блукаюча відкрита множина.

Твердження 6.2. *Якщо X — не атом і (X, f) — $\mathbb{N}_0$-транзитивна система, то прообраз будь-якої відкритної множини є непорожнім.*

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді існує відкритна множина U в X і $f^{-1}(U) = \varnothing \subset U$. Отже, U — відкрита блукаюча множина, (а отже, згідно з твердженням 6.1 — атом), та одночасно U — обернено інваріантна множина. А тому з твердження 2.1 випливає, що $\overline{U} = X$. Таким чином, з твердження 3.1 маємо, що X — атом.

З цього твердження та твердження 2.2 випливає наступне (вже раніше згадуване) співвідношення.

***Наслідок* 6.1.** *Якщо X — не атом, то $\mathbb{N}$-транзитивність еквівалентна $\mathbb{N}_0$-транзитивності.*

Слід зазначити, що у випадку, коли X — атом, будь-яке відображення (навіть не обов'язково неперервне) задовольняє умову $(\mathrm{TT})_{\mathbb{N}_0}$.

Теорема 6.1. *(X,f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система тоді і тільки тоді, коли (X,f) — $\mathbb{Z}$-транзитивна система і в ній немає відкритних блукаючих атомів.*

Доведення. Згідно з наслідком 2.1 потрібно довести лише *достатність*. Якщо X — атом, то X — сильно періодичний атом. Отже, (X,f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система згідно з твердженням 5.5. У іншому випадку з наслідку 6.1 нам достатньо довести, що (X,f) — $\mathbb{N}_0$-транзитивна система. Для цього розглянемо множину F, замкнену і таку, що $U := \operatorname{int}(F) \neq \varnothing$ та $f(F) \subset F$. З твердження 2.1 достатньо показати, що $F = X$. Згідно з твердженням 6.1 $f^{-1}(U) \backslash F$ — відкритий атом, який за умовою може бути тільки порожнім, тож $f^{-1}(U) \subset F$. Оскільки $f^{-1}(U)$ — відкрита множина, то $f^{-1}(U) \subset \operatorname{int} F = U$. Звідси $\overline{f^{\pm}(U)} \subset F$, що з урахуванням твердження 2.3 дає $F = X$.

***Наслідок* 6.2.** *Нехай у динамічній системі (X,f) є відкритний атом T. Тоді (X,f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система тоді і тільки тоді, коли T — сильно періодичний атом і $X = \overline{f^{+}(T)}$.*

Доведення. Оскільки в транзитивних системах не може бути блукаючих атомів, то T — сильно періодичний атом. Звідси $\overline{f^{+}(T)}$ — замкнена інваріантна множина з непорожньою внутрішністю, тому вона збігається з X, згідно з твердженням 2.1.

Нагадаємо, що добутком динамічних систем (X,f) та (Y,g) називається динамічна система $(X \times Y, f \times g)$. Ми також будемо позначати $(X \times X, f \times f)$ через $(X,f)^2$. Наведемо деякі факти про транзитивність добутків.

Твердження 6.3. (i) *Динамічна система $(X \times Y, f \times g)$ є $\mathbb{N}_0(\mathbb{N}$, або $\mathbb{Z})$-транзитивною тоді і тільки тоді, коли для довільних відкритних в X множин U, V та для довільних відкритних в Y множин S, T $n_f(U,V) \bigcap n_g(S,T) \neq \varnothing$ $(n_f(U,V) \bigcap n_g(S,T) \setminus \{0\} \neq \varnothing$, або $N_f(U,V) \bigcap N_g(S,T) \neq \varnothing$ відповідно).*

(ii) *Якщо Y — не атом, а $(X \times Y, f \times g)$ — $\mathbb{Z}$–транзитивна система, то (X,f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система.*

(iii) *Якщо X — атом, а (X,f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система, то $\mathbb{N}_0(\mathbb{N}$, або $\mathbb{Z})$-транзитивність $(X \times Y, f \times g)$ еквівалентна відповідній транзитивності (Y,g).*

Доведення. (i). *Необхідність* випливає з твердження 9.5, бо $U \times S$, $V \times T$ — відкритні множини в $X \times Y$. *Достатність* випливає з того, що в будь-яку відкритну множину в $X \times Y$ можна вписати такий прямокутник.

(ii). З (i) зрозуміло, що (X,f) — $\mathbb{Z}$-транзитивна система. Нехай W — довільна відкритна підмножина X. Оскільки Y — не атом, то в ньому знайдуться відкритні диз'юнктні множини U, V. Тобто $0 \notin N_g(U,V)$, але $\varnothing \neq N_f(W,W) \bigcap N_g(U,V)$. Звідси $N_f(W,W) \neq \{0\}$, а отже, W не є блукаючою. Тому згідно з теоремою 6.1 (X,f) — $\mathbb{N}$-транзитивна система.

(iii). Випливає з (i) та наслідку 5.1.

Для добутків неатомарних систем зв'язок між $\mathbb{N}$- та $\mathbb{Z}$-транзитивностями є винятково тісним.

Теорема 6.2. (i) *Якщо X та Y — не атоми, то для системи $(X \times Y, f \times g)$ $\mathbb{N}$- та $\mathbb{Z}$-транзитивності — еквівалентні властивості.*

(ii) *Якщо $(X,f)^2$ — $\mathbb{N}$-транзитивна система, то X або не містить відкритних атомів, або ж складається з одного атома.*

Доведення. (i). Нехай $(X \times Y, f \times g)$ — $\mathbb{Z}$-транзитивна система. Потрібно довести, що вона є $\mathbb{N}$-транзитивною. Згідно з теоремою 6.1 та твердженням 3.4 достатньо розглянути випадок, коли в X та Y — відкритні атоми. З іншого боку, згідно з твердженням 6.3, (X,f) та (Y,g) — $\mathbb{N}$-транзитивні системи. Але згідно з наслідком 6.2 це означає, що вони є орбітами сильно періодичних атомів. Нехай ці атоми S, T, а їх періоди відповідно m, n. Згідно з твердженням 4.3 $S \times T$ —

сильно періодичний атом з періодом $HCK\,(m, n)$. Також $\varnothing \neq N_f\left(S, f^{-1}(S)\right) \bigcap N_g(T, T) \subset \subset (n\mathbb{Z} - 1) \bigcap m\mathbb{Z}$, а це можливо тоді і тільки тоді, коли m і n взаємо прості. Легко бачити, що у цьому випадку динамічна система є замиканням орбіти цього атома. Тому за твердженням 5.5 вона є $\mathbb{N}$-транзитивною.

(ii). Із доведення (i) випливає, що за наявності атомів у X $(X, f)^2$ може бути $\mathbb{N}$-транзитивною лише тоді, коли X складається із n атомів. При цьому n є взаємно простим саме із собою, тобто $n = 1$.

Твердження 6.4. *Нехай (X, f) — $\mathbb{Z}$-транзитивна система, а T, S — відкритні атоми. Тоді або існує $n \in \mathbb{N}_0$ таке, що $S \subset \overline{f^{-n}(T)}$, або існує $n \in \mathbb{N}_0$ таке, що $T \subset \overline{f^{-n}(S)}$.*

Доведення. З $\mathbb{Z}$-транзитивності випливає, що $N\,(S, T) \neq \varnothing$, тобто існує $n \in N\,(S, T)$. Нехай $n \geq 0$, тоді $S \bigcap f^{-n}(T) \neq \varnothing$, що внаслідок атомарності S дає $S \subset \overline{f^{-n}(T)}$. Аналогічно доводиться, що $T \subset \overline{f^{-|n|}(S)}$ для $n \leq 0$.

7. Блукаючі атоми в $\mathbb{Z}$-транзитивних динамічних системах. Нехай далі у цьому пункті (X, f) є $\mathbb{Z}$-транзитивною динамічною системою. Позначимо через τ клас блукаючих відкритих атомів (включаючи порожню множину), і нехай $U := \bigcup_{T \in \tau} T$.

Твердження 7.1. *Нехай $T \in \tau$. Тоді*:

(i) $f^{-1}(T) \in \tau$;

(ii) *для $n \in \mathbb{N}$ $f^{-n}(T) \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $n \in N\,(U, T)$.*

Доведення. (i). Оскільки прообраз відкритої блукаючої множини є відкритою та, згідно з твердженням 9.7, блукаючою множиною, він є атомом у відповідності з твердженням 6.1.

(ii). *Достатність* очевидна. Доведемо *необхідність*. Оскільки $f^{-n}(T) \subset U$, то з $f^{-n}(T) \neq \neq \varnothing$ випливає $n \in N\,(U, T)$.

***Наслідок* 7.1.** $f^{-1}(U) \subset U$.

Доведення. $f^{-1}(U) = \bigcup_{T \in \tau} f^{-1}(T)$. Оскільки для довільного $T \in \tau$ $f^{-1}(T) \in \tau$, то $f^{-1}(T) \subset U$. Звідси $f^{-1}(U) \subset U$.

Твердження 7.2. *Якщо π — клас еквівалентності відкритих блукаючих атомів і $\varnothing \neq \theta \subset \subset \pi$, то $S := \bigcup_{T \in \theta} T \in \pi$.*

Доведення. Оскільки $\pi \neq \{\varnothing\}$, то $N\,(S, S) = \bigcup_{T,W \in \theta} N\,(T, W) = \bigcup_{T,W \in \theta} \{0\} = \{0\}$. Звідси S — блукаючий атом, що містить хоча б один атом з π, тому, очевидно, еквівалентний йому.

Останнє твердження, зокрема, показує, що довільний клас еквівалентності блукаючих відкритих атомів містить найбільший за включенням елемент; також цей клас можна розглядати як клас відкритих підмножин цих найбільших елементів.

Твердження 7.3. *Нехай $T, S, W \in \tau \setminus \{\varnothing\}$.*

(i) *Якщо $T \sim S$, то $f^{-1}(T) \sim f^{-1}(S)$.*

(ii) $|N\,(T, S)| = 1$.

(iii) *Якщо для деякого $n \in \mathbb{Z}$ $N\,(T, S) = \{n\}$, то $\overline{f^n(T)} = \overline{S}$.*

(iv) $N\,(T, S) = N\,(T, W) + N\,(W, S)$.

(v) *$N\,(T, W) = N\,(S, W)$ тоді і тільки тоді, коли $T \sim S$.*

(vi) *Якщо* $f^{-1}(T) \neq \varnothing$, *то* $N\left(S, f^{-1}(T)\right) = N(S,T) - 1$.

Доведення. (i). Якщо $f^{-1}\left(T \bigcap S\right) \neq \varnothing$, то $f^{-1}(T) \bigcap f^{-1}(S) = f^{-1}\left(T \bigcap S\right) \neq \varnothing$. Тому $f^{-1}(T) \sim f^{-1}(S)$. $N\left(T \bigcap S, f^{-1}(T)\right) \subset N(T,T) - 1 = \{-1\}$ (аналогічно $N\left(T \bigcap S, f^{-1}(S)\right) \subset \subset \{-1\}$). Тому якщо $f^{-1}\left(T \bigcap S\right) = \varnothing$, то $N\left(T \bigcap S, f^{-1}(T)\right) = \varnothing = N\left(T \bigcap S, f^{-1}(S)\right)$, звідки з урахуванням $\mathbb{Z}$-транзитивності відображення f маємо $f^{-1}(T) = \varnothing = f^{-1}(S)$, тобто $f^{-1}(T) \sim f^{-1}(S)$.

(ii). Нехай $m, n \geq 0$ і $n, m \in N(S,T)$. Тоді $f^{-m}(T) \sim S \sim f^{-n}(T)$. Звідси $f^{-m}(T) \bigcap f^{-n}(T) \neq \neq \varnothing$ і $m = n$ (останнє твердження випливає з твердження 9.7). Випадок $m, n \leq 0$ доводиться аналогічно. Нехай тепер $n \geq 0, m \leq 0$. Тоді $f^{-n}(T) \sim S$, $f^{m}(S) \sim T$, тобто $f^{m-n}(T) \sim T$ і $f^{m-n}(T) \bigcap T \neq \varnothing$. Звідси $m = n$. Отже, $|N(T,S)| < 2$. Але $|N(T,S)| > 0$, тому $|N(T,S)| = 1$.

(iii). З твердження 10.4 випливає, що $\overline{S} = \overline{X \bigcap S} = \overline{\overline{f^{\pm}(T)} \bigcap S} = \overline{f^{\pm}(T) \bigcap S} = \overline{f^{n}(T) \bigcap S} \subset \subset \overline{f^{n}(T)}$. Водночас $f^{n}(T)$ — атом (при $n \geq 0$ — з твердження 3.4, при $n \leq 0$ — з твердження 7.1), що перетинається з S. Отже, згідно з наслідком 3.1 $\overline{f^{n}(T)} \subset \overline{S}$.

(iv). Випливає з твердження 2.3 та одноелементності обох множин.

(vi). Доведення, як і в (iv).

(v). $T \sim S$ тоді і тільки тоді, коли $\{0\} = N(T,S)$. Це еквівалентно тому, що $N(T,W) = = -N(W,S)$, чи $N(T,W) = N(S,W)$.

Наслідок 7.2. *Для відкритних множин* V, W *умова* $|N(V,W)| = 1$ *еквівалентна тому, що* $V, W \in \tau$.

Доведення. *Достатність* доведено в основному твердженні. *Необхідність*. Оскільки $1 \leq \leq |N(V,V)| \leq |N(V,W) + N(W,V)| = 1$, то $|N(V,V)| = 1$. Згідно з твердженням 6.1 це означає, що $V \in \tau$. Аналогічно доводиться, що $W \in \tau$.

Далі через R будемо позначати $N(T^{*}, U)$ для деякого фіксованого $T^{*} \in \tau$.

Твердження 7.4. (i) R — *відрізок в* $\mathbb{Z}$ (*можливо, необмежений*).

(ii) $\tau_n := \{S \in \tau \,|N(T^{*}, S) = \{n\}\}$ — *непорожній клас еквівалентних атомів для довільного* $n \in R$.

(iii) $\tau = \bigcup_{n \in R} \tau_n \bigcup \{\varnothing\}$ *і* $U = \bigcup_{n \in R} T_n$, *де* T_n — *найбільші елементи* τ_n.

Доведення. (i). Нехай $m < n$ і $m, n \in N(T^{*}, U)$. Це означає, що існують $S, W \in \tau$, для яких $\{m\} = N(T^{*}, S)$, $\{n\} = N(T^{*}, W)$. Звідси $\{n - m\} = N(S,W) \subset N(U,W)$ і $n - m \in \mathbb{N}$. Тому для довільного $k \in \overline{0, n-m}$ маємо $\varnothing \neq f^{-k}(W) \subset U$. Отже, $[m,n] \bigcap \mathbb{Z} \subset \subset N\left(T^{*}, \bigcup_{k=0}^{n-m} f^{-k}(W)\right) \subset N(T^{*}, U)$, тобто R — відрізок.

(ii). Випливає з твердження 7.3, а (iii) є очевидним.

Зауважимо, що отримана нумерація класів залежить від T^{*}, який ми зафіксували. Проте зрозуміло, що незалежно від нього множина індексів буде відрізком. Зокрема, можна вибрати T^{*} так, щоб цей відрізок був якомога зручнішим (наприклад, $\overline{1, N}$; $-\mathbb{N}$; $\mathbb{N}_0$: $\mathbb{Z}$). $N(\cdot,\cdot)$ можна розглядати як орієнтовану відстань між класами еквівалентності всередині τ. Також цих класів є не більш ніж зліченна кількість.

Далі нехай $T_n := \varnothing$ для $n < \inf R$. Легко бачити, що для довільного $n \in R$ множина $f^{-1}(T_n)$ є скрізь щільною в T_{n-1}.

Якщо в системі немає відкритних блукаючих атомів, то вважаємо, що $R := \varnothing$. У цьому випадку (згідно з твердженням 6.1) (X, f) є $\mathbb{N}$-транзитивною системою.

Твердження 7.5. *Серед T_n може бути лише скінченна кількість не канонічно відкритих. Якщо виконується принаймні одна з умов, що наводяться нижче, то таких взагалі не існує.*

(i) $\sup R = +\infty$. *У цьому випадку також* $X = \overline{U}$.

(ii) *Існують замкнена інваріантна множина* F, *що не перетинається з* $\bigcup_{n\in R} \operatorname{int} \overline{T_n}$, *і* $m \in R$ *таке, що* $f(T_m) \subset F$. *У цьому випадку також* $m = \sup R$ *і* $X = \overline{U} \bigcup F$.

Доведення. (i). Нехай $T \in \tau_m$. Тоді $\overline{f^n(T)} = \overline{T_{m+n}}$ для довільного $n \in R - m$. Тому $X = \overline{f^{\pm}(T)} \subset \overline{\bigcup_{n\in R} T_n} = \overline{U}$ та в системі немає періодичних атомів. Отже, всі блукаючі атоми є сильно блукаючими. Згідно з твердженням 4.3 T_n, як найбільші елементи своїх класів, є канонічно відкритими.

(ii). Оскільки $f(F) \subset F$, то $\overline{f^+(f(T_m))} \subset F$. Тому $X = \overline{f^{\pm}(T_m)} = \overline{f^-(T_m)} \bigcup \overline{f^+(f(T_m))} \subset \subset \overline{f^-(T_m)} \bigcup F$. Оскільки F не перетинається з $\bigcup_{n\in R} \operatorname{int} \overline{T_n}$, то $U \subset \overline{f^-(T_m)}$. Звідси $m = \sup R$. Також для довільного $n \in R$ $\overline{f^+\left(f\left(\overline{T_n}\right)\right)} = \bigcup_{k=n+1}^{m} \overline{T_k} \bigcup F$. З твердження 10.4 випливає, що ця множина не перетинається з $\operatorname{int} \overline{T_n}$. Тому $\operatorname{int} \overline{T_n}$ — блукаюча множина, а отже, $\operatorname{int} \overline{T_n} = T_n$.

Тепер доведемо основне твердження, тобто що серед T_n може бути лише скінченна кількість не канонічно відкритих. Нехай $n \in R$ таке, що $\operatorname{int} \overline{T_n}$ — періодичний атом з періодом m. З (i) одразу маємо $\sup R < +\infty$. Достатньо довести, що при $k > m$ T_{n-k} — канонічно відкритий атом, чи те саме, що $\operatorname{int} \overline{T_{n-k}}$ — блукаючий атом.

Доведемо спочатку, що $n\left(T_n, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\right) = \varnothing$. Нехай $f^l(T_n) \bigcap \operatorname{int} \overline{T_{n-k}} \neq \varnothing$ для $l \in \overline{0, m-1}$. Тоді з наслідку 3.1 маємо $\overline{f^l(T_n)} \subset \overline{T_{n-k}}$, звідки $\overline{f^m(T_n)} \subset \overline{T_{m+n-k-l}}$. Оскільки $m + n - k - - l < n$, то з тверджень 10.1 та 10.4 випливає, що $\overline{f^m\left(\operatorname{int} \overline{T_n}\right)} \bigcap \operatorname{int} \overline{T_n} = \overline{f^m(T_n)} \bigcap \operatorname{int} \overline{T_n} \subset \subset \overline{T_{m+n-k-l}} \bigcap \operatorname{int} \overline{T_n} = \varnothing$. А це суперечить тому, що $\operatorname{int} \overline{T_n}$ є періодичним з періодом m. Отже, з твердження 4.2 отримуємо $\overline{f^+(T_n)} \bigcap \operatorname{int} \overline{T_{n-k}} = \bigcup_{l=0}^{m-1} \overline{f^l(T)} \bigcap \operatorname{int} \overline{T_{n-k}} = \varnothing$, і тому $n\left(T_n, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\right) = \varnothing$.

Тепер вже з твердження 10.3 маємо $n\left(\operatorname{int} \overline{T_{n-k}}, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\right) = n\left(T_{n-k}, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\right) \subset N\big(T_{n-k}, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\big) \subset N(T_{n-k}, T_n) + N\left(T_n, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\right) = k + N\left(T_n, \operatorname{int} \overline{T_{n-k}}\right) = k - n\left(\operatorname{int} \overline{T_{n-k}}, T_n\right) = = k - n(T_{n-k}, T_n) = \{0\}$, отже, $\operatorname{int} \overline{T_{n-k}}$ — блукаючий атом.

Твердження 7.6. *Нехай* $Z_+ := \bigcap_{m=0}^{+\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{+\infty} T_n}$ *та* $Z_- := \bigcap_{m=0}^{-\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{-\infty} T_n}$ ($Z_+ = \varnothing$ *при* $\sup R < +\infty$, *а* $Z_- = \varnothing$ *при* $\inf R > -\infty$). *Тоді* $Z_{\pm}$ — *замкнені інваріантні множини.*

Доведення. $f(Z_{\pm}) \subset \bigcap_{m=0}^{\pm\infty} f\left(\overline{\bigcup_{n=m}^{\pm\infty} T_n}\right) \subset \bigcap_{m=0}^{\pm\infty} \overline{f\left(\bigcup_{n=m}^{\pm\infty} T_n\right)} = \bigcap_{m=0}^{\pm\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\pm\infty} f(T_n)} \subset \subset \bigcap_{m=0}^{\pm\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\pm\infty} T_{n+1}} = Z_{\pm}$.

Твердження 7.6 ми навели тут і тому, що Z_- є прикладом множини, яка може задовольняти умови (ii) у твердженні 7.5.

Твердження 7.7. *Нехай* $p \in R$ *таке, що* T_n — *канонічно відкритий атом для довільного* $n \in R$ *і* $n \leq p$. *Будемо також вимагати, щоб або* $p + 1 \notin R$, *або ж* T_{p+1} *був не канонічно відкритим атомом. Нехай* $V := \bigcup_{n\in R, n\leq p} T_n$ *та* $F := \overline{X \backslash \overline{V}}$. *Тоді* F — *інваріантна множина, і якщо вона не порожня, то* $\overline{f^+(f(T_p))} = F$.

Доведення. Для доведення інваріантності достатньо показати, що $f\left(X \backslash \overline{V}\right) \subset F$ (бо тоді $f(F) \subset \overline{f\left(X \backslash \overline{V}\right)} \subset F$), або що $S := f^{-1}\left(\operatorname{int} \overline{V}\right) \bigcap X \backslash \overline{V} = \varnothing$ (бо $\operatorname{int} \overline{V} = X \backslash \overline{X \backslash \overline{V}} = X \backslash F$).

Припустимо, що $S \neq \varnothing$. Тоді відразу $V \neq \varnothing$. $f^{-1}(V) = \bigcup_{n\in P} f^{-1}(T_n) \subset \bigcup_{n\in P} T_{n-1} \subset \subset V$. Тому з твердження 8.2 маємо $f^-(V) = V \subset X \backslash S$. Звідси $n(S, V) = \varnothing$ і, як наслідок, $n(S, T_p) = \varnothing$. Зрозуміло, що S — відкрита множина. Тому (з $\mathbb{Z}$-транзитивності) $n(T_p, S) \neq \varnothing$. Легко бачити також, що $f^-(T_p) \subset V \subset \overline{f^-(T_p)}$, звідки, згідно з твердженням 10.1, $\overline{f(V)} \subset \subset \overline{V} \bigcup \overline{f(T_p)}$. Таким чином, $l := \min n(T_p, S) = \min n(f^-(T_p), S) = \min n\left(\overline{V}, S\right)$.

Нехай $E := \bigcup_{k=1}^{l} \overline{f^k(T_p)} \bigcup \overline{V}$. Згідно з твердженням 3.4 та наслідком 3.1 $f^l(T_p) \subset \overline{S}$ і $f(E) \subset \overline{V} \bigcup \bigcup_{k=1}^{l} \overline{f^k(T_p)} \bigcup \overline{f(f^l(T_p))} \subset E \bigcup \overline{f(\overline{S})} \subset E \bigcup \overline{\operatorname{int} \overline{V}} = E$. Звідси $\overline{f^+(T_p)} = E$, що разом з $\overline{f^-(T_p)} = \overline{V} \subset E$ дає $X = \overline{f^{\pm}(T_p)} = E = \bigcup_{k=-\infty}^{l} \overline{f^k(T_p)}$.

Оскільки $f(S) \subset \overline{V}$, то $n(S,S) \setminus \{0\} = n(f(S),S) + 1 \subset n(\overline{V},S) + 1 \subset [l+1,+\infty)$. Звідси $n(T_p, f^{-l}(S)) \bigcap [0,l] \subset n(f^l(T_p), S) \bigcap [0,l] \subset n(\overline{S}, S) \bigcap [0,l]$. Останнє (згідно з твердженням 10.3) збігається з $n(S,S) \bigcap [0,l] = \{0\}$. Це разом з $N(T_p,S) \bigcap (-\infty, l-1] = \varnothing$ дає $N(T_p, f^{-l}(S)) \bigcap (-\infty, l] = \{0\}$. Оскільки $f^{-l}(S)$ — відкрита множина, це означає, що $f^{-l}(S) \subset X \setminus \overline{\bigcup_{k \leq, k \neq 0} f^{-k}(T_p)} = \operatorname{int} \overline{T_p} = T_p$. $n(S,S) \setminus \{0\} = n(S,S) \setminus [0, l-1] = n(S, f^{-l}(S)) + l \subset n(S, T_p) + l = \varnothing$. Отже, S — блукаюча відкритна множина і $S \subset T_{p+l}$, $p + l = \sup R$.

Водночас для $k \in R \setminus \{p, p+l\}$ $f(T_k) \subset \overline{T_{k+1}}$, а $f(T_{p+l}) \subset \overline{V}$. Отже, $f^{-1}(\operatorname{int} \overline{T_{p+1}}) = f^{-1}\left(X \setminus \overline{\bigcup_{k \in \overline{p+2, p+l}} T_k \bigcup V}\right) \subset X \setminus \bigcup_{k \in R \setminus \{p\}} T_k$. Оскільки $f^{-1}(\operatorname{int} \overline{T_{p+1}})$ — відкрита множина, то вона міститься в $X \setminus \overline{\bigcup_{k \in R \setminus \{p\}} T_k} = \operatorname{int} \overline{T_p} = T_p$. Звідси згідно з твердженням 10.3 $n(\operatorname{int} T_{p+1}, f^{-1}(\operatorname{int} T_{p+1})) \subset n(T_{p+1}, T_p) = \varnothing$, а отже, $\operatorname{int} T_{p+1}$ — блукаюча множина. Звідси $T_{p+1} = \operatorname{int} T_{p+1}$, що суперечить умові на p.

Якщо $f(T_p) \subset \overline{V}$, то $f(V) \subset \overline{V}$. Тоді $X = \overline{f^{\pm}(V)} \subset \overline{V}$. Тому якщо $F \neq \varnothing$, то $f(T_p) \subset F$. А оскільки $f(F) \subset F$, то $\overline{f^+(f(T_p))} \subset F$. Водночас $\overline{f^+(f(T_p))} \supset \overline{X \setminus f^-(T_p)} \supset \overline{X \setminus V} \supset F$. Отже, $\overline{f^+(f(T_p))} = F$.

Тепер ми можемо підсумувати всі отримані результати в двох наступних теоремах, які можна вважати повною класифікацією $\mathbb{Z}$-транзитивних динамічних систем.

Теорема 7.1. *Всі класи еквівалентності блукаючих відкритних атомів можна подати у вигляді послідовності* $\{\tau_n \mid n \in R\}$, *де* R *— відрізок в* $\mathbb{Z}$ (*можливо, необмежений*), *так що для довільного* $n \in R$ $\tau_n \neq \varnothing$, *а при* $n > \inf R$ *прообрази всіх елементів* τ_n *містяться в* τ_{n-1}. *Мають місце також наступні властивості*:

(i) *Прообрази всіх елементів* τ_l *є порожніми при* $l := \inf R \in \mathbb{Z}$.

(ii) *Атоми* T_n, *найбільші елементи* τ_n, *мають такі властивості*: $f(\overline{T_n}) \subset \overline{T_{n+1}}$ *та* $f(\partial T_n) \subset \partial T_{n+1}$ *при* $n < \sup R$.

(iii) $U = \bigcup_{n \in R} T_n$, $X = \overline{U}$ *та всі* T_n *— канонічно відкриті атоми для* $n \in R$ *при* $\sup R = +\infty$.

(iv) *Нехай* $f(T_m) \subset Z_-$ *або* $f(T_m) \subset Y$, *де* $Y := \overline{X \setminus \overline{U}}$ *— інваріантна множина для деякого* $m \in R$. *Тоді всі* T_n *— канонічно відкриті атоми для* $n \in R$, *а* $m = \sup R$.

(v) *Нехай серед* T_n *є не канонічно відкриті. Тоді* $m := \sup R < +\infty$ *та існують* $q \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$ *такі, що* $F := \overline{X \setminus \overline{\bigcup_{n \in R, n < q} T_n}}$ *є інваріантною та збігається з* $\bigcup_{n=q}^{m+k} \overline{T_n}$, *де* T_n *— сильно періодичні атоми для* $n \in \overline{m+1, m+k}$.

Доведення. За метод розбиття атомів на класи можна взяти той, що був запропонований при доведенні твердження 7.4. Тоді основне твердження, пункт (i) та майже весь (ii) випливають з нього та з твердження 7.3. Пункти (iii) та (iv) є наслідками твердження 7.5. Завершимо доведення пункту (ii). Якщо $n \in R$ та $n \neq \sup R$, то $f^{-1}(T_{n+1}) \subset T_n$. Тому $f(\partial T_n) \subset f(\overline{T_n}) \bigcap X \setminus T_{n+1} \subset \overline{T_{n+1}} \setminus T_{n+1} = \partial T_{n+1}$.

(v). Якщо не всі T_n є канонічно відкритими, то за q потрібно взяти найменший елемент множини $\{n \in R \mid \operatorname{int} \overline{T_n} \neq T_n\}$, яка згідно з твердженням 7.5 є скінченною. Тоді з твердження 7.7 випливає, що $F := \overline{X \setminus \overline{\bigcup_{n \in R, n < q} T_n}}$ — інваріантна множина і $F = \overline{f^+(T_q)}$. Оскільки T_q — слабко блукаючий атом, то він є і квазіперіодичним відкритим атомом. Тому існує $k \in \mathbb{N}_0$ таке, що $F = \bigcup_{n=0}^{m+k-q} \overline{f^n(T_q)}$, а отже, $\left(F, f_{|F}\right)$ є простою. Згідно з твердженням 5.3 та канонічною замкненістю F атом $T_n := \operatorname{int} \overline{f^{n-q}(T_q)}$ є відкритним (в X) при $n \in \overline{m+1, m+k}$. Цей атом не може бути еквівалентним жодному блукаючому, адже не перетинається з U, тому він є сильно періодичним.

Остання теорема, більш точно, основне твердження та пункти (i), (ii) показують, як можна структурувати простір узгоджено до дії даного відображення. Пункти (iii) та (iv) описують ті можливі характеристики структури, що ведуть до „регулярності” системи. Останній пункт дає повний опис систем, у яких виникають патології. Наступна теорема детальніше описує випадок, що фактично міститься у пункті (iv).

Теорема 7.2. *Нехай $m := \sup R < +\infty$ та всі T_n — канонічно відкриті атоми для $n \in R$. Тоді*:

(i) *множина $Y := \overline{X \backslash \overline{U}}$ є інваріантною, а динамічна система $\left(Y, f_{|Y}\right)$ — $\mathbb{N}$-транзитивною;*

(ii) *відрізок R є порожнім тоді і тільки тоді, коли $X = Y$;*

(iii) *множина Y є порожньою тоді і тільки тоді, коли або існує $n \in R$ таке, що $f(T_m) \subset \subset \partial T_n$, або $f(T_m) \subset Z_-$;*

(iv) *нехай $R \neq \varnothing$ та $Y \neq \varnothing$; тоді $\overline{f^+(f(T_m))} = Y$ та $f(T_m) \bigcap \operatorname{int} Y \neq \varnothing$.*

Доведення. (i). Якщо всі T_n — канонічно відкриті атоми для $n \in R$, то з твердження 7.7 випливає, що Y — інваріантна канонічно замкнена множина. Тому за твердженням 2.5 $\left(Y, f_{|Y}\right)$ — $\mathbb{Z}$-транзитивна множина. Водночас якщо S — відкритна в Y та блукаюча множина, то $S \bigcap \operatorname{int} Y$ — відкритна в X та блукаюча множина. А це суперечить побудові Y. Тому в $\left(Y, f_{|Y}\right)$ немає блукаючих відкритих множин. Отже, за теоремою 6.1 вона є $\mathbb{N}$-транзитивною.

(ii). Очевидно, що відрізок R є порожнім тоді і тільки тоді, коли множина U є порожньою. Останнє, очевидно, рівносильно тому, що $X = Y$.

(iii). Нехай відрізок R не є порожнім. Оскільки $N(T_m, U) = R - m$, то $f(T_m) \subset X \backslash U = \overline{X \backslash \overline{U}} \bigcup \overline{U} \backslash U = Y \bigcup \left(\bigcup_{n \in R} \overline{T_n} \bigcup Z_-\right) \backslash U = \bigcup_{n \in R} \partial T_n \bigcup Z_- \bigcup Y$. Згідно з твердженням 3.1 або $f(T_m) \subset Y$, або існує $n \in R$ таке, що $f(T_m) \subset \partial T_n$, або $f(T_m) \subset Z_-$. Звідси безпосередньо випливає *необхідність*. *Достатність* випливає з твердження 7.5, бо за даних умов, згідно з твердженням 7.6 та теоремою 7.1, множина $\bigcup_{n \in R} \partial T_n \bigcup Z_-$ є замкненою інваріантною та неперетинною з $\bigcup_{n \in R} \operatorname{int} \overline{T_n}$.

(iv). Перша частина випливає з твердження 7.7. Припустимо, що $f(T_m) \bigcap \operatorname{int} Y = \varnothing$, тоді $f(T_m) \subset \partial Y = Y \bigcap \overline{U}$. Звідси $f(\partial Y) = f\left(Y \bigcap \overline{U}\right) \subset f(Y) \bigcap f\left(\overline{U}\right) \subset Y \bigcap \left(\overline{U} \bigcup \overline{f(T_m)}\right) \subset \subset \partial Y \bigcup f(T_m) \subset \partial Y$. Тому $Y = \overline{f^+(f(T_m))} \subset \partial Y$, що суперечить канонічній відкритості Y.

Зауважимо, що коли в припущеннях пункту (iv) Y є об'єднанням скінченного числа атомів (тобто $\left(Y, f_{|Y}\right)$ є простою), то результат цього пункту можна дещо уточнити: якщо $Y = \bigcup_{k=m+1}^{m+n} \overline{T_k}$, де T_k — канонічно відкриті (в X) періодичні атоми, то $f(T_m) \bigcap \bigcup_{k=m+1}^{m+n} T_k \neq \varnothing$. Доведення також проводиться від супротивного. Припустивши обернене, так само, як і в доведенні пункту (iv), можна показати, що множина $\bigcup_{k=m+1}^{m+n} \partial T_k$ є інваріантною. Для цього потрібно використати твердження 5.3 та те, що $\partial_X \overline{T_k} \subset \partial_Y T_k \bigcup \partial Y$.

Для більш глибокої класифікації атомів до випадків, що описані в пункті (v) теореми 7.1, та в пункті (iii) теореми 7.2 (перший випадок), можна застосувати класифікацію простих динамічних систем, що міститься у відповідному пункті (простою буде звуження початкової системи на F та на $\bigcup_{k=n}^{m} \overline{T_k}$, у позначеннях відповідних пунктів).

Також зауважимо, що неважко зрозуміти, як з наведених вище теорем випливає теорема 2.1. У випадках, коли всі атоми системи є блукаючими або коли серед атомів є слабко періодичні, це вже доведено в пунктах (iii), (v) теорем 7.1 та 7.2. Якщо ж всі атоми або блукаючі, або сильно періодичні, то, відкинувши всі блукаючі, згідно з теоремою 7.2, ми отримаємо $\mathbb{N}$-транзитивну систему, що містить атом. За наслідком 6.2 це означає, що вона є замиканням об'єднання скінченного числа відкритих атомів. Отже, весь простір є замиканням об'єднання відкритих атомів.

Заключні пункти 8 – 10, як вже зазначалось, є насамперед допоміжними для розуміння результатів основних пунктів.

8. Деякі властивості відображень множин у себе. Нехай в цьому та наступному пунктах X — деяка множина („простір”') і f — деяке відображення X у себе. Далі ми часто будемо використовувати таку лему.

Лема 8.1. *У формулі* $f^m\left(f^n(A)\right) \vee f^{m+n}(A)$ *знак* $\vee$ *збігається з* $=, \subset,$ *або* $\supset$ *в залежності від того, чи* $mn \geq 0,$ $m > 0,$ *а* $n < 0,$ *чи* $m < 0,$ *а* $n > 0$ *відповідно.*

Нагадаємо, що *орбітою* множини $A \subset X$ називається множина $f^+(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(A)$. Множину всіх прообразів множини $A \subset X$ будемо позначати через $f^-(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_0^-} f^n(A)$, а їх об'єднання — через $f^\pm(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(A)$.

Твердження 8.1. *Мають місце такі властивості орбіт*:

(i) $f\left(f^+(A)\right) = f^+\left(f(A)\right) \subset f^+(A) \subset f^{-1}\left(f^+(A)\right);$ $f^-\left(f^{-1}(A)\right) = f^{-1}\left(f^-(A)\right) \subset$ $\subset f^-(A);$ $f\left(f^\pm(A)\right) \subset f^\pm(A) \subset f^{-1}\left(f^\pm(A)\right).$

(ii) $f^-(A) = \{x \in X \,|\, f^+(X) \bigcap A \neq \varnothing\};$ $f^+(A) = \{x \in X \,|\, f^-(X) \bigcap A \neq \varnothing\};$ $f^\pm(A) =$ $= \{x \in X \,|\, f^\pm(X) \bigcap A \neq \varnothing\}.$

(iii) *Якщо* $B \subset X,$ *то* $f^+\left(A \bigcup B\right) = f^+(A) \bigcup f^+(B),$ $f^-\left(A \bigcup B\right) = f^-(A) \bigcup f^-(B)$ *і* $f^\pm\left(A \bigcup B\right) = f^\pm(A) \bigcup f^\pm(B).$

(iv) $f^+(A) = (f^n)^+\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)\right);$ $f^-(A) = (f^n)^-\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A)\right)$ *для довільного* $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Пункт (i) випливає з леми 8.1, (ii) є очевидним, (iii) випливає з того, що $f^n\left(A \bigcup B\right) = f^n(A) \bigcup f^n(B)$ для $n \in \mathbb{Z}$, а (iv) — з того, що $f^+(A) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{mn+k}(A)\right) =$ $= (f^n)^+\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)\right)$ та $f^-(A) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-mn-k}(A)\right) = (f^n)^-\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A)\right)$.

Множина $A \subset X$ називається *інваріантною* (*зворотно інваріантною*), якщо $f(A) \subset A$ (відповідно $f^{-1}(A) \subset A$).

Твердження 8.2. *Мають місце наступні властивості інваріантних множин*:

(i) *Якщо* $f(A) \subset A,$ *то* $f^+(A) = A,$ *а якщо* $f^{-1}(A) \subset A,$ *то* $f^-(A) = A.$

(ii) $f(A) \subset A$ *тоді і тільки тоді, коли* $f^{-1}\left(X \backslash A\right) \subset X \backslash A.$

(iii) *Перетин будь-якої кількості* (*зворотно*) *інваріантних множин є* (*зворотно*) *інваріантною множиною.*

(iv) *Якщо* $f^n(A) \subset A,$ *то* $f\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)\right) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)$ *і* $f^+(A) = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A).$

(v) *Якщо* $f^{-n}(A) \subset A,$ *то* $f^{-1}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A)\right) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A)$ *і* $f^-(A) = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(A).$

Доведення. Перші три пункти є очевидними. Доведемо (iv): $f\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)\right) = = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(A) = f^n(A) \bigcup \bigcup_{k=1}^{n-1} f^k(A) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)$. $f^+(A) = (f^n)^+ \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)\right) = = \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(A)$ (з твердження 8.1). Пункт (v) доводиться так само.

9. Множини візитів та блукаючі множини. Нагадаємо, що для $A, B \subset X$ ми означили *множини візитів* A до B як $n_f(A,B) := \{n \in \mathbb{N}_0 | A \bigcap f^{-n}(B) \neq \varnothing\} = \{n \in \mathbb{N}_0 \, | f^n(A) \bigcap B \neq \neq \varnothing\}$, $N_f(A,B) := \{n \in \mathbb{Z} | A \bigcap f^{-n}(B) \neq \varnothing\} = \{n \in \mathbb{Z} \, | f^n(A) \bigcap B \neq \varnothing\}$. Якщо з контексту зрозуміло, про яке f йде мова, нижнім індексом біля n_f та N_f нехтуємо, як і раніше.

Розглянемо деякі прості властивості $n(\cdot,\cdot)$ і $N(\cdot,\cdot)$.

Твердження 9.1. (i) $N(A,B) = n(A,B) \bigcup (-n(B,A)) = -N(B,A)$.

(ii) $n(A,B) = N(A,B) \bigcap \mathbb{N}_0$; $n(B,A) = -N(A,B) \bigcap \mathbb{N}_0$.

(iii) $n(A,B) = \varnothing$ *тоді і тільки тоді, коли* $f^+(A) \bigcap B = \varnothing$, *і тоді і тільки тоді, коли* $A \bigcap f^-(B) = \varnothing$.

(iv) $N(A,B) = \varnothing$ *тоді і тільки тоді, коли* $f^{\pm}(A) \bigcap B = \varnothing$, *і тоді і тільки тоді, коли* $A \bigcap f^{\pm}(B) = \varnothing$.

(v) $X \backslash f^+(A) = \bigcup_{n(A,B)=\varnothing} B$; $X \backslash f^-(A) = \bigcup_{n(B,A)=\varnothing} B$; $X \backslash f^{\pm}(A) = \bigcup_{N(A,B)=\varnothing} B$.

Твердження 9.2. *Нехай* $C, D \subset X$ *тоді*:

(i) $N(A \bigcup C, B \bigcup D) = N(A,B) \bigcup N(A,D) \bigcup N(C,B) \bigcup N(C,D)$;

(ii) $N(A \bigcap C, B \bigcap D) \subset N(A,B) \bigcap N(A,D) \bigcap N(C,B) \bigcap N(C,D)$;

(iii) $N(A,\varnothing) = N(\varnothing, A) = \varnothing$.

Доведення. Доведення пункту (iii) є очевидним, а пункти (i) та (ii) випливають з того, що $f^n(A) \bigcap \left(B \bigcup D\right) = \left(f^n(A) \bigcap B\right) \bigcup \left(f^n(A) \bigcap D\right)$, $f^n(A) \bigcap \left(B \bigcap D\right) = \left(f^n(A) \bigcap B\right) \bigcap \bigcap \left(f^n(A) \bigcap D\right)$ для довільного $n \in \mathbb{Z}$.

***Наслідок* 9.1.** *Аналогічні властивості мають місце і для* $n(\cdot,\cdot)$.

Легко бачити, що $N(\cdot,\cdot)$ та $n(\cdot,\cdot)$ є монотонними відносно природних порядків на просторах аргументів та значень. Розглянемо властивості $N(\cdot,\cdot)$ та $n(\cdot,\cdot)$ відносно дій f та f^{-1}.

Твердження 9.3. (i) $N\left(f^{-1}(A), B\right) \subset N(A,B) + 1 \subset N(A, f(B))$ *та* $N\left(A, f^{-1}(B)\right) \subset \subset N(A,B) - 1 \subset N(f(A), B)$.

(ii) $n(f(A), B) = (n(A,B) \backslash \{0\}) - 1$ *та* $n\left(A, f^{-1}(B)\right) = (n(A,B) \backslash \{0\}) - 1$.

Доведення випливає з леми 8.1.

***Наслідок* 9.2.** (i) $N(f(A), f(B)) \supset N(A,B) \supset N\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right)$.

(ii) $n(f(A), f(B)) \supset n(A,B) \supset n\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right)$.

Твердження 9.4. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді* $N_{f^n}(A,B) = \left(N_f(A,B) \bigcap n\mathbb{Z}\right)/n$ *та* $n_{f^n}(A,B) = = \left(n_f(A,B) \bigcap n\mathbb{N}_0\right)/n$.

Нехай тепер Y — деяка множина і g — відображення Y в себе. Розглянемо випадок прямого добутку $(f \times g)((x,y)) := (f(X), g(y))$.

Твердження 9.5. *Нехай* $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$.

(i) $N_{f \times g}(A \times C, B \times D) = N_f(A,B) \bigcap N_g(C,D)$.

(ii) $n_{f \times g}(A \times C, B \times D) = n_f(A,B) \bigcap n_g(C,D)$.

Доведення випливає з $(f \times g)(A \times C) = f(A) \times g(C)$.

Твердження 9.6. *Якщо* $Y \subset X$ — f*-інваріантна множина і* $g := f_{|Y}$, *то для* $A, B \subset Y$ $n_g(A,B) = n_f(A,B)$ *та* $N_g(A,B) = N_f(A,B)$[3].

Доведення. Для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ $f^n(A) = g^n(A)$. Тому $f^n(A) \bigcap B \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $g^n(A) \bigcap B \neq \varnothing$. Отже, $n_g(A,B) = n_f(A,B)$, і $N_g(A,B) = -n_g(B,A) \bigcup n_g(A,B) = -n_f(B,A) \bigcup n_f(A,B) = N_f(A,B)$.

Нагадаємо, що $A \subset X$ — *блукаюча* множина, якщо $N(A,A) = \{0\}$. Легко бачити, що ця рівність еквівалентна кожній з наступних: $n(A,A) = \{0\}$; $n(f(A),A) = \varnothing$; $n\left(A, f^{-1}(A)\right) = \varnothing$; $f^+(f(A)) \bigcap A = \varnothing$; $A \bigcap f^-\left(f^{-1}(A)\right) = \varnothing$.

Твердження 9.7. *Якщо* A — *блукаюча множина, то*:

(i) $f^{-1}(A)$ — *також блукаюча множина*;

(ii) *для довільних* $n \in \mathbb{N}_0$ *та* $m \in \mathbb{Z}$ *таких, що* $m \neq -n$, $f^{-n}(A) \bigcap f^m(A) = \varnothing$.

Доведення. Доведення пункту (i) випливає з наслідку 9.2, а пункту (ii) — того, що $N\left(A, f^{-n}(A)\right) \subset \{-n\}$.

10. Допоміжні факти з топології.

Твердження 10.1. *Нехай* X, Y — *топологічні простори. Наступні умови є еквівалентними*:

(i) $f \in C(X,Y)$;

(ii) *для довільної підмножини* $A \subset X$ $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$;

(iii) *для довільної підмножини* $C \subset Y$ $f^{-1}(\operatorname{int} C) \subset \operatorname{int} f^{-1}(C)$;

(iv) *якщо* $\overline{A} = \overline{B}$, *то* $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.

Доведення. Еквівалентність пунктів (i) та (ii) є відомою, а пункт (iii) є двоїстою умовою до (ii). Легко бачити, що з (iv) випливає (ii). Залишилося довести (iii) $\Rightarrow$ (iv). Дійсно, $\overline{f(A)} = \overline{f\left(\overline{A}\right)}$, бо $f(A) \subset f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$. Тому якщо $\overline{A} = \overline{B}$, то $\overline{f(A)} = \overline{f\left(\overline{A}\right)} = \overline{f\left(\overline{B}\right)} = \overline{f(B)}$.

Твердження 10.2. *Нехай* $f \in S(X)$. *Тоді мають місце наступні властивості*:

(i) *Замикання інваріантної множини — інваріантна множина, а внутрішність зворотно інваріантної — зворотно інваріантна множина.*

(ii) *Для довільної підмножини* $A \subset X$ $f\left(\overline{f^+(A)}\right) \subset \overline{f^+(A)}$, $f\left(\overline{f^\pm(A)}\right) \subset \overline{f^\pm(A)}$ *і* $f^{-1}\left(\operatorname{int} f^-(A)\right) \subset \operatorname{int} f^-(A)$.

(iii) *Для довільної відкритої множини* U $f^-(U)$ — *відкрита множина.*

Доведення. Доведення пункту (i) випливає з твердження 10.1, пункту (ii) — з (i) та твердження 8.1, а твердження (iii) є очевидним.

Твердження 10.3. *Нехай* $\overline{A} = \overline{B}$. *Тоді*:

(i) *якщо* U — *відкрита множина, то* $n(A,U) = n(B,U)$;

(ii) $\overline{f^+(A)} = \overline{f^+(B)}$.

Доведення. (i). Для $n \in \mathbb{N}_0$ $f^{-n}(U)$ — відкрита множина. Тому $f^{-n}(U) \bigcap A = \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $f^{-n}(U) \bigcap \overline{A} = \varnothing$. Звідси $n(A,U) = n\left(\overline{A},U\right) = n\left(\overline{B},U\right) = n(B,U)$. Доведення пункту (ii) випливає з пункту (i). Оскільки $X \backslash \overline{f^+(A)} = \bigcup\{U\colon U\text{— відкрита та } n(A,U) = \varnothing\} = \bigcup\{U\colon U\text{— відкрита та } n(B,U) = \varnothing\} = X \backslash \overline{f^+(B)}$ (згідно з твердженням 9.1 та тим, що $X \backslash \overline{f^+(A)}$ — відкрита).

[3] В таких випадках ми не вказуємо нижній індекс.

В наступному твердженні міститься кілька корисних фактів із загальної топології.

Твердження 10.4. (i) *Якщо* U, V — *неперетинні відкриті множини, то* $\operatorname{int}\overline{U}\bigcap\overline{V}=\varnothing$.

(ii) *Якщо* U — *відкрита множина, то для довільної* $A\subset X$ $\overline{A\bigcap U}=\overline{\overline{A}\bigcap U}$.

(iii) *Якщо* U — *відкрита множина, то для довільної* $A\subset X$ $\operatorname{int}\left(\overline{A}\bigcap\overline{U}\right)=\operatorname{int}\overline{A\bigcap U}$.

(iv) *Якщо* U — *відкрита множина, то з* $\operatorname{int}\left(\overline{A}\bigcap\overline{U}\right)\neq\varnothing$ *випливає, що* $A\bigcap U\neq\varnothing$. *Зокрема, якщо* $\operatorname{int}\overline{A}\neq\varnothing$, *то* $A\bigcap\operatorname{int}\overline{A}\neq\varnothing$.

(v) *Якщо* U — *відкрита множина,* $A\subset\overline{\operatorname{int}A}$ *і* $U\bigcap\overline{A}\neq\varnothing$, *то* $U\bigcap\operatorname{int}A=\operatorname{int}(A\bigcap U)\neq\varnothing$.

Доведення. (i). Якщо $U\bigcap V=\varnothing$, то $\overline{U}\bigcap V=\varnothing$. Звідси $\operatorname{int}\overline{U}\bigcap V=\varnothing$, і тому $\operatorname{int}\overline{U}\bigcap\overline{V}=$ $=\varnothing$.

(ii). Оскільки $F:=X\backslash U$ — замкнена множина, то $\overline{A\backslash F}\subset\overline{\overline{A}\backslash F}$. При цьому $\overline{\overline{A}\backslash F}=\overline{\overline{A}\backslash\overline{F}}\subset$ $\subset\overline{A\backslash F}$. Тому $\overline{A\backslash F}=\overline{\overline{A}\backslash F}$, а отже, $\overline{A\bigcap U}=\overline{\overline{A}\bigcap U}$.

(iii). З пункту (ii) маємо $\operatorname{int}\overline{A\bigcap U}=\operatorname{int}\overline{\overline{A}\bigcap U}\supset\operatorname{int}\overline{\operatorname{int}\overline{A}\bigcap U}=\operatorname{int}\overline{\operatorname{int}\overline{A}\bigcap\overline{U}}\supset$ $\supset\operatorname{int}\left(\operatorname{int}\overline{A}\bigcap\overline{U}\right)=\operatorname{int}\overline{A}\bigcap\operatorname{int}\overline{U}=\operatorname{int}\left(\overline{A}\bigcap\overline{U}\right)$. Включення в інший бік є очевидними, а пункт (iv) випливає з пункту (iii).

(v). Нехай $V:=\operatorname{int}A$. Якщо $U\bigcap V=\varnothing$, то $U\bigcap\overline{A}=U\bigcap\overline{V}=\varnothing$. Суперечність.

Насамкінець зауважимо, що рецензент звернув нашу увагу на нещодавні публікації [3, 5]. У першій з них серед іншого показано, що $\mathbb{N}$- та $\mathbb{N}_0$-транзитивності, взагалі кажучи, нееквівалентні, та наведено деякі умови для їх еквівалентності. У роботі [3] також отримано основні результати нашої роботи у випадку, коли фазовий простір є гаусдорфовим. Оскільки за цього припущення відкритними атомами можуть бути лише ізольовані точки, конструкції дещо спрощуються. З цієї роботи ми додали умови (iv) та (v) у твердженні 2.3. Зауважимо, що в обох роботах міститься велика кількість прикладів, яких дещо бракує у нашій.

1. *Akin E.* The general topology of dynamical systems // Grad. Stud. Math. – 1993. – **1**. – x+261 p.
2. *Akin E.* Recurrence in topological dynamics: Furstenberg families and Ellis actions. – New York: Plenum, 1997. – x+265 p.
3. *Akin E., Carlson J. D.* Conceptions of topological transitivity // Topology Appl. – 2012. – **159**. – P. 2815 – 2830.
4. *Banks J.* Topological mapping properties defined by digraphs // Discrete Contin. Dynam. Systems. – 1999. – **5**. – P. 83 – 92.
5. *Banks J., Stanley B.* A note on equivalent definitions of topological transitivity // Discrete and Contin. Dynam. Systems. Ser. A. – 2013. – **33**. – P. 1293 – 1296.
6. *Kolyada S., Snoha L.* Some aspects of topological transitivity — a survey // Grazer Math. Berichte. – 1997. – **334**. – P. 3 – 35.
7. *Mai J.-H., Sun W.-H.* Transitivities of maps of general topological spaces // Topology Appl. – 2010. – **157**. – P. 353 – 375.
8. *Silverman S.* On maps with dense orbits and the definition of chaos // Rocky Mountain J. Math. – 1992. – **22**. – P. 353 – 375.

Одержано 29.12.12,
після доопрацювання — 05.03.13